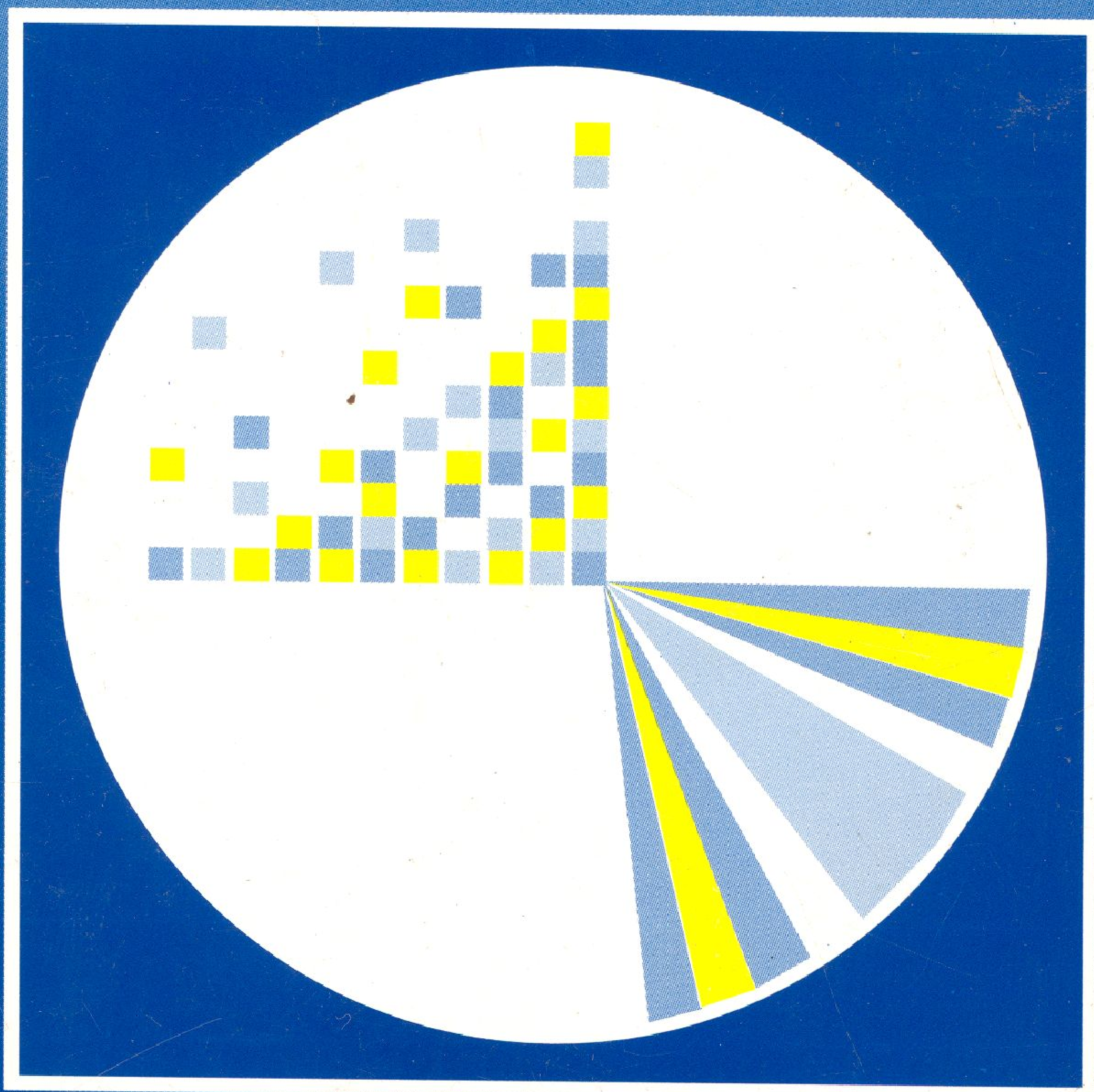
بحوث العمليات و تطبيقاتها فى

حل المشكلات وإتخاذ القرارات

الجزء الأول : البرامج الخطية



دكتور / فريد عبد الفتاح زين الدين
أستاذ إدارة الأعمال - كلية التجارة
جامعة الزقازيق

١٩٩٧

بحوث العمليات وتطبيقاتها فى

حل المشكلات واتخاذ القرارات

الجزء الأول : البرامج الخطية

دكتور

فريد عبد الفتاح زين الدين

أستاذ إدارة الأعمال

كلية التجارة - جامعة الزقازيق

١٩٩٧

رقم الإيداع بدار الكتب : ١٩٩٦/٧٤١٢
الترقيم الدولى 977 - o4 - 1715 - 7: I.S.B.N.

بسم الله الرحمن الرحيم

" وقالوا الحمد لله الذى هدانا لهذا وماكنا
لنهتدى لولا أن هدانا الله "

صدق الله العظيم

المحتـــــويات

مقدمـــة

نشأة وتطور بحوث العمليـــات

التعريف ببحوث العمليات Operations Research

من ابرز التطورات التى لحقت بميدان الاعمال بصفة عامة ومجال الصناعة بصفة خاصة ، هو ذلك الاتجاه القوى الذى ظهر خلال القرن الاخير والذى يتمثل فى تطبيـــق الاساليب العلمية فى حل المشكلات المختلفة . ان تاريـــخ هذا الاتجاه يرتبط بتلك الجهود التى قام بها مجموعـــة من العلماء الاوائل رفضوا فكرة ان الادارة فن واعتنقـــوا مبدأ ان الادارة علم مبنى على قواعد واصول واسس علميـــة وذلك من خلال حركتهم التى سميت بحركة الادارة العلميـــة Scientific Management ،والتى برزت فى عام ١٩١١ م وذلك عندما نشر فردريك ونسلو تايلور كتابه الذى اثـار جدلا كبيرا فى ذلك الوقت بعنوان الادارة العلميـــة Scientific Management والذى طرح فيه فكرة ضـرورة احلال الطريقة العلمية والمبنية على الاسلوب العلمـــى الذى يرتكز على جمع الحقائق وتحليلها للوصول الى تفسير للظاهرة محل البحث ، وذلك بدلا من طريقة الحكم الشخصـــى والتجربة والخطأ . ولذلك يمكن ان يقال أن اهم مـــا جاء به " تايلور " لنهضة نظرية الادارة هو اصراره علـى ضرورة تطبيق الطريقة العلمية لحل ما يواجه الادارة مـن مشكلات . ولقد كانت اساليب الادارة العلمية فى عهـــد " تايلور " تنحصر فى دراسة الزمن والحركـــة Time and Motion Study وتحديـــد معدلات الاداء .

وبمرور الوقت اصبحت ادارة المشروعات عمليـــة معقدة فى عالمنا المعاصر بسبب تعدد وتنوع وتشابـــك وتداخل المتغيرات المؤثرة والمتأثرة بالقرار المعيـــن ،

واصبح على الباحثين العمل على ايجاد اساليب علمية متطورة تتناسب مع طبيعة المشاكل المتعددة المجالات والمتداخلة المتغيرات والمتعارضة الاهداف .

ولذلك اتجهت الجهود الى استخدام اساليب علمية اكثر تقدما لحل مختلف انواع المشاكل وهى الاساليب التى يطلق عليها اصطلاح بحوث العمليات .

ولقد تعددت وتباينت الاراء ووجهات النظر فى التعريف ببحوث العمليات ، الا ان هذا التعدد لم يكن يحمل فى طياته اختلافا حقيقيا بقدر ما كان ابراز نواحى معينة والتأكيد عليها من وجهة نظر واضع التعريف، ولذلك سنجد بعد استعراض عدد من هذه التعاريف انها تلتقى جميعا عند مجموعة من الخصائص او السمات هى التى تشكل فى مجموعها أهم خصائص بحوث العمليات .

فقد عرفت جمعية بحوث العمليات فى المملكة المتحدة بحوث العمليات بأنها (1) " هى تطبيق الطرق العلمية على المشاكل المعقدة التى تنشأ عند توجيه وادارة النظم الكبيرة من الافراد ، والمعدات، والمواد ، والاموال فى ميدان الصناعة والتجارة ، والحكومة والدفاع ، والمدخل المميز هو اعداد نموذج علمى للنظام يتضمن قياسا للعوامل المختلفة كالصدفة والخطر ، وبمقتضى ذلك النموذج يمكن التنبؤ ومقارنة عوائد مختلف القرارات والاستراتيجيات البديلة وذلك بهدف مساعدة الادارة فى تحديد سياساتها واجراءاتها باسلوب علمى " .

---

(1) Herrman, c.c., and Magee, F., operations Research for management, The New English Library ETD., London. 1969, p. 4 .

كذلك وضعت جمعية بحوث العمليات الامريكية تعريفا مختصرا لبحوث العمليات مؤداه [1] " بحوث العمليات هى التى تهتم بالتحديد العلمى لافضل تصميم وتشغيل لنظم العامل والالة ، وذلك عادة فى الظروف التى تتطلب تخصيصا للموارد المحدودة . "

ويعد التعريف الذى وضعه "تشرشمان Charchman " وآخرون [٢]، ذو اهمية خاصة لانه يركز الضوء على أهمية استخدام بحوث العمليات ، فقد جاء تعريفهم لها بأنها " تطبيق الاساليب العلمية الخاصة بالنظام بهدف امداد الادارة بحلول مثلى لمعالجة هذه المشاكل وقد عرف " دانتزنج Dantzing "[٣] بحوث العمليات بأنها علم الادارة . أى علم اتخاذ القرارات وتطبيقها.

وعرف " واجنر Wagner "[٤] بحوث العمليات بأنها مدخل العلم المستخدم فى حل المشكلات التى تصادف الادارة العليا للمشروعات .

اما مورس وكمبال Morse and Kimball [٥] فقد عرفا بحوث العمليات بأنها تطبيق الاسلوب العلمى عن طريق توفير الاساس الكمى الذى يمكن الادارة من اتخاذ القرارات الادارية .

---

(1) Ibid, P.4.

(2) Charchman, c.w., and Otheres, Introduction to Operations Research, Wiley 1967.

(3) Dantzing, G.B., Management Science in the world of to-day and to-morrow, Management Science, Vol.18, Feb. 1967, P.107.

(4) Wagner, H.,Principles of operations Research, New york Prentice thall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1969, P.4.

(5) Morse,P.M.; and Kimball, G.E., Methods of operations Research, New york, John wiley and Sons Inc., 1951,P.1.

ويمكن من خلال تحليل وفحص التعريفات السابقة — وغيرها — ان نلمس ونستنتج ان هناك تركيزا على بعض النواحى تشترك جميعها فى ابرازها ، وهى تشكل فى مجموعها اهم الخصائص والسمات التى تحدد اطار بحوث العمليات وهى :

أولا : ان بحوث العمليات تاخذ بالنظرة الشاملة — اى بمفهوم النظام — الى المنظمة أو الى المشكلة المعينة . وتعنى هذه الخاصية ان بحوث العمليات تتخذ من مدخل النظم اساسا لوصف الظواهر والمشكلات وتشخيصها . ليس من خلال ادارات المنظمة كوحدات قائمة بذاتها ، ولكن من خلال الاجزاء المكونة للنظام من حيث علاقات التفاعل فيما بينها ، ولذلك فان الدراسات الخاصة ببحوث العمليات لن تكون موجهة نحو كل ادارة من ادارات المنظمة ، وانما على العلاقات المتداخلة بينها، الا فى بعض الحالات التى تكون فيها بعض المشاكل مرتبطة ببعض الوظائف فقط داخل المنظمة .

ثانيا : ان بحوث العمليات ترتكز على الطريقة العلمية كأساس ومنهج فى البحث والدراسة ، وهى بطبيعة الحال احسن الطرق كفاءة وفاعلية اذا ما اتبعها متخذ القرار فى كل ما يواجهه من مشكلات،وتقتضى الطريقة العلمية فى حل المشاكل السير فى خطوات اربعة محددة ، أولها التحديد الدقيق للمشكلة وتحديد كافة ابعادها ، ثم تأتى الخطوة الثانية متمثلة فى تكوين مجموعة الفروض التى تعطى تفسيرا ممكنا لابعاد المشكلة ، اما الخطوة الثالثة فهى اختبار صحة تلك الفروض واستعراض

البدائل التى تسهم فى حل المشكلة على ضوء الفروض الصحيحة ، ثم بعد ذلك تأتى الخطوة الرابعة والمتمثلة فى اختيار الحل الامثل من مجموعة الحلول البديلة ووضعه موضع التنفيذ ومتابعة نتائج التنفيذ ، وبحوث العمليات تعتمد على هذه الخطوات الاربعة عند معالجة ما يواجه الادارة من مشاكل وذلك هو الذى يكسبها خاصية هامة وهى ارتكازها على المنهج العلمى فى البحث والدراسة ، وسيظهر ذلك بوضوح عند التعرض لخطوات بناء النماذج .

ثالثا : تعتبر عمليات بناء النماذج الرياضية عصب بحوث العمليات . والنموذج الرياضى لا يخرج عن كونه تمثيل مبسط للواقع فى صورة نموذج يعكسه ويمثله ، والغرض منه استنباط علاقات بين متغيرات معينة ، بحيث يمكن تحقيق هذه العلاقات عن طريق استخدامها فى صورة وصفية او تنبؤية . ويمكن التوصل احيانا الى نتائج ما كان يمكن استنتاجها او ملاحظتها فى غيبة هذا النموذج ، لذلك تهتم بحوث العمليات ببناء النماذج الرياضية .

رابعا : من الخصائص المميزة لبحوث العمليات انها ترتكز على مفهوم تكامل المعرفة لفروع العلم المختلفة ، فهى تستفيد من التقدم والخبرة والمعرفة من مجموعة العلوم فى مختلف التخصصات ، لان ذلك من شأنه ان يسهم فى ايجاد التكامل فى المفاهيم ، والذى يعتبر ضروريا لتفسير الظواهر تفسيرا متكامل الابعاد ، فمثلا يمكن القول ان نظم العامل والالة Man-Machine Systems لها ابعادها

المتنوعة منها الطبيعية والبيولوجية والسيكولوجية والاجتماعية والاقتصادية والهندسية . لذلك فان فهم هذه النظم فهما صحيحا تتطلب تعاونا من المتخصصين فى هذه العلوم .

تلخيص للتطور التاريخى لبحوث العمليات

ترجع بعض مفاهيم وتفاصيل وضع وتكوين وتحليل النماذج المستخدمة اليوم الى عدة قرون ماضية ، اى ان بحوث العمليات وان كانت تعتبر علماً حديثاً نسبيا الا ان بعض جذورها العلمية وبعض الاسس التى ترتكز عليها لها تاريخ يسبق بكثير بحوث العمليات كما نعرفها اليوم ، فنظرية الاحتمالات Probab ility theory . يرجع تاريخ العمل بها الى القرن السابع عشر ، كذلك فان التطورات التى لحقت بحسابات التفاضل والتكامل Differential and Calculus كانت بفضل كل من اسحاق نيوتن Isace Newton وجوتفريد ليبنتز G.V. Liebnitz . كذلك فقد شهد بداية هذا القرن ظهور نماذج مراقبة الجودة والتى قدمها كل من فورد هاريس Ford Harris فى مصانع وستنجهاوس . وويلسون R.H. Willson فى مصانع بل للتليفونات . كما قدم ماركوف A.N. Markov دراسات مبدئية عن النماذج الديناميكية Dynamic Models .

كذلك ينسب الفضل الى ايرلنج Erlang خلال فترة حياته من عام ١٨٧٨ حتى عام ١٩٢٩ فى تقديم التحليل الاقتصادى لخطوط الانتظار فى مصنع كوبنهاجن للتليفونات .

وبرغم الجهود السابقة الا انه يمكن القول ان بحوث العمليات لم تبدأ كمجال منظم للدراسة والبحث

الا خلال الحرب العالمية الثانية وتحديدا فى عام ١٩٤٠ حين كون الجيش الانجليزى فريقا مكونا من مجموعة من العلماء على رأسها البروفيسور بلاكت P.M.S. Blakett والحائز على جائزة نوبل فى الطبيعة اسندت اليه مهمة بحث ودراسة عدد من المشاكل الاستراتيجية والتكتيكية المعقدة والخاصة بدراسة مشكلة تطوير جهاز الرادار وتحديد المواقع المثلى لاجهزة الرادار والربط بينها وبين المدفعية المضادة للطائرات والانوار الكاشفة والطائرات الاعتراضية وغير ذلك من عناصر نظام الدفاع الجوى وبعد ذلك اتسعت لتشمل البحرية البريطانية .

ولقد ضم هذا الفريق علماء فى الطبيعة والرياضيات ، ووظائف الاعضاء ، والجيولوجيا ، والرياضيات الطبيعية ، وعلماء الفيزياء الفلكية ، وضباط من الجيش ، وفروع اخرى من العلم واطلق على هذا الفريق مجموعة بحوث العمليات العسكرية Army operational Research Group ، ويبدو واضحا ان مجموعة المهارات والمعارف التى يضمها هذا الفريق تمكنه من التعامل مع المشكلات المعقدة وذلك اذا ما قورن بقدرة نوعية فردية من هذه المهارات بالتعامل مع ذات المشاكل ولقد حققت هذه المجموعة نجاحا هائلا فى ايجاد حلول لمختلف المشكلات التى تناولتها مثل تأمين وحماية القوات العسكرية ، وقدرتها فى استغلال الموارد المحدودة من الرجال والمعدات للقوات البريطانية فى صد العدوان الالمانى وتحويل بريطانيا من موقف الدولة المدافعة الى الدولة المهاجمة فى عام ١٩٤٢م.

ولقد كان هذا النجاح الهائل لهذا الفريق سببا من اسباب انتصارات الجيش الانجليزى فى معركة بريطانيا الجوية ، ومعركة شمال الاطلنطى ، وغزوة الجزيرة فى المحيط الهادى ، ولذلك فقد تم تكوين مجموعات مشابهة فى مختلف فروع القوات المسلحة

الانجليزية ، وبدأت الولايات المتحدة الامريكية فى تتبع تلك الخطى وكونت فرقا مشابهة تضم علماء متخصصون فى مختلف فروع العلم والمعرفة فى جميع افرع القوات المسلحة الامريكية ، وقد نجحت بالفعل هذه الفرق فى حل الكثير من المشكلات المعقدة فى عديد من المجالات .

وبنهاية الحرب العالمية الثانية وانخفاض الميزانية المخصصة لبحوث الجيش ، بدأ التخلص من العديد من الافراد الذين كانوا يعملون فى فرق بحوث العمليات ممن اكتسبوا خبرة فى هذا المجال وتصادف ان كان ذلك فى توقيت ظهرت فيه حاجة مديرى المصانع للتخطيط لزيادة الانتاج واعادة بناء الكثير من المنشآت الصناعية التى دمرتها الحرب ، ولذلك فقد تلقفت المؤسسات المدنية هؤلاء المتخصصون فى اساليب بحوث العمليات وجذبتهم اليها بعد أن تبين انه يمكن الاستفادة من هذا الفرع الجديد من فروع المعرفة فى الحياة المدنية، وتحقيق نجاح يماثل ذلك النجاح الذى تحقق فى المجال العسكرى، ومن ثم بدأت بحوث العمليات فى الانتشار فى مختلف الميادين وخاصة المنظمات الصناعية والتجارية الكبيرة .

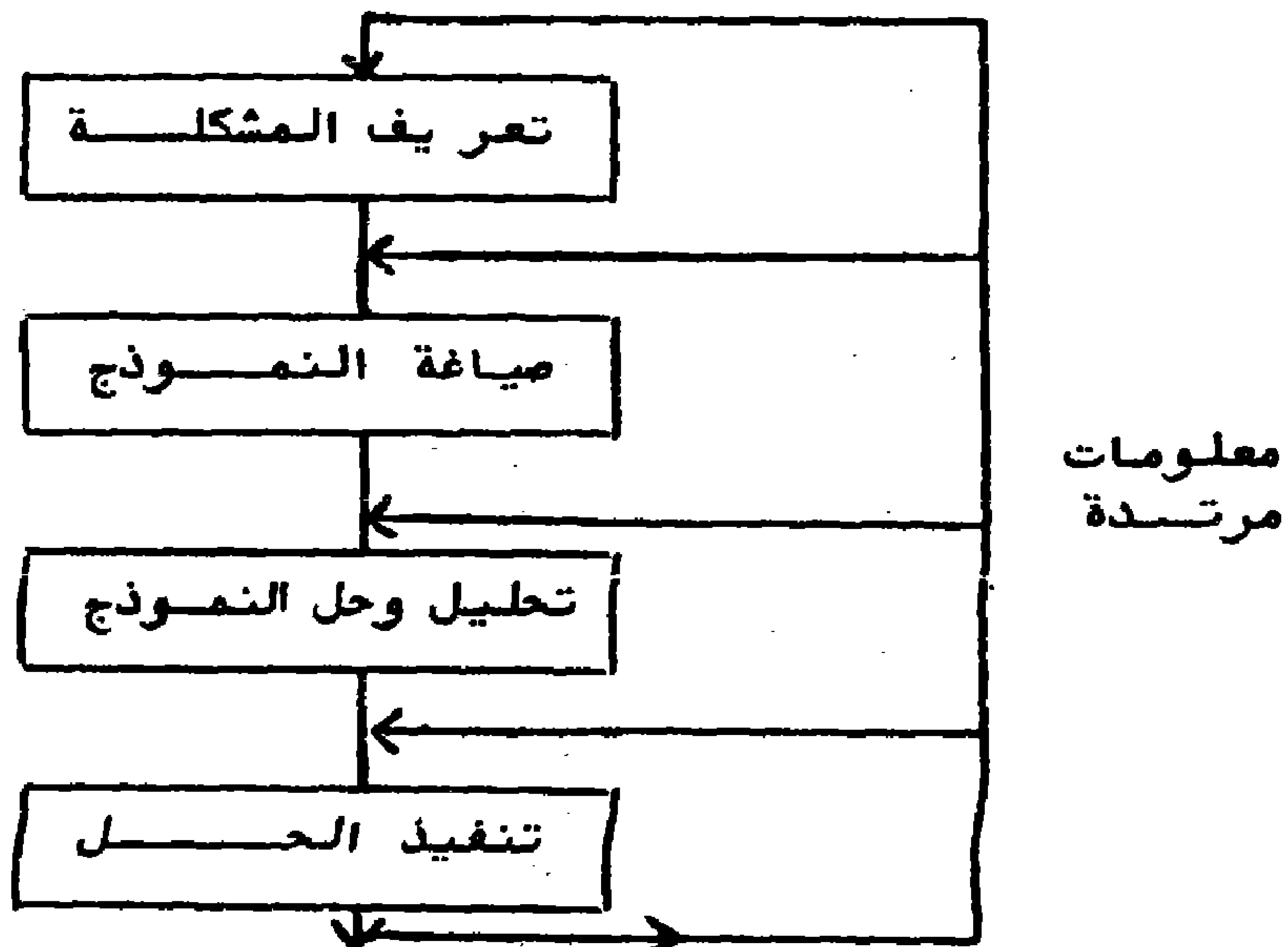
ومن الانصاف ان نشير هنا الى ان الاستخدام التجارى للحاسبات الالية فى الخمسينات كان مفتاح نمو وتقدم وتطور بحوث العمليات وانتشار واتساع تطبيقها ، اذ ان الحلول العملية للمشاكل الادارية تتطلب المقدرة فى القيام بعمليات حسابية متعددة وحفظ كميات ضخمة من البيانات لا تنجز الا حينما تتاح تلك الحاسبات الالكترونية التى تتيح المقدرة على اجراء مثل تلك *العمليات الحسابية بالاضافة الى مقدرتها فى حفظ* واسترجاع كميات هائلة من البيانات والمعلومات . لذلك فانه كان من الطبيعى ان تكون بداية وضع اساليب بحوث العمليات موضع التطبيق العملى مرتبط غالبا بالشركات

الكبرى التى تملك تلك الحاسبات الالية . مع ملاحظة ان سرعة ودقة تلك الحاسبات فى بداية السنوات الماضية كانت محدودة بمقارنتها بما هو متاح اليوم .

وفى اواخر الستينات واوائل السبعينات حدث تطور آخر بالنسبة للمجالات التى تطبق فيها اساليب بحوث العمليات ، اذ بدء فى تطبيقها فى مجال الانشطة الحكومية ومن الامثلة على ذلك قيام بلدية مدينة نيويورك بانشاء وحدة لبحوث العمليات اطلق عليها اسم RAND لتعمل جنبا الى جنب مع باقى وحدات الخدمات الحكومية كالحريق والبوليس والصحة العامة .

الخطوات العامة لاساليب بحوث العمليات .

على الرغم من تعدد الادوات والاساليب التى تستخدم فى تطبيقات بحوث العمليات ، وعلى الرغم كذلك من تباينها الى حد ما فى مجالات التطبيق ، الا انها تتفق جميعها فى العناصر الرئيسية التى تشكل مجموعة الخطوات العامة المشتركة لاساليب بحوث العمليات ، ويوضح الشكل التالى هذه الخطوات .



" الخطوات العامة لاساليب بحوث العمليات "

ويتضح من هذا الشكل ان التعريف والتحديد الدقيق للمشكلة هو الخطوة الاولى ، تليها صياغة تلك المشكلة فى شكل نموذج ، عندئذ يتم تحليل وحل النموذج واختيار الحل الامثل للمشكلة ثم تطبيق هذا الحل . ومن خلال الخبرة المكتسبة من تطبيق وتنفيذ الحل يمكن اجراء تحسينات على أى من الخطوات الاربعة السابقة وهذا ما يعبر عنه فى الشكل السابق بالمعلومات المرتدة .

ونظرا لاهمية هذه الخطوات فى تفهم الاطار العام لاساليب بحوث العمليات فاننا سنقدم فيما يلى بعض التفصيلات التوضيحية لها للوقوف على فهم صحيح لمعناها ومغزاها ودورها فى اساليب بحوث العمليات .

أولا : تعريف المشكلة : Problem Identification

تبدأ الخطوات او المراحل التى تمر بها مختلف اساليب بحوث العمليات بالتعرف على المشكلة والتحديد الدقيق لها ، وغالبا ما تكون هذه الخطوة على درجة عالية من التعقيد تفوق ما نتخيله ، ويرجع السبب فى ذلك الى انه يوجد الكثير من الخلط بين اكتشاف الظاهرة وبين تعريف وتحديد المشكلة ، فاذا رأت منشأة ما ان هناك انخفاضا فى رقم الربح المحقق من انشطتها كان ذلك بمثابة الظاهرة . أما تحديد المشكلة فانه يتطلب مزيدا من التحليلات المتعمقة لتفسير تلك الظاهرة . فهل انخفاض الربح كان نتيجة لارتفاع التكلفة؟ ان كان بسبب زيادة حدة المنافسة فى السوق ؟ ام كان لاى سبب آخر ؟ .

ثانيا : تكوين وصياغة النموذج Formulation of the Model

بعد ان يتم تعريف المشكلة وتحديدها تحديدا دقيقا ، نكون بذلك قد وصلنا الى المرحلة التى يمكن

فيها تكوين وصياغة المشكلة فى صورة نموذج يعبر عنها ، ويعرف النموذج بأنه تمثيل للواقع يتعلق بظاهرة أو بنظام معين ويعبر عن العلاقة بين اجزائة ويستخدم فى التنبؤ بالاوضاع المستقبلة التى يمكن ان تتخذها الظاهرة او النظام الاصيل ، بحيث يتم استنتاج بعض المعلومات والمفاهيم الاساسية عن الظاهرة الاصلية موضع البحث والاستناد الى تلك المعلومات فى اتخاذ القرارات .

اى ان النموذج هو تصوير بسيط وواقعى للمشكلة ، وان بناء وحل النموذج يسهم فى فهم الواقع العملى وايضا يمكن من التنبؤ بالاتجاهات المقبلة .والنماذج بهذا المعنى تعتبر الاساس لكل ادوات بحوث العمليات .

ولتوضيح ما تقدم يمكن القول ان نموذج الطائرة ما هو الا شكل توضيحى على الاقل بصريا للطائرة الحقيقية وعلى ذلك يمكن القول ان النموذج يقوم ويستند على اعتبارين على درجة عالية من الاهمية ويوفق بينهما .
اولهما ان يكون تصويرا مبسطا لتسهيل وتبسيط الدراسة ، فمثلا عند دراسة تأثير الريح على الطائرة فانه يكفى أعداد نموذج للطائرة يراعى فيه شكل الطائرة فقط دون حاجة الى تعقيدات وتفصيلات فنية للطائرة ، اذ يمكن اهمال التفاصيل الاخرى وتجاهلها وبذلك يكون التبسيط قد انصب على تمثيل السمات أو الصفات او العوامل الاكثر اهمية فقط فى الواقع أما الصفات الاخرى والتى لا تتعلق مباشرة او غير مباشرة بالظاهرة فيمكن تجاهلها . والاعتبار الثانى الذى يستند عليه اعداد النموذج هو الواقعية وذلك حتى يمكن الاستفادة من النتائج التى يمكن التوصل اليها من حل النموذج ، وقد يرى البعض ان عملية التبسيط الذى ذكرناها تبعد النموذج عن الواقعية ، ولكن الفهم الصحيح للاعتبارين السابقين هو ان عملية التبسيط تهدف بالدرجة الاولى الى استبعاد أى تعقيدات غير اساسية لفهم وحل المشكلة، اى انه يجب

ان يكون النموذج كاملا بما فيه الكفاية لتقريب مظاهر الواقع التى تحت البحث فليس متوقعا ان يشتمل النموذج على كل العناصر الداخلة فى تكوين الواقع او الظاهرة وانما على عدد محدود منها يتيح لمتخذ القرار تبسيط الواقع ـ وفقا لطبيعة المشكلة ـ بشكل يضمن الحصول منها على استنتاجات سليمة تمهد الطريق لاتخاذ القرارات.

مثال : تحليل التعادل Break-even Analysis

لتحديد ماذا نعنى باصطلاح نموذج Model فاننا سنقوم فى الجزء التالى بتناول مثال يهدف الى تكوين وصياغة نموذج لتحليل التعادل . وتحليل التعادل كما هو معروف بمثابة مقياس او مؤشر للعلاقة بين الايرادات والتكاليف ، اى ان الهدف من النموذج هو تحديد نقطة التعادل Break-even Point والتى عندها تتعادل التكاليف الكلية مع الايرادات وتكون الارباح مساوية للصفر .

ان النموذج الذى سيعد لتحليل التعادل لابد وان يتضمن علاقة حجم المبيعات بالربحية اذ ان حجم المبيعات له تأثيرين متضادين على الارباح فهو من ناحية يزيد الايرادات (فى حالة زيادة المبيعات) ، ومن ناحية اخرى يزيد التكاليف الكلية لهذه الزيادة فى حجم المبيعات .

ولذلك فان التصور الاول والمبسط للنموذج الذى يصف تحليل التعادل سيكون سهلا ومبسطا ويأخذ شكل المعادلة التالية :

صافى الربح = ايرادات المبيعات ـ التكاليف الكلية

وعلى الرغم من ان هذا التصور الاولى تضمن العنصرين اللذين يشكلان نقطة التعادل وهما ايرادات المبيعات والتكاليف الكلية ، الا انه لم يتضمن صراحة

حجم المبيعات ، علما بأن هذين العنصرين واللذين يحددان صافى الربح يتأثران بحجم المبيعات . اذن يتطلب الامر تعزيز ذلك النموذج المبسط بجعله يحتوى صراحة على حجم المبيعات ويتم ذلك كالاتى :

١ – من المعروف ان ايرادات المبيعات هى عبارة عن عدد الوحدات المباعة (حجم المبيعات) مضروبا فى سعر بيع الوحدة أى :
ايرادات المبيعات = حجم المبيعات بالوحدات x سعر بيع الواحدة .

٢ – بالنسبة لعنصر التكاليف الكلية ، فالمعروف ان التكلفة الكلية تنقسم الى نوعين من التكاليف وهما التكاليف المتغيرة Variable costs والتكاليف الثابتة Fixed Costs .

والتكاليف المتغيرة هى تلك التكاليف التى يمكن تحميلها مباشرة وبصفة محددة على المنتج (العمالة ، المواد ، ... الخ) وهذه النوعية من التكاليف تتغير وفقا للتغير الذى يحدث فى حجم السلع المنتجة ، أما التكاليف الثابتة فهى بطبيعتها تكاليف غير مباشرة Indirect Costs مثل (الايجار – الاشراف ..الخ) وهى لا تتغير بتغير حجم السلع المنتجة . خلاصة ما تقدم ان التكاليف المتغيرة تتأثر بحجم المبيعات ، فى حين ان التكاليف الثابتة لا تتأثر بذلك وعلى هذا الاساس يمكن وضع العلاقة بين اجمالى التكاليف وحجم المبيعات فى صورة المعادلة التالية :

التكلفة الكلية = (عدد الوحدات المباعة) x (التكلفة المتغيرة للوحدة) + (التكلفة الثابتة)

وبالرجوع الى المعادلة الاصلية وهى :

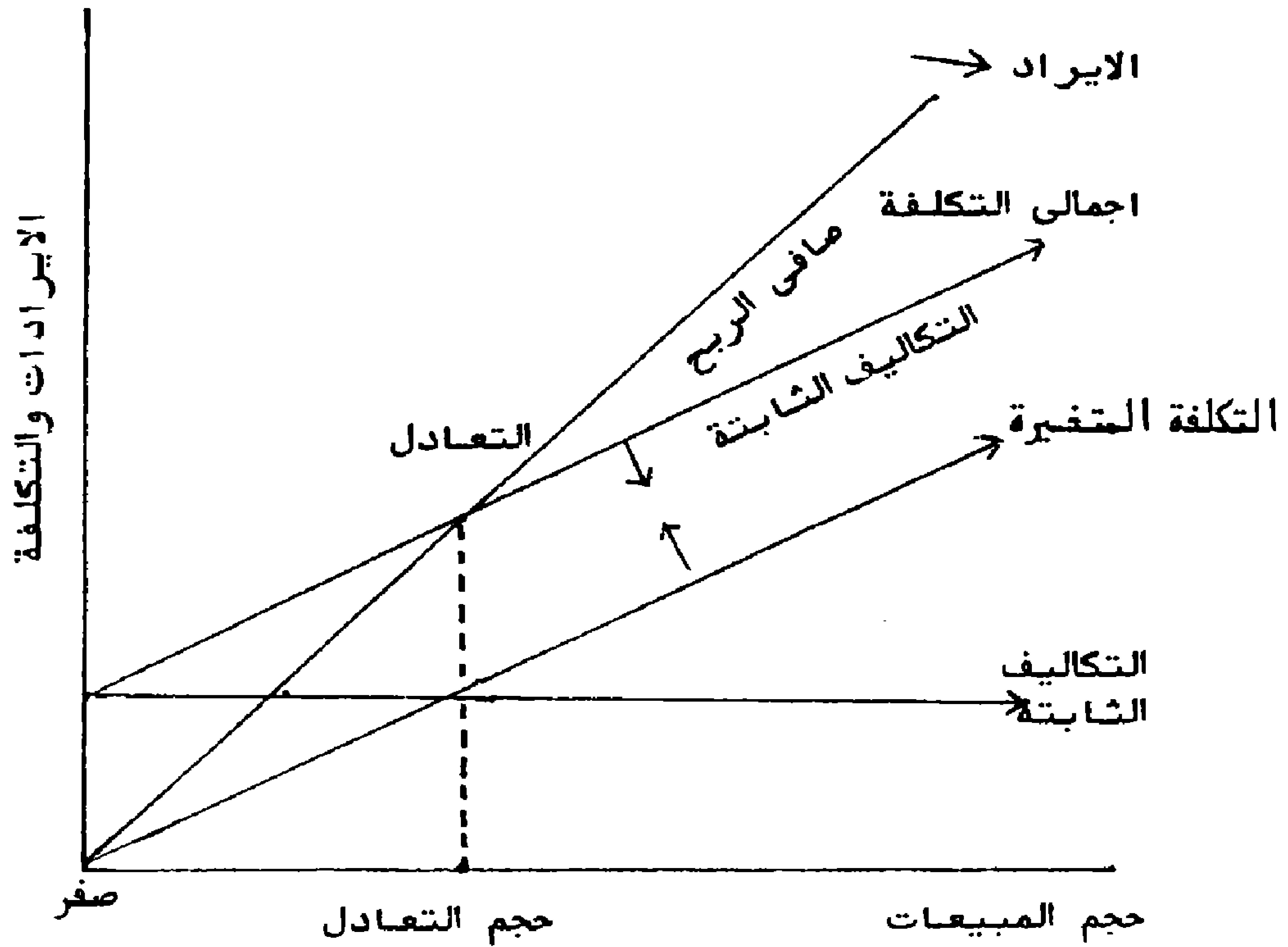
صافى الربح = (ايراد المبيعات) – (التكاليف الكلية) .

فانه يكون من الامكان بعد التوضيح السابق تحديد العلاقة بين الربح وحجم المبيعات عن طريق التعويض فى المعادلة الاصلية وذلك باستبدال كل من ايراد المبيعات والتكلفة الكلية بمعادلة كل منهما والتى تم التوصل اليها من العرض السابق ، وبذلك تكون العلاقة بين الربح وحجم المبيعات متمثلة فى المعادلة الاتية :

صافى الربح = (عدد الوحدات المباعة) x (سعر بيع الوحدة) ـ (عدد الوحدات المباعة) x (التكلفة المتغيرة للوحدة) ـ (التكاليف الثابتة) ، وحيث آن الهدف من التحليل السابق التوصل الى نموذج يحدد حجم المبيعات الذى يحقق التعادل ، فانه عادة ما يتم التعبير عن النموذج فى صورة اكثر ملائمة للتحليل من مجرد توصيف لفظى بالصورة التى تمثلها المعادلة اللفظية السابقة . ولتحقيق هذه الملاءمة فان هناك اسلوبين للتعبير عن النموذج المستهدف ، نموذج بيانى وآخر رمزى .

النموذج البيانى Graphic Model

الشكل التالى يمثل نموذجا بيانيا يهدف الى توضيح علاقة وارتباط العناصر المؤثرة فى نقطة التعادل بحجم المبيعات .



(النموذج البيانى لتحليل التعادل)

ويتضح من هذا النموذج البيانى ان التكاليف الثابتة تم تمثيلها بخط مستقيم موازى للمحور الافقى لان التغير فى حجم المبيعات يفترض انه لا يؤثر على التكاليف الثابتة ، كما ان التكاليف المتغيرة ستكون صفرا اذا لم تكن هناك مبيعات وتزداد بمعدل ثابت مع كل زيادة فى حجم المبيعات ، والمعدل الثابت للزيادة يساوى التكلفة المتغيرة للوحدة ، أما التكاليف الكلية فيتم ايجادها باضافة التكاليف الثابتة والمتغيرة لبعضهما عند كل مستوى من مستويات حجم المبيعات ، وخط التكاليف الكلية يستمر موازيا لخط التكاليف المتغيرة ويكون البعد بين هذين الخطين عند اى مستوى من مستويات حجم المبيعات مساويا للتكاليف

الثابتة ، اما خط الايرادات فانه يماثل خط التكاليف المتغيرة من حيث ان الايرادات تكون صفرا عندما لا تباع اى وحدات ، وتزداد الايرادات بمعدل ثابت (مساو لسعر بيع الوحدة) بزيادة مستوى حجم المبيعات ، الا انه يختلف فى ان خط الايرادات يزداد انحدارا عن خط التكاليف المتغيرة . وعموما فان صافى الربح عند اى مستوى معين للمبيعات يكون مساويا للفرق بين الايرادات واجمالى التكاليف ، مع ملاحظة ان الارباح لا تبدأ فى الظهور الا عندما تكون الايرادات اكبر من التكاليف .

وتقع نقطة التعادل عند تقاطع خطى التكاليف الكلية والايرادات ، اذ عند هذا التقاطع تتساوى التكاليف الكلية بالايرادات ويكون الربح صفرا . وعلى يسار هذه النقطة فان الفرق بين الايرادات واجمالى التكاليف يمثل صافى الخسائر لان التكاليف الكلية تفوق الايرادات ، اما على يمين هذه النقطة وحيث تفوق الايرادات اجمالى التكاليف فهنا يتمثل صافى الربح .

ونود ان نشير هنا الى اهمية تحويل النموذج من صورته اللفظية الى صورة بيانية ففى الحالة الاولى تكون هناك صعوبة فى حل المشكلة ، اما فى حالة المدخل البيانى فتتمثل وبسهولة كثير من الحلول البديلة عند مستويات مختلفة من المبيعات ، الا انه مع ذلك يعتبر المدخل البيانى صعب التطبيق اذا ما اريد استخدامه لعدة منتجات كل منها يمثل خطأ ، كذلك *تزداد وتتعقد صعوبة الاستعانة بهذا المدخل اذا كانت* التكلفة والسعر تتقلب فى حدود واسعة بمرور الوقت ولا تظل ثابتة كما كان ذلك مفترضا فى النموذج البيانى .

النموذج الرمزى Symbolic Model

يمكن التغلب على معظم مساوىء النموذج البيانى باستخدام النموذج الرمزى او الرياضى ويتم ذلك كالاتى :

بفرض أن :

س = سعر بيع الوحدة

م = التكلفة المتغيرة للوحدة

ث = التكلفة الثابتة

ر = صافى الربح

ع = حجم المبيعات بالوحدات

عندئذ يمكن كتابة معادلة الربح رمزيا كالاتى :

ر = ع س ــ ع م ــ ث

وهذا النموذج يعتبر صحيحا لان كل مفرداتـــه أو متغيراته سيعبر عنه فى النهاية بمقياس واحد ثابـــت وهذا المقياس هو الوحدة النقدية (جنيه مثلا) .

ان احد المزايا الهامة للنماذج الرمزية يتمكـن فى سهولة اجراء تحويرات متنوعة فى النموذج ليأخـــذ اشكالا أبسط فى التكوين،ومن ثم الحفظ والتذكر،فعلـــى سبيل المثال نلاحظ فى المعاملة السابقة ان الرمز (ع) قد تكرر مرتين فى الجانب الايسر للمعادلة،ومن ثـــم يمكن تبسيط المعادلة اذا ما اعتبرناها عاملا مشتركـــا لتأخذ الصورة التالية :

ر = ع (س ــ م) ــ ث

كما يمكن اجراء تعديل وتحوير آخر على صورة هذه المعادلة . فمن المعروف ان سعر بيع الوحدة ناقصـــا تكلفتها المتغيرة تساوى هامش ربحها ، وعليــــه اذا اعتبرنا ان الرمز (هـ) يمثل هامش ربح الوحدة،فانـــه *يمكن اعادة كتابة المعادلة السابقة بعد هذا التحويـر* لتأخذ الصورة التالية :

ر = ع هـ ــ ث

وبلا شك فان المعادلة بالصورة الاخيرة اصبحت على درجة عالية من البساطة وذلك بالمقارنة بالمعادلـــة التى اوردناها فى بداية النموذج الرمزى ، وهـــذا

يؤكد ما سبق ان ذكرناه فى ان استخدام النماذج الرمزية يحقق ميزة هامة وهى المرونة الكبيرة فى اجراء تحويرات او معالجات متتالية فى النموزج الاصلى بغرض تبسيطه .

من ناحية اخرى يجدر التنويه هنا ان مراحل بناء او تصميم النموذج ليست دائما تتم على نحو مباشر ومريح كما كان الحال فى مثال تحليل التعادل السابق، ولكن يتم عادة عند اعداد النموذج اجراء تبسيط معين، او وضع افتراضات معينة، بهدف جعل المشكلة اسهل فى تصويرها على هيئة نموذج او اسهل فى حلها ، وهاتان العمليتان (التبسيط والافتراض) قد تسهمان فى تبسيط المشكلة لتصبح متشابهة او متقاربة لبعض الحالات الاخرى التى توجد لها نموذج وحلول جاهزة هو ما يطلق عليه اصطلاح التطبيق بالتقارب او بالتناظر Application by Analogy ويعتبر مفهوم التطبيق بالتقارب او بالتناظر مفهوم هام جدا،ويستحق توضيحا اضافيا . ولتفسير هذا المفهوم نقول انه عندما قدمنا نموذج التعادل فى صورته العامة عن طريق تطبيق المعادلة (ر = ع هـ ـ ث) فاننا لم نقصد استخدام هذا النموذج على شركة بعينها او على سلعة معينة لمنشأة ما ، ولكن كان النموذج بصورته العامة صالحا للتطبيق لكافة انواع التنظيمات سواء كانت صناعية او خدمية ، وبصرف النظر عن حجمها ، وبصرف النظر عن كونها تعمل من اجل الارباح او تحقيق اهداف اخرى (فى حالة عدم سعيها لتحقيق الربح فانه يمكن احلال مسمى آخر غير الربح) .

كذلك من الضرورى ان نلاحظ ان عمليتى التبسيط والافتراضات قد لا تكون واضحة وظاهرة فى معظم الحالات وهذا لا يعنى انهما لا تؤخذان فى الاعتبار ، وانما لكونهما ممثلين ضمنا فى هيكل النموذج ، فالنموذج

الذى وضعناه لتحليل التعادل قد اشتمل ضمنا على عدة افتراضات . فقد افترضنا مثلا ان ذلك النوع من التكلفة التى لا تتأثر مباشرة بحجم الانتاج (التكلفة الثابتة) كانت حقيقة ثابتة ولا محل لتغيرها وهذا غير حقيقى فى الاجل الطويل ، كذلك افترضنا ان كلا من التكلفة المتغيرة للوحدة وكذلك سعر بيع الوحدة ثابتين وانهما فى شكل علاقة خطية مع حجم المبيعات وهذا ايضا افتراض ليس صحيحا فى جميع المواقف .

ثالثا : تحليل وحل النموذج — Analysis and Solution the Model

بعد تكوين النموذج بصورته الصحيحة ، تبدأ المرحلة الثالثة من مراحل اساليب بحوث العمليات وهى المرحلة التحليلية والتى تهدف الى وضع حل للمشكلة القرارية ، ويتم ذلك عادة عن طريق تطبيق الطرق والاساليب العلمية بدءا من الاساليب السهلة والميسرة جدا ومتدرجين الى الاصعب نسبيا ، ويستخدم علماء الادارة عديدا من هذه الاساليب ، فمنهم من يستخدم اساليب حديثة مثل البرمجة الخطية او شبكات الاعمال او نظرية الصفوف او نظرية المباريات ، ومنهم من يستخدم اساليب اولية مثل حساب التفاضل ، وعموما فمن خلال اساليب التحليل المختلفة يمكن التوصل الى حل المشكلة .

رابعا : تنفيذ الحل — Implementation of the Solution

بعدالتوصل الى الحل الامثل للمشكلة القرارية فان الامر يتطلب ان يوضع هذا الحل موضع التطبيق والتنفيذ على المشكلة الفعلية . وعادة يحتاج تطبيق الحل الى برامج على الحاسب الالى حيث ان معظم المشاكل التى تواجه الادارة تكون كثيرة المتغيرات وتتطلب عمليات حسابية واحصائية يصعب التعامل معها يدويا ولذلك ففى كثير من الحالات يكون استخدام الحاسب الالى لازما وضروريا .

الفصل الأول

* البرامج الخطية
* صياغة المشكلة والحل البياني

مقدمة

تعتبر مشكلة توزيع الموارد المحدودة على الاستخدامات المتعددة من المشاكل التى تعترض كل فرد منا حتى على مجرد حياته اليومية ، فالطالب يواجه بهذه المشكلة مثلا عند توزيع ما لديه من وقت متاح بين الاستذكار ، والنوم ، وتناول الطعام ، ومجالات الاستجمام الاخرى ، كذلك فان الغالبية العظمى من الافراد لديهم امكانيات مالية محدودة ومن ثم فانهم يواجهون بمشكلة ضرورة استخدام هذه الاموال احسن استخدام .

وتعتبر مشكلة توزيع الموارد بين الاستخدامات المختلفة البديلة من اهم المشاكل التى تواجه المديرين فى جميع انواع التنظيمات - فهم يواجهون بمشكلة هامة وهى الكيفية التى يتم بها توزيع الطاقات الانتاجية المتاحة على مختلف نوعيات المنتجات التى تقرر انتاجها - كذلك الكيفية التى يتم بها توزيع ميزانية الاعلان على مختلف وسائل الاعلان من صحافة ، ومجلات ، واذاعة ، وتليفزيون .. الخ ، بحيث يتحقق الاستخدام الامثل لهذه الميزانية ، الى آخر تلك المشاكل التى دائما ما تواجه المدير وتتطلب منه ان يختار من بين عدة بدائل .

واسلوب البرمجة الخطية يعتبر من اهم الاساليب التى تساعد الادارة فى حل مشاكل التخصيص ، خاصة اذا علمنا ان مشكلة تخصيص الموارد المحدودة تعتبر نقطة الارتكاز الاساسية التى يدور حولها العمل الادارى فى المنظمات الحديثة ، سواء كانت منظمات صناعية أو خدمية كذلك يواجه المدير فى المنظمات الحكومية والاجهزة الادارية المختلفة بذات المشكلة .

تعريف البرمجة الخطية

يعرف البعض[١] البرمجة الخطية بأنها " اسلوب رياضي لحل مشاكل استغلال الموارد والامكانيات المحدودة بطريقة تحقق للمشروع اقصى ارباح ممكنة ، أو تحمله اقل تكلفة ممكنة " .

كما يعرفها كاتب آخر[٢] بأنها " اداة مفيدة حينما يكون هناك عدة متغيرات تؤثر على تحقيق الهدف المرجو ، بحيث تصبح المشكلة هى عشكلة اختيار احسن التوافيق الخاصة بقيم هذه المتغيرات ، وكما يدل الاسم فان العلاقة بين كل متغير من هذه المتغيرات من ناحية والهدف المطلوب تحقيقه من ناحية أخرى يجب أن تكون خطية " .

كذلك يعرفها بعض الاقتصاديين[٣] بأنها " طريقة رياضية لتخصيص مجموعة من الموارد والامكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ، بينما تكون جميع القرارات متشابكة لانها تقع جميعا تحت مجموعة من القيود والحدود الثابتة "

كذلك يعرفها هاربر[٤] Harper بأنها " اصطلاح يشمل مجال واسع من الاساليب الرياضية التى تهدف الى تحقيق اداء امثل فى حدود الامكانيات المتاحة ".

---

(١) د. سمير بهباوى ، د. محمد صبرى العطار ، بحوث العمليات فى المحاسبة ، مكتبة الانجلو المصرية ، القاهرة ، ١٩٧٩ ، ص ٤٧ .

(٢) د. حنفى محمود سليمان ، المنهج المتكامل فى الادارة ، دار الجامعات المصرية ، الاسكندرية ، ١٩٧٩ ، ص ١٤٧ .

(٣) Cole,D., The theory of linear Economis Models, McGraw Hill Book Co., Inc., London. 1969, p. 3.

(٤) Harper, W.M., Operational Research, Macdonald and Evans, London, 1975, p. 192 .

كذلك يعرفها ماكور[١] Makower بأنها " الطريقة التى يتم بها تقرير كيفية مقابلة الاهداف المأمولة كتخفيض التكاليف او تعظيم الارباح فى ظل مجموعة من الثوابت تمثل كمية الموارد المتاحة " .

ويتضح من التعاريف السابقة ان "البرمجة الخطية هى ذلك الاسلوب الرياضى الذى يهدف الى ايجاد أحسن استخدام للموارد المحدودة وفقا لمعيار افضلية معين ".

الشروط الواجب توافرها لتطبيق اسلوب البرمجة الخطية

من خلال الاستعراض السابق لمفهوم البرمجة الخطية وتعريفاتها يمكن ان نقف على حقيقة ان هناك شروطا معينة يتعين ان تتوافر فى المشكلة التى يراد حلها باستخدام اسلوب البرمجة الخطية بحيث اذا افتقدت المشكلة احدى تلك الشروط فيكون من غير المجدى استخدام هذا الاسلوب بل يتعين البحث عن اسلوب آخر للتعامل مع تلك النوعية من المشاكل ، وهذه الشروط هى :

أولا : وجود هدف يراد تحقيقه

لكل منشأة هدف تسعى لتحقيقه ، وعادة ما يكون هذا الهدف مطلوب زيادته وتعظيمه الى اقصى حد ممكن(مثل الارباح ، العمالة ، التدفق النقدى الداخل ، الفاعلية الكفاءة .. الخ) ، او مطلوب تخفيضه الى ادنى حد ممكن (مثل التكاليف ، وقت الانتهاء من التنفيذ ، الاسراف ، المسافة المقطوعة ، .... الخ ، وبطبيعة الحال عندما تواجه المشروع مشكلة ما فانها

---

(١) Makower, M.S., Operational Research, Haddevand Stangton, London, 1977, p. 156 .

تندرج تحت الهدفين السابقين ، ويكون مطلوبا التوصل الى حل لهذه المشكلة يعمل على تعظيم الهدف أو تدنيته حسب الاحوال ، الا انه يتعين ان يكون واضحا أن مجرد وجود هدف يراد تحقيقه من حل المشكلة لا يفي بالشرط الاول لتطبيق اسلوب البرمجة الخطية ، اذ يلزم ان يكون فى مقدرتنا التعبير عن هذا الهدف فى صورة كمية قابلة للقياس الرقمي وليس هدفا لفظيا وصفيا فبحوث العمليات ترتكز على الاساليب الرياضية الرقمية مما لا يصلح معها التوصيف اللفظى واللغوى للهدف المطلوب تحقيقه .

ثانيا : وجود خطط بديلة ممكنة للوصول الى الهدف

يتعين ان يكون للمشكلة المراد حلها باستخدام اسلوب البرمجة الخطية عدد من الخطط البديلة الممكنة التى يمكن ان تصلح او تسهم فى تحقيق الهدف الموضوع وعلى ذلك فان الشرط الثانى يتلخص فى مدى امكانية وضع عدد من الخطط البديلة لتحقيق الهدف المنشود ، وبشرط ان تكون تلك الخطط البديلة قابلة للتعبير عنها وقياسها كميا ، وان يكون هناك ارتباطا فيما بينها ، وبطبيعة الحال عندما يوجد للمشكلة عدة بدائل فانه بالتالى سيكون لكل بديل من هذه البدائل قدرة معينة على تحقيق الهدف الموضوع ، ومن ثم تصبح المشكلة امام متخذ القرار هى اختيار ذلك البديل الاكثر كفاءة وفاعلية ومساهمة فى تحقيق الهدف الى اقصى مدى ، ومن ثم يصبح هو ذلك الحل الامثل الذى نبحث عنه ، وتأسيسا على ما تقدم فانه لامبرر لاستخدام اسلوب البرمجة الخطية اذا لم يكن امام الادارة فى معالجة مشكلة ما سوى حل واحد فقط ولا يوجد امامها بدائل يمكن ان تكون حلولا ممكنة لهذه المشكلة ، لانه فى هذه الحالة يصبح هذا الحل الوحيد هو الحل الحتمى المفروض الاخذ به من جانب متخذ القرار .

ثالثا : وجود قيود على عملية الاختيار من بين البدائل والخطط المتاحة :

ونعنى بذلك ان هناك نهايات محددة تحد من الانطلاق الى ما لا نهاية فى تحقيق الهدف المنشود ، فاذا كان الهدف المراد تحقيقة تحقيق اقصى ربح ممكن فان ذلك ليس معناه تحقيق ما لا نهاية من الارباح ، لان ذلك يتطلب ان تكون الادوات المطلوبة لاحداث وتحقيق هذا الربح لا نهائية وغير محدودة ، وهذا غير حقيقى فأى منشأة مهما كان نوعها تملك من الموارد المختلفة بقدر معين ومحدود ، فمثلا قد يكون هناك حد اقصى لما يمكن للادارة الحصول عليه من مادة معينة ، أو طاقة آلية معينة ، او رأس مال معين ، او قد يكون هناك حد اقصى للطاقة الاستيعابية للسوق بالنسبة لنوعية معينة من السلع .. وهكذا ، وهذا كله يعنى ان يتم تحقيق الهدف المنشود فى اطار القيود المفروضة على البدائل المتاحة امام الادارة ، والحقيقة انه لو كانت المشكلة التى نعالجها لا توجد عليها قيود مفروضة على تحقيق الهدف وان الموارد متوفرة بالقدر المطلوب وكافة الظروف المختلفة متاحة لما كانت هناك مشكلة تحتاج الى حل ولما كانت هناك حاجة الى الاتجاه الى البرمجة الخطية او غيرها من اساليب حل مشاكل الادارة.

خلاصة القول ان الموارد المتاحة للمنشأة متوفرة بكمية معينة ومن ثم فان الحد الاقصى لما هو متوفر من اى من تلك الموارد فى فترة زمنية معينة يمثل قيدا لابد من اخذه فى الاعتبار عند وضع الحلول البديلة .

والقيود نوعان اولهما ما اشرنا اليه فى السطور السابقة وهو ما يمكن ان نطلق عليه القيود المباشرة على البدائل نفسها والتى ذكرنا منها على سبيل المثال الحد الاقصى لما يمكن للادارة الحصول عليه من مادة

معينة ، او طاقة آلية ، او ساعات عمل ، او طاقة استيعابية للسوق ... الخ .

اما النوع الثانى من القيود فهو ذلك النوع الذى يخلق الارتباط بين البدائل ، ومثال ذلك اذا كان هناك نوعان من السلع تصنعان من نفس المادة الخام ، فان هذا القيد يخلق نوعا من الارتباط بين هاتين السلعتين لان اى زيادة فى الكمية المنتجة من السلعة الاولى سيؤدى بالتبعية الى تخفيض عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية وذلك فى ظل النوعية الاولى من القيود التى تخلق قيدا مباشرا على البدائل نفسها .

رابعا : ان تكون المتغيرات ذات علاقة خطية مستقيمة :

ويعنى ذلك الشرط انه ينبغى ان تكون المشكلة المراد حلها باسلوب البرمجة الخطية يمكن التعبير عن هدفها وقيودها فى صورة معادلات او متباينات خطية ، وتعتبر العلاقة خطية بين ظاهرتين اذا كان تغيرا ما فى قيمة الظاهرة الاولى قيمته الوحدة الواحدة يؤدى الى تغيير فى قيمة الظاهرة الثانية ولكن بمقدار ثابت ، ويوضح المثال التالى فكرة العلاقة الخطية بين ظاهرتين الاولى تمثل متغير مستقل والثانية تمثل متغير تابع .

قيمة الظاهرة الاولى	مقدار التغير فى الظاهرة الاولى	قيمة الظاهرة الثانية	مقدار التغير فى الظاهرة الثانية
صفر	–	٥	–
١	١	١٠	٥
٢	١	١٥	٥
٣	١	٢٠	٥
٤	١	٢٥	٥
٥	١	٣٠	٥

استخدام المدخل البياني للبرمجة الخطية في معالجة المشاكل الادارية :

سبق ان ذكرنا ان البرمجة الخطية تعالج مشكلة تخصيص الموارد فى ضوء الامكانيات المتاحة طبقا للاهداف المحددة والتى تتمثل فى تحقيق اقصى ربح ممكن (مشاكل تعظيم الارباح)، أو بالوصول بالتكاليف الى ادنى حد ممكن (مشاكل تخفيض التكلفة) لذا سنعالج فى الجزء التالى كلا النوعين من المشاكل وكيف يتم التعامل معها من خلال المدخل البيانى الذى يعتبر ابسط واسهل طرق واساليب البرمجة الخطية .

مشاكل تعظيم الارباح Maximization Problems

سنناقش فى هذا الجزء النوعية الاولى من المشاكل التى يتم التعامل معها بالمدخل البيانى للبرمجة الخطية وهى مشاكل التعظيم ، ويجب ان يكون مفهوما لدينا جيدا من البداية ان المفهوم الوحيد المختلف بين مشاكل التعظيم ومشاكل التخفيض هو اننا نقوم بتعظيم الهدف فى الحالة الاولى اى الوصول به الى اقصى حد ممكن . فى حين نقوم بتخفيض الهدف فى الحالة الثانية اى الوصول به الى ادنى حد ممكن .

ولتوضيح كيفية حل مشاكل تعظيم الارباح باستخدام الطريقة البيانية للبرمجة الخطية سنسوق المثال المبسط التالى والذى يصف مشكلة المزيج الانتاجى لاحدى الشركات التى تهدف الى تعظيم ارباحها .

وصف المشكلة Problem Description

تقوم شركة القاهرة للصناعات الهندسية بانتاج السلع الهندسية المنزلية سهلة الاستخدام ، وقد تمكنت من خلال تجاربها وابحاثها ان تتوصل الى تصميم نموذجين من سلعة معينة للاستخدام المنزلى يمتازان برخص اثمانها ، وهى تفكر حاليا فى انتاج هذه النماذج . ولقد واجه مدير تخطيط ومراقبة الانتاج بمشكلة تحديد كمية الانتاج من كل من هذين النموذجين فى ضوء الطاقة المحددة للمصنع ولهذا الغرض فقد تم تجميع البيانات التالية :

- هامش الربح للنموذج الاول ($س_1$) يبلغ ٧ جنيهات ، وهامش ربح الوحدة من النموذج الثانى ($س_2$) يبلغ ١٠ جنيهات .

- يمر كلا النموذجين على مراكز انتاجية متشابهة وان اختلفت احتياجات كل نموذج من طاقة هذه المراكز ، فالنموذج ($س_1$) يحتاج الى ثلاث ساعات من قسم التصنيع ، وساعتين من قسم التجميع ، اما النموذج الثانى فانه يحتاج الى ساعتين من قسم التصنيع واربع ساعات من قسم التجميع ، وقد توقع مسئول قسم التصنيع أنه سيكون لديه طاقة متاحة مقدارها ٣٦ ساعة للاسبوع المقبل وكذلك ٤٠ ساعة للاسبوع المقبل بقسم التجميع .

- يحتاج النموذج الاول الى وحدة واحدة من رقائق الخشب لانتاج سلعة واحدة من هذا النموذج ، وقد تبين ان مورد هذه الرقائق لديه مشكلة انتاجية وهو غير قادر الا على توريد (١٠ وحدات) من هذه الرقائق وذلك للاسبوع القادم .

من خلال المعلومات السابقة فان مدير تخطيط ومراقبة الانتاج يريد تحديد كمية الانتاج من كل من النموذجين للاسبوع القادم والتى تعمل على تحقيق هدف اقصى ربح ممكن .

خطوات الحل باستخدام الطريقة البيانية

لتسهيل فهم طريقة الحل باستخدام الاسلوب البيانى فاننا سنعرض للخطوات المتتالية لذلك الاسلوب ، ولكن قبل ان نسترسل فى شرح هذه الخطوات سنضع المشكلة فى مثالنا السابق على الصورة التالية ليسهل ادراكها بسرعة .

النموذج	هامش الربح	قسم التصنيع	قسم التجميع	رقائق الخشب
$س_1$	٧ جنيه	٣ ساعة	٢ ساعة	وحدة واحدة
$س_2$	١٠ جنيه	٢ ساعة	٤ ساعة	ــــــ
الطاقة المتاحة		٣٦ ساعة	٤٠ ساعة	١٠وحدات

لحل هذه المشكلة بالطريقة المتاحة يتعين السير فى خطوات الحل التالية :

الخطوة الاولى : صياغة المشكلة Formulating the Problem

ونعنى بذلك اعداد الصياغة الرياضية للمشكلة أى تحويل المشكلة من صورتها الوصفية التى ظهرت بها بالشكل السابق الى شكل صياغة رياضية تشتمل على عدد من المعادلات والمتباينات حتى يمكن استخدام المدخل البيانى فى التعامل مع المشكلة ، فالمطلوب تحديد الهدف والتعبير عنه فى صورة كمية اى معادلة رياضية او دالة رياضية ، وتحديد القيود والتعبير عنها فى شكل معادلات ومتباينات ، حينئذ يمكن استخدام الاسلوب الكمى الرياضى فى التعامل مع المشكلة،ولعل هذا تأكيد لما سبق قوله من ان عملية بناء النماذج الرياضية هى عصب بحوث العمليات .

وتتكون الصياغة الرياضية للمشكلة من العناصر الاساسية الاتية :

١- وضع او صياغة دالة الهدف Stating the objective Function

الخطوة الاولى فى صياغة المشكلة هى تحديد الهدف Specify the objective الذى سيتم استخدامه كمقياس أو مؤشر لتقييم الحلول البديلة الممكنة ، فالخطة التى سيعدها مدير تخطيط ومراقبة الانتاج سيتم تقييمها من جانب الادارة العليا على أساس مدى مساهمتها فى الوصول بالارباح الى حدها الاقصى • وحيث ان الهدف هو تعظيم اجمالى المساهمة فى الارباح ، لذلك فاننا نحتاج الى تحديد مساهمة كل متغيرقرارى Decision Variables من اجمالى المساهمة فى الارباح (المتغيرات القرارية هى الممثلة للمشكلة موضوع الحل اى فى مثالنا هذا هى *عدد الوحدات من كل نموذج والتى سيتم اختيار* انتاجها) ، والمعادلة التى تحدد الهدف فى صورة المتغيرات القرارية تسمى دالة الهدف ، وفى حالة مثالنا الذى **نحن** بصدده يمكن كتابة دالة الهدف بالشكل التالى :

اجمالى المساهمة = (مساهمة النموذج الاول)+(مساهمة النموذج الثانى) وحيث ان اجمالى المساهمة (در) لكلا النموذجين يساوى مساهمة الوحدة الواحدة من كل منهما فى الربح مضروبا فى عدد وحدات كل نموذج • وعليه فان دالة الهدف تصاغ كالاتى :

$$د\ (ر) = ٧\ س_١ + ١٠\ س_٢$$

او تعظيم $٧ س_١ + ١٠ س_٢$

كما يمكن كتابتها بشكل آخر كالاتى

د (ر) = $٧\ س_١ + ١٠\ س_٢$ اقصى ارباح ممكنة

٢- وضع اوصياغة القيود Stating the constraints

قبل الدخول فى خطوة صياغة القيود قد يكون من *المفيد أولا تحديد أو تعيين قيود الموارد Determining* The Resource Constraints ، فمن التوصيف السابق للمشكلة تبين ان هناك ثلاثة انواع من قيود الموارد هى الطاقة الالية المتاحة بقسم التصنيع ، والطاقة

المتاحة بقسم التجميع ، وعدد الوحدات التي يمكن الحصول عليها من رقائق الخشب ، لذلك سنجد ثلاثة قيود على متخذ القرار كل قيد منها يمثل موردا محددا .

وبعد التعرف على قيود الموارد نكون بحاجة الى التعبير عن كل منها في صورة رياضية ، وهذا يعنى اننا نريد ان نربط بين استخدام الموارد المحدودة والمتاح منها فى صورة معادلة او متباينة رياضية وسيتم ذلك على النحو التالى :

أ- القيد الاول فى مثالنا هذا سيتعلق بطاقة قسم التصنيع ، وينبغى ان تكون طاقة التصنيع التى نحتاجها لانتاج $س_1$ ، $س_2$ ليست اكثر من المتاح منها اى أن :

{ طاقة التصنيع التى تستخدم فى انتاج $س_1$ } + {طاقة التصنيع التى تستخدم فى انتاج $س_2$ } ≥ (طاقة التصنيع المتاحة)

ويلاحظ ان العلامة ≥ تشير الى ان الطرف الايمن قد يساوى او يقل عن الطرف الايسر وحيث ان طاقة قسم التصنيع معبرا عنها بعدد الساعات هى ٣٦ ساعة اسبوعيا ، وان احتياجات الوحدة الواحدة من النموذج الاول هو ٣ ساعات من قسم التصنيع ، كما ان احتياج الوحدة الواحدة من النموذج الثانى هو ٢ ساعة من نفس القسم ، لذلك يمكن صياغة القيد الاول الخاص بقسم التصنيع فى صورة رياضية كالاتى :

٣ $س_1$ + $س_2$ ≥ ٣٦

ب- وبنفس الطريقة يمكن ان نربط بين استخدام طاقة قسم التجميع والطاقة المتاحة به كالاتى :

{طاقة قسم التجميع المستخدمة فى انتاج $س_1$ } + {طاقة قسم التجميع المستخدمة فى انتاج $س_2$ } ≥ (طاقة قسم التجميع المتاحة)

أو بصورة رياضية :

$$٢ س_١ + ٤ س_٢ \geqslant ٤٠$$

ج ـ اما القيد الثالث والخاص بالعدد المحدد من رقائق الخشب المتاحة ، فنلاحظ ان رقائق الخشب تستخدم فقط فى انتاج النموذج الاول ، وان النموذج الثانى من المنتجات لا يرتبط بهذا القيد ، أى ان هذا القيد يمكن كتابته بصورة وصفية كالاتى :

{ عدد وحدات رقائق الخشب المطلوبة لانتاج س$_١$ } $\geqslant$ { عدد رقائق الخشب المتاحة }

او بصورة رياضية =

$$س_١ \geqslant ١٠$$

د ـ من ناحية اخرى فانه يتعين وفقا للمنطق ان يكون الانتاج فى كميات غير سالبة وهذا المنطق والمفهوم يقودنا الى نوع آخر من القيود يطلق عليه شرط عدم السلبية Non-negativity Condition وهو القيد الخاص بتحديد المتغيرات القرارية فى كميات غير سالبة Non-Negative quantities بل يمكن ان تكون فى كميات موجبه او صفرية ويتم التعبير عنه بالصورة الاتية :

$$س_١ \leqslant صفر$$
$$س_٢ \leqslant صفر$$

وتلخيصا لما تقدم فان الصياغة الرياضية لمشكلة شركة القاهرة للصناعات الهندسية ستأخذ الصورة النهائية الاتية :

تعظيم د (ر) $= ٧ س_١ + ١٠ س_٢$

بشرط ان :

$$٣ س_١ + ٢ س_٢ \geqslant ٣٦$$
$$٢ س_١ + ٤ س_٢ \geqslant ٤٠$$

$س_1 \geqslant ١٠$

$س_1 \leq$ صفر

$س_2 \leq$ صفر

الخطوة الثانية : تحويل متباينات القيود الى معادلات :

حيث ان القيود التى وردت فى الصياغة الرياضية للمشكلة ليست معادلات تماما لانها (اقل من أو يساوى) اى انها متباينات لذلك لا يمكن تمثيلها على الرسم البيانى الا بعد تحويلها لتأخذ شكل معادلات (=) ، ويتم ذلك عن طريق الاستبعاد المؤقت للاشارة (اقل من) اى انه يتم تحويل متباينات القيود الى معادلات عن طريق الاهمال المؤقت للاشارة (اقل من) ، ويلاحظ أن هذا لا يعتبر اخلالا بالاساس الرياضى المنطقى للرياضيات لان هذا الاستبعاد سيكون مؤقتا بمعنى انه بعد التمثيل البيانى لمعادلات القيود بالرسم سوف نسترد الاشارة التى استبعدناها وذلك بان نحدد فى اى جهة من هذا الخط سيكون الحل ممكنا وفى اى جهة يكون الحل غير ممكن .

وبتطبيق هذه الخطوة على متباينات القيود (اى اهمال واستبعاد الاشارة التى تحول تساوى طرفى القيد) ينتج لدينا المعادلات الاتية :

$٣ س_1 + ٢ س_2 = ٣٦$ (معادلة التصنيع)

$٢ س_1 + ٤ س_2 = ٤٠$ (معادلة التجميع)

$س_1 = ١٠$ (معادلة رقائق الخشب)

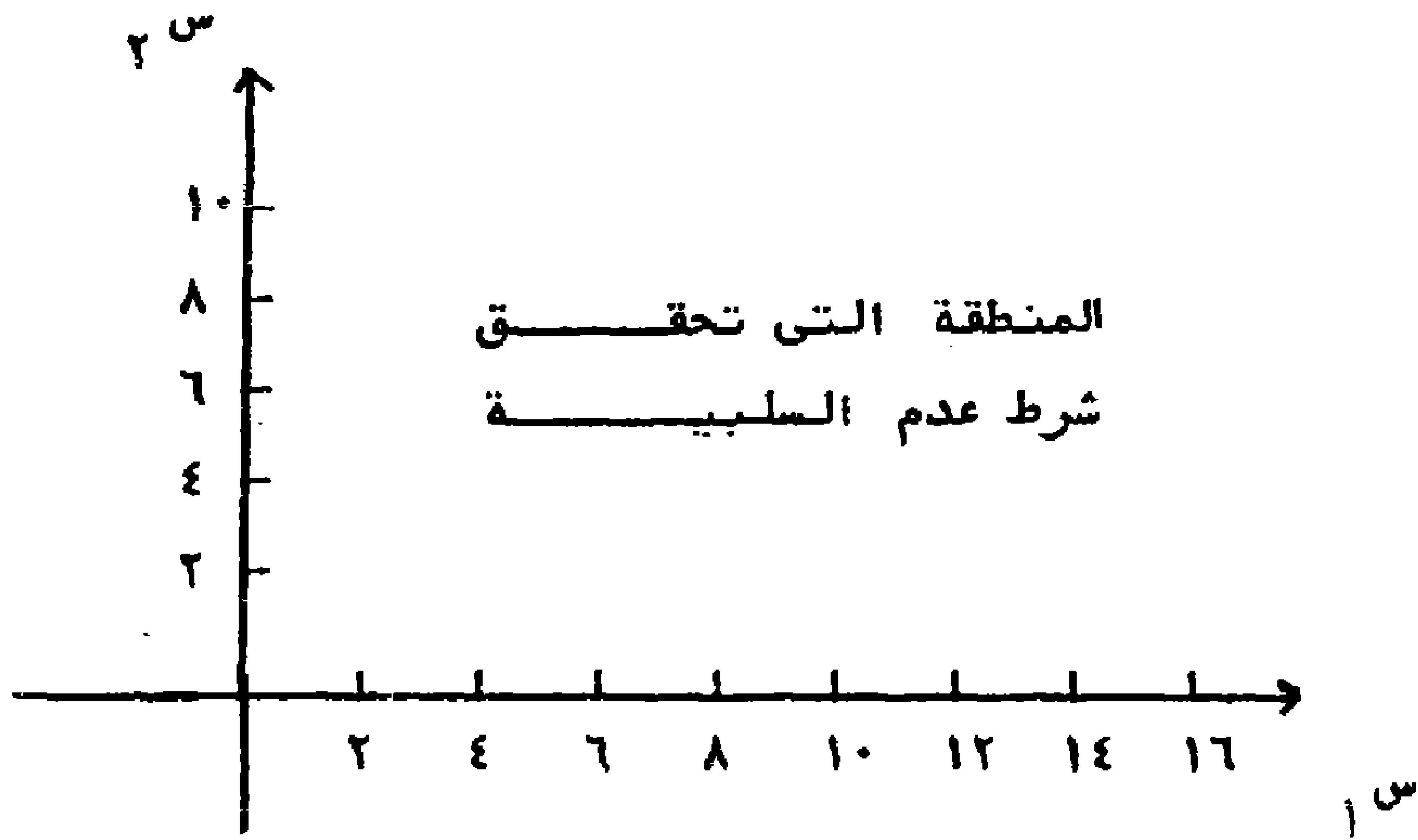
ولكن قد يثار تساؤل ولماذا لم يتم معاملة شرط عدم السلبية ($س_1$ ، $س_2 \leq$ صفر) نفس المعاملة وتحويلها الى معادلات ؟ للاجابة على ذلك نقول أن هذين القيدين يمثلان مفهوم انه لا يمكن انتاج قيمة سالبة من اى من النموذجين $س_1$ ، $س_2$ ويمكن

تمثيلهما بيانيا دون الحاجة الى تحويلهما الى معادلات وذلك كالاتى :

أ - اذا فرضنا ان المحور الافقى فى الرسم البيانى يمثل النموذج $س_١$ ، فانه يمكن القول ان جميع النقاط الواقعة على خط المحور الرأسى يمثل قيما صفرية للمتغير $س_١$ ، وجميع النقاط الواقعة على يمينه تمثل قيما موجبه لهذا المتغير اى ان جميع النقاط الواقعة على خط المحور الرأسى وعلى يمينه يكون فيها المتغير القرارى $س_١ \geqslant$ صفر . وعليه فان اختيار ان يكون الرسم البيانى على يمين المحور الرأسى ما هو الا تمثيل بيانى للقيد $س_١ \geqslant$ صفر .

ب - بنفس التحليل السابق ، فان اى نقطة تقع على خط المحور الافقى تكون فيها قيمة $س_٢$ = صفر ، وان أى نقطة تعلو هذا الخط تمثل كميات موجبة من $س_٢$ ، أى ان جميع النقاط الواقعة على المحور الافقى أو تعلوه تكون فيها قيمة $س_٢ \geqslant$ صفر ، وعليه فان اختيار أن يكون الرسم البيانى أعلى المحور الافقى ما هو الاتمثيل بيانى للقيد $س_٢ \geqslant$ صفر .

جـ - وحيث ان المثال الذى نحن بصدد حله الان يتضمن فى صياغته شرطا لعدم سلبية كل من المتغيرات القرارية اى ان $س_١ \geqslant$ صفر ، $س_٢ \geqslant$ صفر . اذن المنطقة التى تكون فيها قيمة كل من المتغيرات القرارية $\geqslant$ صفر هى المنطقة المحصورة بين المحور الافقى ($س_١$) ، والمحور الرأسى ($س_٢$) فى الجزء الشمالى الشرقى ، وهى المنطقة الوحيدة فى الشكل كله التى يكون فيها كلا المتغيرين القرارين $\geqslant$ صفر ، كما يظهر ذلك فى الشكل التالى :



الخطوة الثالثة : التمثيل البيانى لمعادلات القيود :

بعد تحديد المنطقة التى سيتم تمثيل معادلات المشكلة فيها أى رسمها بيانيا فى صورة خط مستقيم يمثل كل معادلة منها ، وحيث ان الخط المستقيم يمكن تحديده تماما بمعرفة اى نقطتان تقعان عليه ، لذلك فانه لرسم معادلة اى قيد نكون بحاجة الى تحديد نقطتان فقط على هذا الخط وعن طريق توصيلها يتم رسم الخط المستقيم . ويمكن ايجاد هاتين النقطتين بسهولة عن طريق اختيار اى قيمة لاحد المتغيرين **وبالتعويض** عنها فى معادلة القيد نحصل على قيمة المتغير الاخر ، ويمكن تكرار ذلك بقيم مختلفة لنحصل على النقطة الثانية . ويمكن تبسيط عملية التعويض وتحديد احداثيات النقطة عن طريق اختيار ان تكون قيمة أحد المتغيرين = صفر ثم التعويض فى المعادلة لنحصل على قيمة المتغير الاخر . وبتكرار تلك الخطوة ولكن للمتغير الاخر الذى سنختار له قيمة صفر ونعوض فى ذات المعادلة لنحصل على قيمة المتغير الاول .

فمثلا يمكن توضيح ما سبق ذكره بالتطبيق المباشر على

معادلة قسم التصنيع وهى :

$$٣ س_١ + ٢ س_٢ = ٣٦$$

بفرض ان $س_١$ = صفر وبالتعويض فى المعادلة

$$\therefore ٣ \times صفر + ٢ س_٢ = ٣٦$$

$$٢ س_٢ = ٣٦$$

$$س_٢ = ١٨$$

$\therefore$ النقطة الاولى هى $س_١$ = صفر ، $س_٢$ = ١٨ (صفر، ١٨)

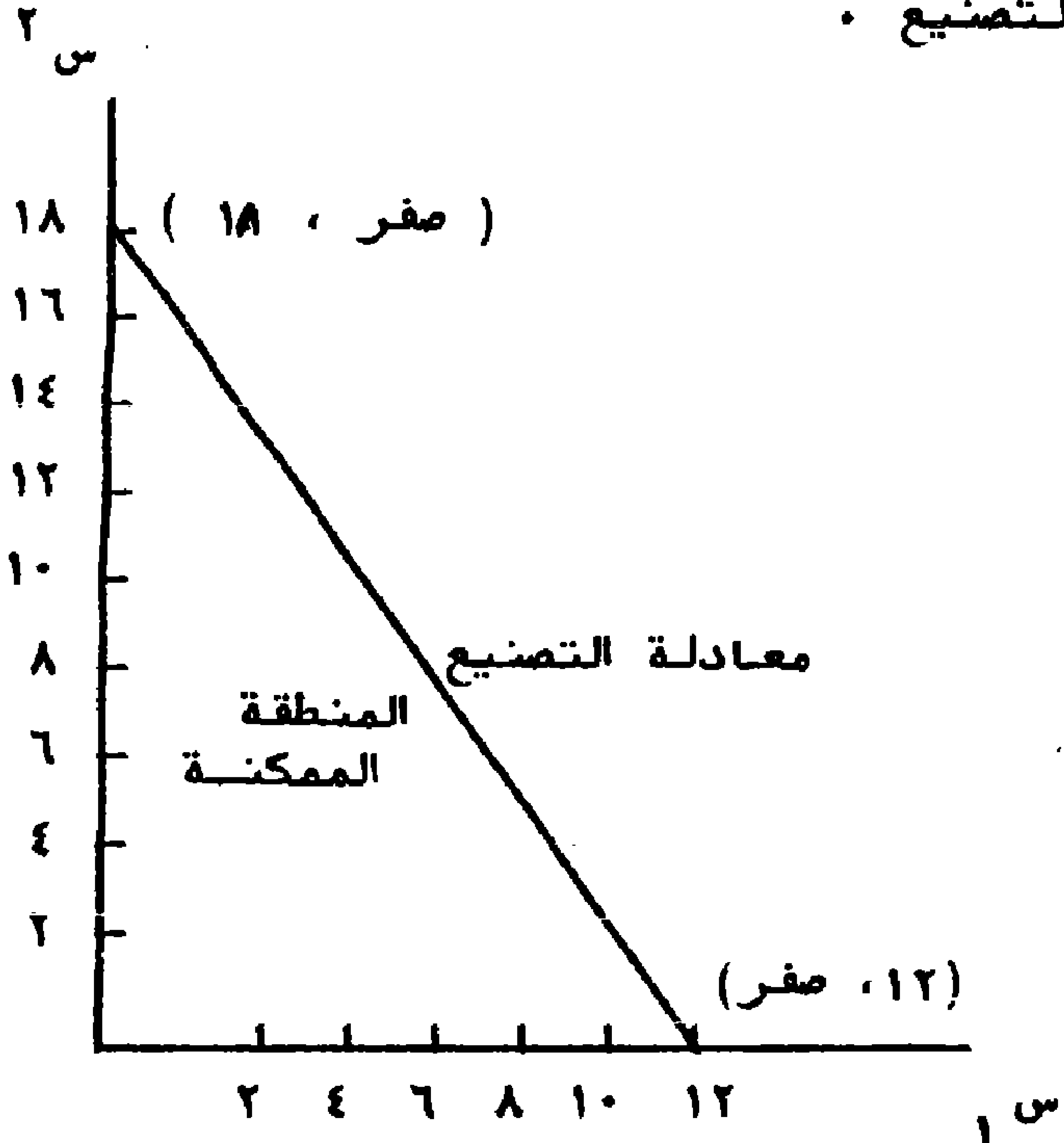
وبفرض ان $س_٢$ = صفر وبالتعويض فى المعادلة

$\therefore$ $٣ س_١ + ٢ \times صفر = ٣٦$ $\quad$ $٣ س_١ = ٣٦$

$$س_١ = ١٢$$

$\therefore$ النقطة الثانية هى $س_١$ = ١٢ ، $س_٢$ = صفر(١٢،صفر)

اى ان الخط الواصل بين النقطتين (صفر ، ١٨)،(١٢، صفر) تمثل المعادلة الخاصة بقيد قسم التصنيع ، والشكل التالى يوضح المنطقة الممكنة بعد رسم خط معادلة قسم التصنيع .

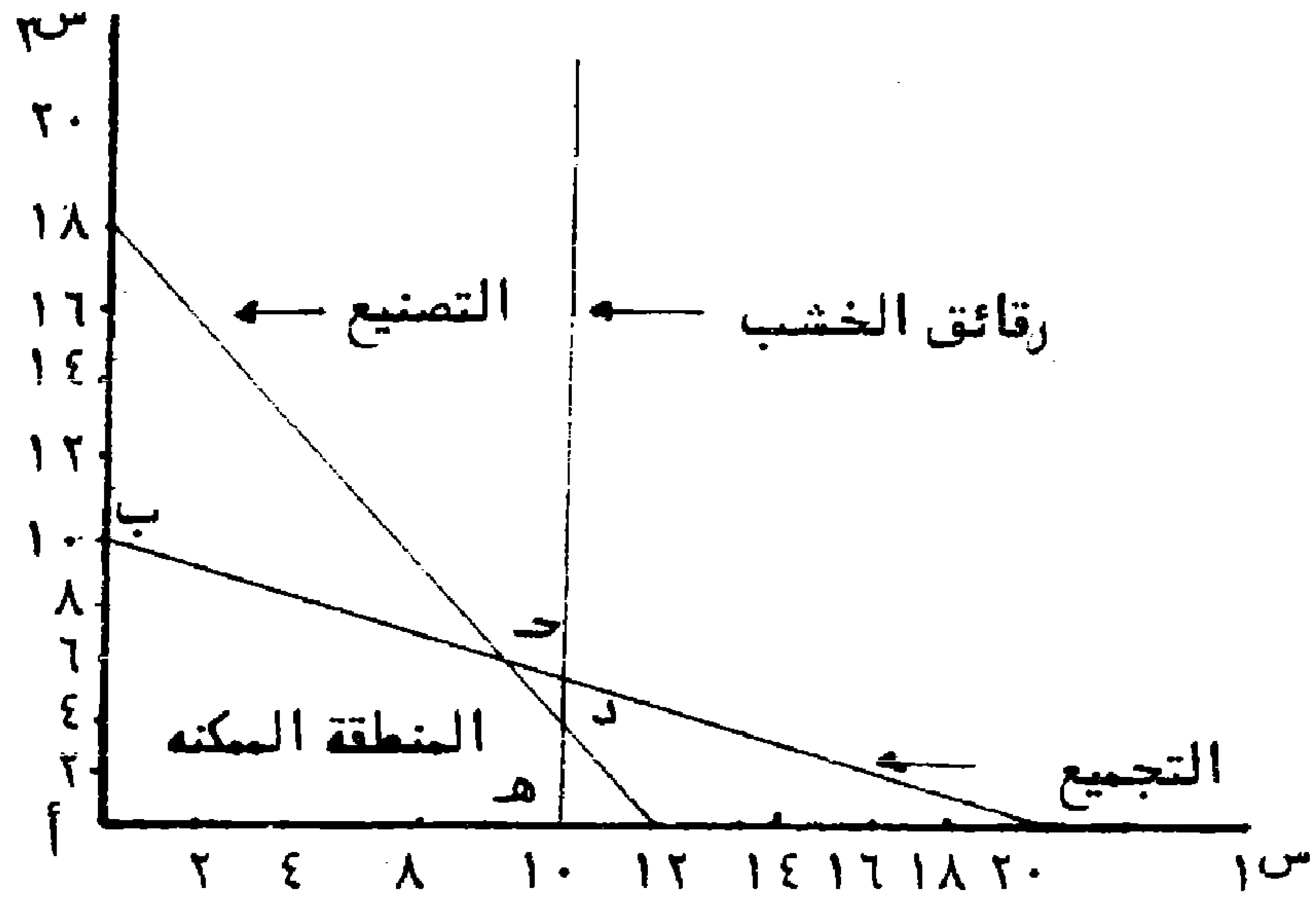


اى ان اى نقطة تقع على المستقيم الممثل لمعادلة التصنيع تساوى ٣٦ ، ولكن الاصل ان تلك المعادلة كانت قيد (اقل من او يساوى ٣٦) . اذن حان الان وقت استرداد اشارة اقل من التى اهملناها واستبعدناها . فحيث ان اى نقطة واقعة على ذلك الخط = ٣٦ اذن قيد التصنيع فى اصله يضم خط المعادلة وكل المنطقة الواقعة اسفله والمحصورة بين خط التصنيع وكل من المحور الافقى والرأسى . وبصفة عامة يمكن القول ان اى نقطة داخل المنطقة الممكنة او على حدودها تحقق قيد التصنيع بالاضافة الى قيد عدم سلبية كل من $س_١$ ، $س_٢$.

وبنفس الطريقة يتم رسم خط معادلة التجميع ومعادلة رقائق الخشب . ويمكن تبسيط اجراءات الحصول على احداثيات نقاط كل معادلة اذ ما اتبعنا الجدول التالى :

معادلات القيود	احداثي النقطة الاولى		احداثي النقطة الثانية	
	بفرض ان $س_١ = ٠$	$\therefore س_٢$	$\therefore س_١$	بفرض ان $س_٢ = ٠$
$٣ س_١ + ٢ س_٢ = ٣٦$	صفر	١٨	١٢	صفر
$٢ س_١ + ٤ س_٢ = ٤٠$	صفر	١٠	٢٠	صفر
$س_١ = ١٠$	—	—	١٠	صفر

وبتمثيل تلك الاحداثيات على الرسم البيانى وتحديد اتجاه منطقة الحلول الممكنة بادخال الاشارة التى تم استبعادها لكل معادلة . فان منطقة الحلول الممكنة التى اخذت فى اعتبارها كافة القيود الواردة بالصياغة الرياضية ستظهر على الشكل التالى :



الخطوة الرابعة : تعيين منطقة الحلول الممكنة

Identifying the feasible solutions Region

بعد ان تم التمثيل البيانى لكافة القيود الواردة على دالة الهدف بالصياغة الرياضية للمشكلة كما يظهر من الشكل السابق ، يتضح ان هناك منطقة تلتقى فيها ومن خلالها كافة قيود المشكلة اى انها منطقة تفى ولا تتعارض مع اى قيد من قيود المشكلة ، وهذه المنطقة ما نطلق عليه منطقة الحلول الممكنة ، ويتضح من الشكل ان تلك المنطقة هى المحددة بالنقاط (أ ، ب ، ج ، د ، هـ) وهذا يعنى ان اى نقطة تقع داخل هذه المنطقة او على حدودها تعتبر حلا ممكنا Feasible Solution للمشكلة التى نحن بصددها ولكن هل كل نقطة من هذه النقاط تعتبر حلا امثلا Optimal Solution ؟

ان الحل الممكن ليس بالضرورة حل امثل ، حيث أن الحل الممكن يحقق عدم التعارض مع اى من القيود المفروضة ولكنه قد لا يحقق دالة الهدف اى لا يصل بالارباح الى حدها الاقصى او ينزل بالتكلفة الى ادنى حالاتها . فى حين ان الحل الامثل هو الذى يفى بكافة القيود وفى نفس الوقت يحقق دالة الهدف اى انه لابد ان يكون حل ممكن ، وحيث ان الحل الامثل لابد ان يكون

حلا ممكنا فان ذلك يعنى انه عند نقطة من النقـــــاط الواقعة فى هذه المنطقة او على حدودها يكمن الحـــل الامثل الذى يعمل على تعظيم دالة الهدف .

الخطوة الخامسة : تعيين الحل الامثل

Identifying the Optimal Solution

لقد سبق القول ان الحل الامثل هو حل ممكن اى انه يقع داخل منطقة الحلول الممكنة او على حدودها ، ولكـن من المعروف ان هذه المنطقة وحدودها تحوى عددا لا نهائيا من النقاط التى تعتبر كل منها حلا ممكنا ، وليس مـــن المنطقى ان نقوم باختبار كل نقطة تقع داخل او علـــى حدود منطقة الحلول الممكنة لنرى ايها يحقق اكبر قيمـة لدالة الهدف لتكون هى نقطة الحل الامثل . اننا فـــى حاجة الى عمل اختبار لعدد محدود فقط من تلك النقـــاط ولكن كيف يمكن تخفيض النقاط المطلوب اختبارها مـــن بين العدد النهائى الموجود بالمنطقة الممكنـــة ؟ ان المنطق الرياضى يقف وراء ذلك التحديد اذ ان اى نقطـة من النقاط الطرفية Extrene Points هى بالقطـــع افضل من حيث توليدها للارباح من اى نقطة من النقـــاط الداخلية Interior Points ، اى اننا استطعنـا فى هذا التحليل ان نجعل النقاط المطلوب اختبارها مـــن ضمن منطقة الحلول الممكنة هى فقط النقاط التى تقـــع على خطوط حدود منطقة الحلول الممكنة ولكن برغم ذلـــك التحديد الا انه ما زال هناك عدد ضخم جدا من النقـــاط التى تحويها خطوط حدود منطقة الحلول الممكنة وعمليـــة اختبارها جميعا صعبة ان لم تكن مستحيلة ، ولذلـــك سنسير فى مزيد من التحليل بهدف تخفيض تلك النقـــاط . بفرض اننا نقف عند النقطة أ وهى نقطة عدم الانتـــاج بطبيعة الحال انها تقع على حدود منطقـة الحلـــول

الممكنة ولكنها نقطة حل سيء حيث لا انتاج ومن ثم لا ارباح ولكن اذا تحركنا عبر المحور $س_1$ فان كل خطوة نخطوها عبر هذا المحور فى اتجاه النقطة هـ ولتكن بمثابة زيادة الانتاج من النموذج $س_1$ بمقدار وحدة واحدة فان ذلك يعنى زيادة دالة الهدف بمقدار ٧ جنيه عن كل خطوة ومعنى ذلك ان النقطة هـ هى افضل نقطة على خط المحور الافقى ومن ثم يمكن اهمال كل النقاط السابقة عليها لانها اقل ربحية من النقطة هـ . كذلك الحال لو نظرنا الى المحور الرأسى واتبعنا ذات التحليل لوجدنا ان النقطة ب افضل جميع النقاط الواقعة على المحور الرأسى ومن ثم يتم استبعاد كل ماعداها من نقاط على ذلك المحور ، وبتكرار نفس هذا المنطق على خطوط حدود منطقة الحلول الممكنة يتضح لنا بوضوح ان تتابع النقاط على اى خط فى أحد الاتجاهات يقود من حل حسن الى حل احسن ، فى حين ان تتابع تلك النقاط فى الاتجاه الاخر يخفض من قيمة دالة الهدف .

ان ذلك التحليل يقودنا الى التأكيد على حقيقة هامة وهى : ان النقاط الواقعة على حدود منطقة الحلول الممكنة هى فقط النقاط التى سيكون من بينها احدى النقاط الممثلة للحل الامثل ، كذلك فان كل خط خارجى من خطوط المنطقة الممكنة توجد به نقطة واحدة افضل من كل النقاط الاخرى ، وان هذه النقاط تقع دائما عند رؤوس منطقة الحلول الممكنة اى عند تقاطع خطوط القيود ، وان الحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية لابد ان يكون هو احدى هذه النقاط .

وهذه القاعدة هامة جدا لانها قد حصرت وركزت بحثنا عن الحل الامثل فى النقاط الطرفية فقط ، وفى المثال الذى نعالجه الان سيكون بحثنا عن الحل الامثل فى حدود اختبار خمسة نقاط فقط وهى كل نقاط الرؤوس وهى

(أ ، ب ، ج ، د ، هـ) . ومعنى هذا اننا باستخدام المنطق الرياضى قد خفضنا بحثنا من عدد لا نهائى من النقاط الى عدد محدود من تلك النقاط ويبقى فقط تحديد نقطة الحل الامثل من بينها .

استعراض النقاط الطرفية Enunerating Exterme Points

النقطة (أ): ايجاد قيم المتغيرات القرارية عند هذه النقطة عملية سهلة لانها تمثل نقطة الاصل والتى فيها

$س_1$ = صفر ، $س_2$ = صفر

قيمة دالة الهدف عند (أ) = ٧ × صفر + ١٠ × صفر = صفر

النقطة (ب): وقيم المتغيرات القرارية عند هذه النقطة عملية سهلة نسبيا حيث ان $س_1$ = صفر لانها واقعة على المحور الرأسى وعندها $س_2$ = ١٠ وهذا طبعا يمكن قراءته مباشرة من الرسم البيانى .

قيمة دالة الهدف عند (ب) = ٧ × صفر + ١٠ × ١٠ = ١٠٠ جنيه .

النقطة (ج): وواضح طبعا من الرسم البيانى انه لا يمكن قراءة احداثياتها من الرسم مباشرة ولذلك سنبحث عن طريقة اخرى اطول نسبيا لايجاد احداثيات هذه النقطة ، ان هذه النقطة تمثل تقاطع خطى القيدين :

٢ $س_1$ + ٤ $س_2$ = ٤٠ (معادلة التجميع) .

٣ $س_1$ + ٢ $س_2$ = ٣٦ (معادلة التصنيع)

واسهل طريقة لايجاد احداثيات النقطة (ج) يتم بحل زوج المعادلتين السابقتين حلا آنيا ويتم ذلك عن طريق ضرب احد المعادلتين فى رقم يتم اختياره ليتساوى معامل احد المتغيرات القرارية فى المعادلة مع معامل نفس المتغير فى المعادلة الاخرى . وعن طريق طرح المعادلة الجديدة من المعادلة التى لم يتم تغييرها يمكن ايجاد قيمة التغير القرارى الذى يبقى من عملية الطرح . وتكون هذه الخطوات كالاتى :

٢ $س_1$ + ٤ $س_2$ = ٤٠

$$٣ س_١ + ٢ س_٢ = ٣٦$$

$$\times ٢ \quad ٦ س_١ + ٤ س_٢ = ٧٢$$

$$\text{وبالطرح}\quad ٤ س_١ = ٣٢$$

$$\therefore س_١ = ٨$$

عندئذ يمكن التعويض بقيمة $س_١$ فى اى من المعادلتين السابقتين لنحصل على قيمة $س_٢$ كالاتى :

$$٢ س_١ + ٤ س_٢ = ٤٠ \quad \text{(المعادلة الاولى)}$$

$$٢ \times (٨) + ٤ س_٢ = ٤٠$$

$$٤ س_٢ = ٢٤ \quad (٤٠ - ١٦)$$

$$\therefore س_٢ = ٦$$

اى ان النقطة (ج) تكون فيها قيمة المتغيرات القرارية هى ($س_١ = ٨$ ، $س_٢ = ٦$)

قيمة دالة الهدف عند (ج) = ٧ × ٨ + ١٠ × ٦ = ١١٦ جنيه ٠

<u>النقطة (د)</u>: وايجاد احداثيات هذه النقطة يعتبر سهل نسبيا ، اذ انها تمثل نقطة تقاطع خطى القيدين :

$$س_١ = ١٠ \quad \text{(قيد رقائق الخشب)}$$

$$٣ س_١ + ٢ س_٢ = ٣٦ \quad \text{(قيد التصنيع)}$$

ويمكن بالتعويض فى المعادلة الثانية بقيمة س ١ = ١٠ أن نستنتج قيمة المتغير الاخر س ٢ ٠

$$٣ \times (١٠) + ٢ س_٢ = ٣٦$$

$$٣٠ + ٢ س_٢ = ٣٦$$

$$٢ س_٢ = ٣٦ - ٣٠$$

$$س_٢ = \frac{٦}{٢} = ٣$$

اى ان احداثى النقطة د هو (١٠ ، ٣) ٠

وبذلك تكون قيمة دالة الهدف عند النقطة (د) =

٧ × ١٠ + ١٠ × ٣ = ١٠٠ جنيه ٠

<u>النقطة (هـ)</u>: اما النقطة الاخيرة وهى النقطة (هـ) فان طريقة تحديد احداثياتها شبيهة بالنقطة (ب) ، من

حيث انها تقع على المحور الافقى اى ان قيمـــة $س_1$ موجودة بالفعل كما هو مبين من منطقة الحلول الممكنة اذ ان النقطة (هـ) تقع عند النقطة ١٠ من المحـور الافقى اى ان $س_1$ = ١٠ ، وحيث انها تقع على المحـور الافقى فان $س_2$ = صفر ٠

اى ان احداثى النقطة (هـ) هو $س_1$ = ١٠ ، $س_2$ = صفر وبذلك تكون قيمة دالة الهدف عند نقطـــة (هـ) = ٧ × ١٠ + ١٠ × صفر = ٧٠ جنيه ٠

مما سبق يتبين ان قيمة دالة الهدف عند النقـاط الطرفية الخمسة كانت كالاتى :

ا	=	صفـر
ب	=	١٠٠ جنيه
ج	=	١١٦ جنيه
د	=	١٠٠ جنيه
هـ	=	٧٠ جنيه

ويتضح من تلك المقارنة ان النقطة الطرفية (ج) هـى نقطة الحل الامثل ، ويتم عندها انتاج ٨ وحدات مـن النموذج ($س_1$) وعدد ٦ وحدات من النموذج ($س_2$)وتكون قيمة دالة الهدف ١١٦ جنيه وهى اكبر قيمة لدالـة الهدف من اى نقطة طرفية اخرى ٠

<u>استخدام مدخل خط الربح المتساوى لتعيين نقطة الحل الامثل</u>

يمكن تعيين نقطة الحل الامثل بمدخل آخر غيـر الطريقة التى تناولناها سابقا والتى اعتمدت علـى تقييم النقاط الطرفية فى زيادة دالة الهـدف ، والمدخل الاخر الذى يمكن استخدامه فى تعيين نقطـة الحل الامثل يعرف بمدخل خط الربح المتسـاوى او المتعادل Equal or Isoprofit Line Approach

ويقوم هذا المدخل على اساس افتراض قيمة معينة لدالة الهدف ويتم تمثيلها على منطقة الحلول الممكنة فى شكل خط ربح واذا رغبنا فى زيادة دالة الهدف فانه يمكننا ان نحرك ذلك الخط موازيا لنفسه الى اعلا حيث ان قيمة دالة الهدف تزداد كلما تحركنا فى أحد الاتجاهات وتنخفض فى الاتجاه الاخر ، والخطوط التى يتم رسمها هى جميعا متوازية لبعضها البعض .

وحتى يمكن الوصول وتعيين الحل الامثل يمكن ان تبدأ برسم اى خط ربح كما سبق ذكره على ان يكون ذلك فى نطاق منطقة الحلول الممكنة ، ونعتبر ان هذا الخط هو الاساس الذى سيبدأ منه رسم الخطوط الاخرى المتوازيه ويمكن رسم الخطوط الاخرى لخطوط الربح المتساوى عن طريق الانزلاق بالمسطرة من خط الربح المتساوى الاصلى فى اتجاه زيادة الارباح حتى نصل الى نقطة الحل الامثل . ويمكن ان نصل الى تلك النقطة عندما نجد اننا وصلنا بحافة المسطرة الى الحد الذى يعتبر حد اقصى للحركة قبل ان نترك منطقة الحلول الممكنة ، عندئذ نقول ان آخر نقطة ممكنة تمس المسطرة لابد ان تكون هى النقطة الممكنة والمثلى ذات اعلى قيمة لدالة الهدف وهى تمثل نقطة الحل الامثل .

<u>كيفية اختيار خط الربح المتساوى الاصلى :</u>

يتعين عند اختيار خط الربح الاصلى الذى سنتخذه الاساس فى رسم مجموعة خطوط الارباح المتساوية الاخرى ان نراعى ما يلى :

- ان تكون قيمة هذا الخط تقبل القسمة على معاملات دالة الهدف حتى لا نضطر الى التعامل مع قيم كسرية تؤدى الى صعوبة فى التمثيل البيانى، وفى مثالنا هذا كانت دالة الهدف هى :

$$٧ س_١ + ١٠ س_٢$$

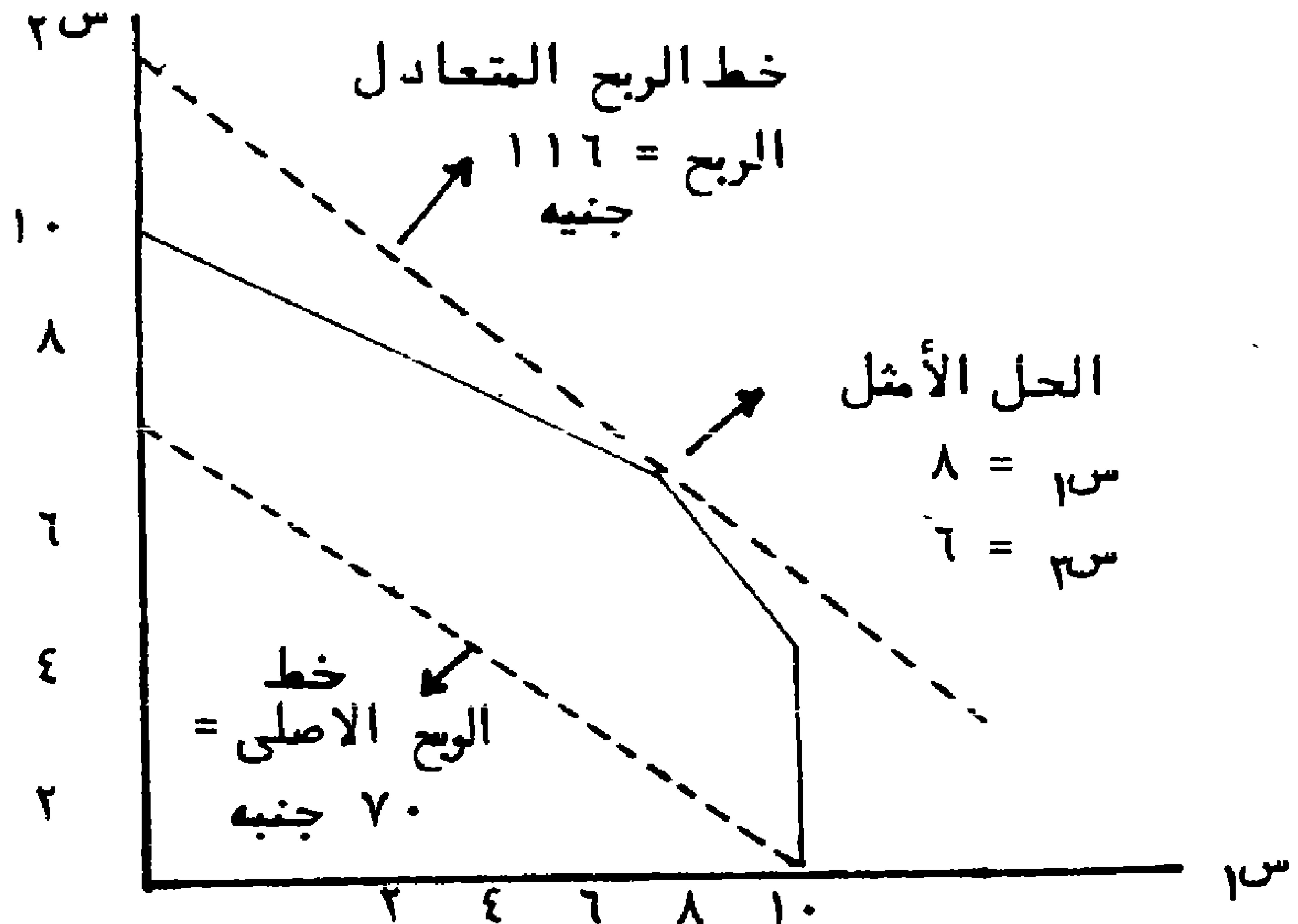
اى يمكن ان تكون قيمة دالة الهدف الافتراضية التى

سنختارها ٧٠ جنيه فهى تقبل القسمة على معاملات دالة الهدف .

- يشترط ان تكون قيمة دالة الهدف الافتراضية تمثل كمية انتاج تقع داخل منطقة الحلول الممكنة والا فانه افتراض غير صحيح . وباختيار قيمة دالة الهدف التى اخترناها (٧٠ جنيه) يتضح أنها تقع فعلا داخل منطقة الحلول الممكنة ، فاذا لم يتم اى انتاج من $س_١$ فيكون الانتاج من $س_٢$ فى هذه الحالة ٧ وحدات وهذا يقع فى منطقة الحلول الممكنة ، واذا لم يكن هناك انتاج اى وحدات من $س_٢$ ، فانه سيتم انتاج ١٠ وحدات من $س_١$ وهذا ايضا ممكن لوقوع هذا الانتاج داخل المنطقة الممكنة . اى ان معادلة خط الربح التى اخترناها هى :

$$٧ س_١ + ١٠ س_٢ = ٧٠$$

ولرسم الخط المستقيم الذى يمثل هذه المعادلة فانه يتم اتباع نفس الاسلوب الذى سبق الاخذ به عند رسم معادلات القيود ، اى سنفترض ان احد المتغيرات القرارية = صفر ، ثم نحسب قيمة المتغير الاخر ، وباجراء هذا الاسلوب سنجد ان هذا الخط سيكون واصلا بين النقطتين (١٠ ، صفر) ، (صفر ، ٧) ويتم رسمه كما هو موضح بالشكل الاتى :



ويجدر التنويه هنا انه اذا ظهرت صعوبة فى قـــراءة القيم الصحيحة للمتغيرات القرارية عند تلك النقطـة خاصة فى حالة القيم الكسرية فيمكن التغلب على ذلـك باتباع الطرق السابقة والخاصة بحل المعـــادلات المتقاطعة عند هذه النقطة حلا آنيا للوصول الى القيـم الصحيحة .

مثال محلول (١)

ترغب شركة نقل جوى للبضائع فى شحن طائرة لرحلـة واحدة مستهدفة تضخيم الايراد الناتج من هذه الرحلـة ، ويوجد نوعان من البضائع :

١- بضائع يتطلب نقلها تجهيزات خاصة وهذا يقتضـى وضعها فى كابينة يجب ان تظل تحت الضغط الجـوى العادى (مثل الدجاج الحى) .

٢- بضائع عادية توضع فى المخزن الرئيسى المخصـص للبضائع لا يستدعى شحنها تحكما فى الضغط (مثـل الالات والملابس وغيرها) .

ويبلغ الايراد فى الرحلة ٣٠٠٠ جنيه للطن من النوع الاول من البضائع ومبلغ ١٠٠٠ جنيه للطن من النـــوع الثانى من البضائع . علما بان الكميات المتاحة مـــن النوعين تفوق ما يمكن شحنه فى هذه الرحلة .

فاذا علمت ان :

(١) الطائرة بها مكانان للشحن ، الاول كابينه مكيفـة الضغط ، والثانى مخزن رئيسى غير مكيف الضغط .

---

(١) د. على عبد السلام العزاوى ، بحوث العمليات فـــى *مجال الانتاج والتخزين والنقل ، الطبعة الثانيـــة* ، دار النهضة العربية ، القاهرة ١٩٧٧ ، ص ١٨٢ .

(ب) الكابينة لا تسع اكثر من ١٠ طن ، كذلك فان المخزن الرئيسى لا يتسع لاكثر من ٢٠ طن .

(جـ) للمحافظة على حالة الاتزان فان الكابينة لا تأخذ اكثر من ١ طن زيادة على $\frac{٢}{٣}$ شحنة المخزن الرئيسى .

(د) لا تشحن الطائرة باكثر من ٢٨ طن من البضائع .

والمطلوب تحديد الكمية التى يتعين شحنها من كل نوع من البضائع بغرض تضخيم الايراد الناتج من هذه الرحلة .

الحل :

الخطوة الاولى : الصياغة الرياضية للمشكلة :

بفرض ان :

س ١ = عدد الاطنان التى ستشحن فى المخزن الرئيسى

س ٢ = عدد الاطنان التى ستشحن فى الكابينة .

∴ دالة الهدف :

تعظيم ١٠٠٠ س ١ + ٣٠٠٠ س ٢ ← اقصى ايراد ممكن

القيود :

س ١ ≥ ٢٠	(سعة المخزن الرئيسى)
س ٢ ≥ ١٠	(سعة الكابينة)
س ٢ ≥ ١ + $\frac{٢}{٣}$ س ١	(المحافظة على حالة الاتزان)
س ١ + س ٢ ≥ ٢٨	(الحمولة القصوى للطاقة)
س ١ ، س ٢ ≤ صفر	(شرط عدم السلبية)

الخطوة الثانية : تحويل متباينات القيود الى معادلات بالاستبعاد المؤقت للاشارة (≥)

س ١ = ٢٠

س ٢ = ١٠

س ٢ − $\frac{٢}{٣}$ س ١ = ١ (بعد تحويل $\frac{٢}{٣}$ س ١ للجانب الايمن)

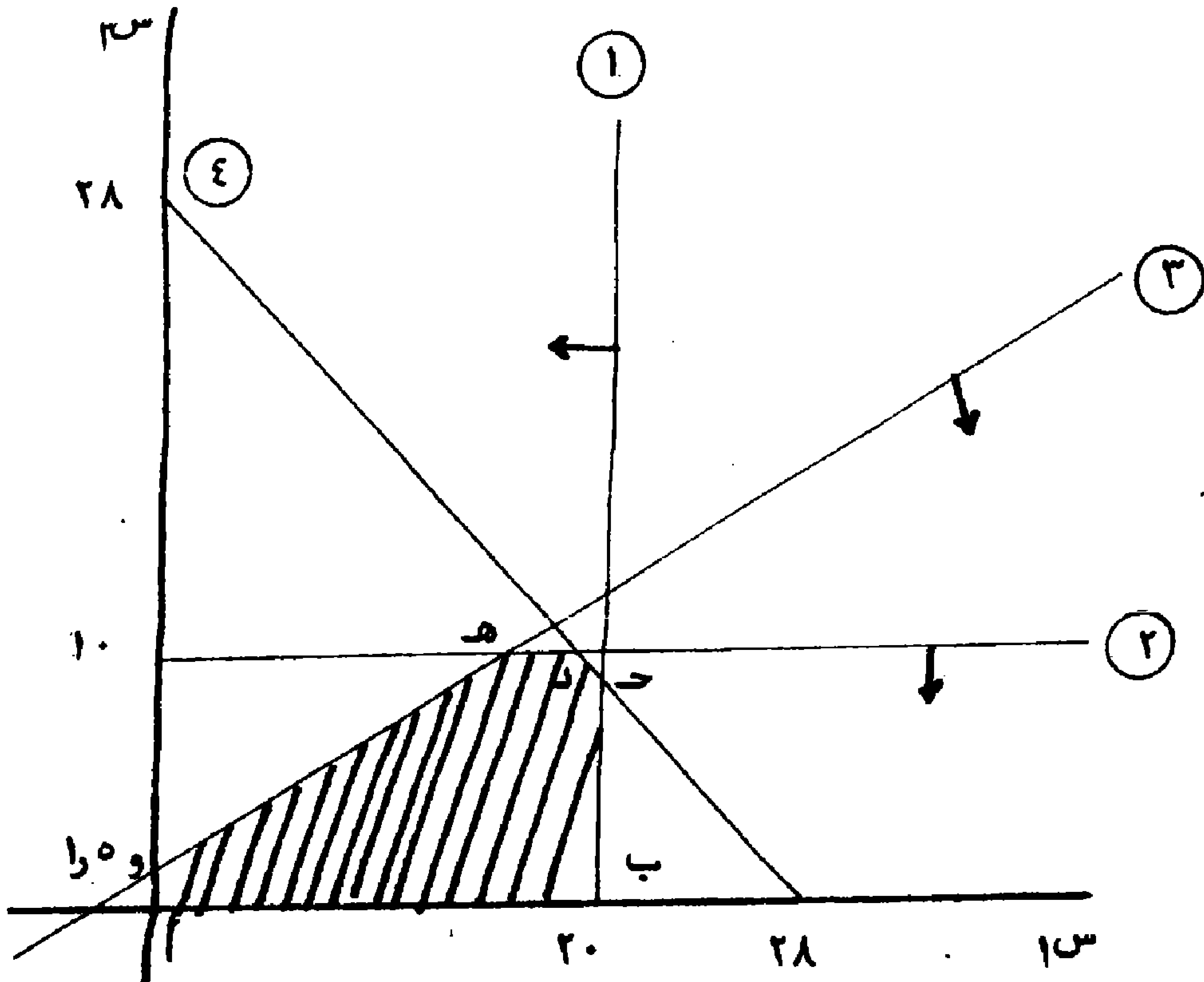
س ١ + س ٢ = ٢٨

الخطوة الثالثة : التمثيل البياني للمعادلات :

(أ) ايجاد الاحداثيات الخاصة بكل معادلة :

معادلات القيود	احداثي النقطة الاولى: بفرض ان س ١ = ٠	احداثي النقطة الاولى: ∴ س ٢ =	احداثي النقطة الثانية: ∴ س ١ =	احداثي النقطة الثانية: بفرض ان س ٢ = ٠
س ١ = ٢٠	——	∞	٣٠	صفر
س ٢ = ١٠	صفر	١٠	∞	——
س ٢ − $\frac{٢}{٣}$ س ١ = ١	صفر	١	− ١ر٥	صفر
س ١ + س ٢ = ٢٨	صفر	٢٨	٢٨	صفر

(ب) تمثيل الاحداثيات على الرسم البياني :



الخطوة الرابعة : تحديد منطقة الحلول الممكنة :

يتضح من الرسم البيانى ان منطقة الحلول الممكنة هى المنطقة أ ب ج د هـ و .

الخطوة الخامسة : تعيين الحل الامثل :

سيكون الحل الامثل هو احد نقاط الرؤوس لمنطقة الحلول الممكنة التى امكن تعيينها فى الخطوة السابقة أى انها تكون من بين النقاط أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، و ، ولذلك سيتم اختبار كل نقطة منها واختيار النقطة التى تعمل على تعظيم الايراد لتكون هى نقطة الحل الامثل ، وسيتم اجراء ذلك على مرحلتين الاولى تعيين احداثى كل نقطة منها ثم المرحلة الثانية التعويض بتلك الاحداثيات بدالة الهدف .

١ - تعيين احداثيات النقاط الطرفية :

- النقطة (أ) وهى نقطة الاصل اى انها (صفر ، صفر)
- النقطة (ب) وهى واقعة على المحور الافقى اى انها (٢٠ ، صفر) .
- النقطة (جـ) وهى نقطة تقاطع المعادلتين (١) ، (٤) وعن طريقة حلهما آنيا يمكن ايجاد الاحداثى لها :

س ١ = ٢٠

س ١ + س ٢ = ٢٨

بالتعويض فى المعادلة الثانية بقيمة س ٢

∴ ٢٠ + س ٢ = ٢٨

∴ س ٢ = ٨

∴ النقطة (ج) تمثل (٢٠ ، ٨) .

- النقطة (د) وهى نقطة تقاطع المعادلتين (٢) ، (٤)

س ٢ = ١٠

س ١ + س ٢ = ٢٨

وبالتعويض فى المعادلة الثانية بقيمة س ٢ من المعادلة الاولى .

∴ $س_1 + ١٠ = ٢٨$ ∴ $س_1 = ١٨$

∴ النقطة (د) تمثل (١٨ ، ١٠)

— النقطة (هـ) وهى تمثل نقطة تقاطع المعادلتين (٢) ، (٣) .

$س_2 = ١٠$

$س_2 - \frac{٢}{٣} س_1 = ١$

وبالتعويض بقيمة $س_2$ فى المعادلة الثانية .

∴ $١٠ - \frac{٢}{٣} س_1 = ١$

∴ $- \frac{٢}{٣} س_1 = ٩$

∴ $س_1 = ٩ \times -\frac{٣}{٢} = \frac{٢٧}{٢} = ١٣{,}٥$

∴ النقطة هـ تمثل (١٣٫٥ ، ١٠) .

— النقطة (و) وهى تمثل صفر من $س_1$ لانها تقع على المحور الرأس وبالتعويض بتلك القيمة فى المعادلة الثالثة المتقاطعة مع المحور الرأس عند النقطة ونحصل على قيمة $س_2$ عند تلك النقطة كالاتى :

$س_2 - \frac{٢}{٣} س_1 = ١$

$س_2 - \frac{٢}{٣} \times صفر = ١$

∴ $س_2 = ١$

∴ النقطة (و) تمثل (صفر ، ١)

٢ — <u>اختبار النقاط الطرفية :</u>

النقطة أ (صفر ، صفر) = ١٠٠٠ × صفر + ٣٠٠٠×صفر = صفر .

النقطة ب (٢٠ ، صفر) = ١٠٠٠×٢٠ + ٣٠٠٠ × صفر = ٢٠٠٠٠ جنية .

النقطة ج (٢٠،٨) = ١٠٠٠×٢٠ + ٣٠٠٠×٨ = ٤٤٠٠٠ ج

النقطة د (١٨ ، ١٠) = ١٠٠٠×١٨ + ٣٠٠٠ × ١٠ = ٤٨٠٠٠ جنيه .

النقطة هـ (١٣٫٥ ، ١٠) = ١٠٠٠ × ١٣٫٥+٣٠٠٠×١٠= ٤٣٥٠٠ جنيه .

النقطة و (صفر،١٠) = ١٠٠٠ × صفر + ٣٠٠٠ × ١ = ٣٠٠٠ جنيه .

مما سبق يتبين ان نقطة الحل الامثل هى النقطة (د) اذ يتم فيها شحن ١٨ طن فى المخزن الرئيسى و ١٠ طن فى الكابينة ويصل عندئذ الايراد الى اقصى حد له اذ يبلغ ٤٨٠٠٠ جنيه .

(يمكنك تجربة استخدام طريقة خط الربح المتساوى للتأكد من صحة الحل) .

مشاكل تخفيض التكلفة Minimization Problems

سوف نخصص ذلك الجزء لتوضيح كيفية استخدام المدخل البيانى للبرمجة الخطية فى معالجة النوعية الاخرى من المشاكل الادارية وهى الخاصة بتخفيض دالة الهدف والوصول بها الى ادنى حد ممكن ، فقد تكون هذه الدالة تكاليف ، او مسافات ، او ازمنة ، وبرغم ان مشاكل التخفيض يتم حلها بنفس الطريقة العامة التى تناولناها فى حل مشاكل التعظيم Maximization الا انه من الافضل ان نتناولها بالتحليل من خلال حل مشكلة بسيطة بهدف التعرف على بعض أوجه الاختلافات الاساسية بينهما ، والمشكلة التى جرت العادة على استخدامها كنموذج للصياغة العامة لمشاكل البرمجة الخطية تسمى مشكلة المزج Mixing Problem

مثال :

تمكنت شركة القاهرة للمنتجات الغذائية من ابتكار طريقة جديدة لانتاج نوع من الاطعمة يتكون من مزيج من الارز والقمح ، والشركة تريد ان تتعرف على اقل تكلفة للمزج بين نوعى الحبوب وبشرط ان تقابل الاحتياجات اليومية للمستهلك المصرى من كل من فيتامين أ ، د .

علما بان تكلفة جرام الارز ٨ر٠ مليم ويعطى ٢٠ ٪ من الاحتياجات اليومية للمستهلك من فيتامين (آ) ، و ٤٠ ٪ من الاحتياجات من فيتامين (د) ، اما جرام القمح فهو يغطى ٥٠ ٪ من الاحتياجات اليومية من فيتامين (آ) ، و ٢٠ ٪ من فيتامين (د) ويتكلف الجرام ٢ر١ مليما ٠ والمطلوب تحديد نسبة المزج بين نوعى الحبوب والتى تصل بتكلفة النوع الجديد الى ادنى حد لها وبشرط ان تغطى احتياجات المستهلك من فيتامين (آ) ، وفيتامين(د)

الحل :

تسير خطوات الحل على نفس المنوال الذى اتبعناه فى مشاكل التعظيم كالاتى :

الخطوة الاولى : صياغة المشكلة

المتغيرات القرارية فى هذه المشكلة هى عدد الجرامات من كل نوع من الحبوب والتى تستخدم فى خلطة الطعام ، والهدف هو ايجاد اقل تكلفة للخلط ، لذلك فان شركة القاهرة للمنتجات الغذائية تسعى الى :

تخفيض ٠٠٨ر٠ س ١ + ٠٠١٢ر س ٢

وبذلك فان دالة الهدف تظهر على الشكل السابق ، اما بالنسبة للقيود المفروضة على هذه الدالة فيمكن صياغتها على الوجه التالى :

حيث ان س ١ = عدد جرامات الارز المستخدمة ، س ٢ = عدد جرامات القمح المستخدمة ، وحيث ان تحقيق دالة الهدف السابقة يتعين ان يرتبط بضرورة استيفاء حاجة المستهلك من كل من فيتامين آ ، د . لذلك فان دالة الهدف مفروض عليها نوعين من القيود اولهما الوفاء بالاحتياجات من فيتامين آ ، وثانيهما الوفاء بالنوع الثانى من الفيتامين ،

فبالنسبة للوفاء باحتياجات المستهلك من فيتامين (آ) :

{ النسبة المئوية من احتياجات المستهلك من فيتامين (أ) والتى يحصل عليها من الارز } +

{ النسبة المئوية من احتياجات المستهلك من فيتامين (أ) والتى يحصل عليها من القمح } ≥

{ الاحتياجات اليومية للمستهلك من فيتامين (أ) }

وفى الصورة الرمزية يكون هذا القيد كالاتى :

٢ و س ١ + ٥ر س ٢ ≥ ١ (قيد فيتامين أ)

وبنفس الطريقة يمكن صياغة القيد الثانى الخاص بفيتامين (د) كالاتى :

٤ر س ١ + ٢ر س ٢ ≥ ١ (قيد فيتامين د)

وبعد اضافة قيود عدم سلبية المتغيرات القرارية تصبح الصياغة الكاملة للمشكلة على الصورة التالية :

تخفيض ٠٠٠٨و س ١ + ٠٠١٢و س ٢

بشرط ان :

٢ر س ١ + ٥ر س ٢ ≥ ١

٤ر س ١ + ٢ر س ٢ ≥ ١

س ١ ، س ٢ ≥ صفر

<u>الخطوة الثانية :</u> تحويل متباينات القيود الى معادلات .

وقد سبق القول ان ذلك يتم عن طريق الاهمال المؤقت للاشارة (≥) وبذلك تصبح المعادلات التى تعبر عن فيتامينات القيود كالاتى

٢ر س ١ + ٥ر س ٢ = ١

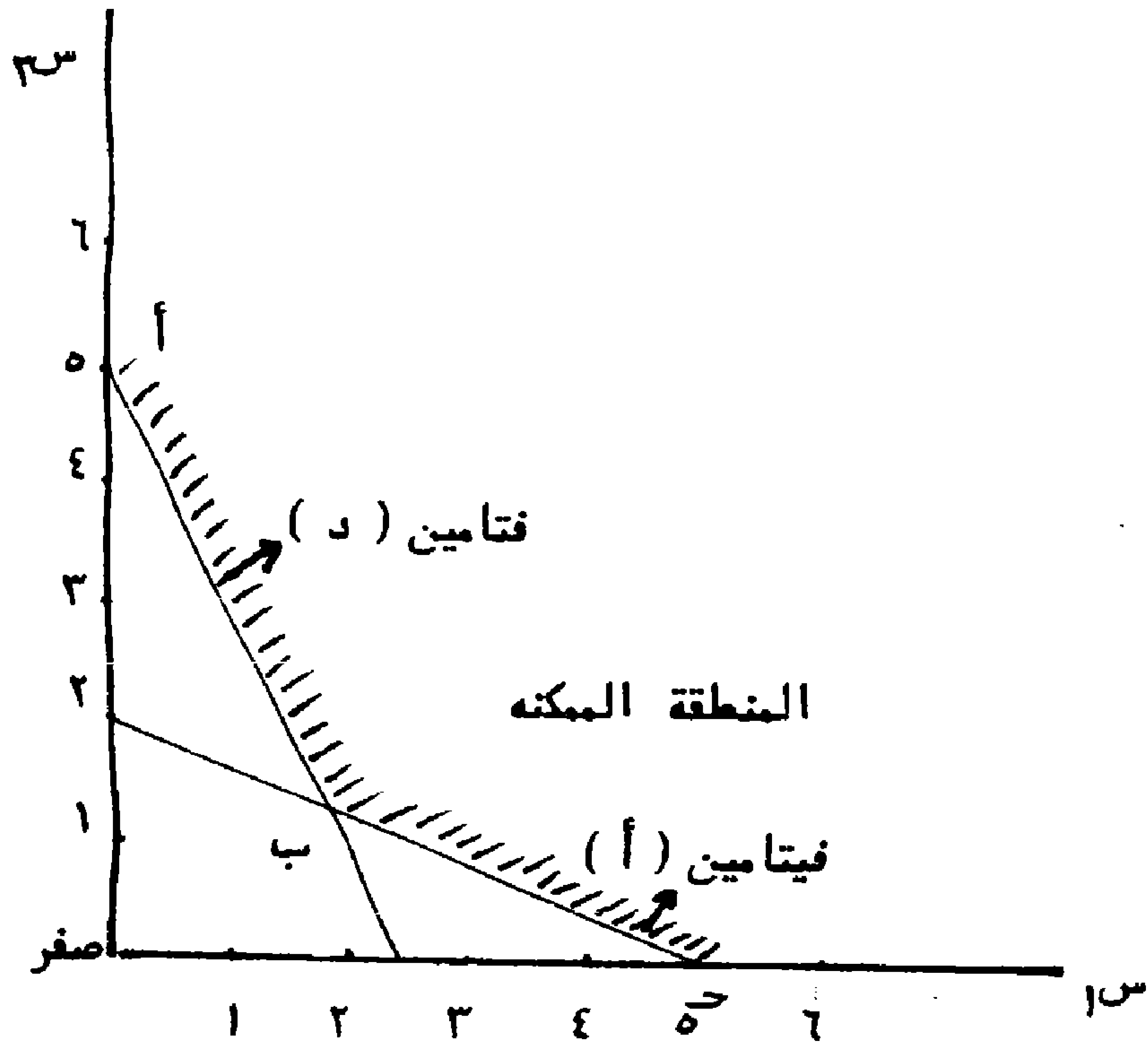
٤ر س ١ + ٢ر س ٢ = ١

<u>الخطوة الثالثة :</u> التمثيل البيانى لمعادلات القيود

سيتم اولا ايجاد احداثيات النقاط اللازمة لرسم المعادلات السابقة .

معادلات القيود	احداثي النقطة الاولى		احداثي النقطة الثانية	
	بفرض ان س ١ = صفر	تكون س ٢ =	تكون س ١ =	بفرض ان س ٢ = صفر
٢رس ١ + ٥رس ٢=١	صفر	٢	٥	صفر
٤رس ١ + ٢رس ٢=١	صفر	٥	٢ر٥	صفر

وبتمثيل تلك الاحداثيات على الرسم البيانى. وتحديد اتجاه منطقة الحلول الممكنة بادخال الاشارة التى تم استبعادها لكل معادلة ، فان منطقة الحلول الممكنة التى اخذت فى اعتبارها القيود الواردة بالصياغة الرياضية ستظهر على الشكل التالى :



ويلاحظ من الرسم السابق ان المنطقة اسفل كل قيد هى منطقة غير ممكنة بينما المنطقة الواقعة اعلى القيد هى المنطقة الممكنة وذلك نتيجة مباشرة للاشارة (>). وهذا طبعا شئ بديهى اذ ان القيم المنخفضة للمتغيرات القرارية الواقعة اسفل الخط لا تفى بالاحتياجات اليومية للفيتامين الممثل لذلك الخط .

ولعل الملاحظة السابقة تظهر ان هناك اختلاف حقيقى بين منطقة الحلول الممكنة فى مشكلة التخفيض ومشكلة التعظيم ، فمنطقة الحلول الممكنة فى مشكلة التخفيض مطلقة وغير محددة ولا نهائية ، وهذا قد يجعل البعض يظن ان الامر سيكون مقلقا ومزعجا حيث سيتم التعامل مع منطقة حلول مطلقة وغير محددة ، الا اننا نؤكد ان الامر على خلاف ذلك ولا يمثل اى ازعاج فى هذه الحالة ، ذلك لان المطلوب فى دالة الهدف هو تخفيض تكلفة المزيج لادنى حد ممكن وبالطبع فان هذا التخفيض يتطلب قيما صغيرة للمتغيرات القرارية اى ان تتجه الى اسفل منطقة الحلول الممكنة ومن ثم فانه لا يعنينا فى شئ ان تكون منطقة الحلول الممكنة مطلقة ولا نهائية .

الخطوة الرابعة : تعيين منطقة الحلول الممكنة

من الرسم البيانى السابق يمكن القول بان منطقة الحلول الممكنة هى منطقة مطلقة ولا نهائية ومحددة من اسفل بالنقاط أ ، ب ، جـ ، وحيث انه تطبيقا لما ذكرناه سابقا ان تخفيض دالة الهدف يتطلب قيما صغيرة للمتغيرات القرارية اذن سيتركز انتباهنا على النقاط الطرفية الدنيا بمنطقة الحلول الممكنة وهى أ ، ب ، جـ .

الخطوة الخامسة : تعيين الحل الامثل

وفقا لما سبق توضيحه سيكون الحل الامثل احد نقاط

الرؤوس الثلاثة أ ، ب ، ج لذلك سنقوم باختبار النقاط الثلاثة وبيان ايهما يصل بالتكلفة الى ادنى حد لها ومن ثم تصبح هى نقطة الحل الامثل .

النقطة أ : ومن الرسم يتضح ان احداثى هذه النقطة (صفر ، ٥) وبالتعويض فى دالة الهدف :

٠٠٠٨ر × صفر + ٠٠١٢ر × ٥ = ٠٠٦ر جنيها

النقطة ب : وهذه النقطة هى نقطة تقاطع خطى المعادلتين لذلك سيتم حلها آنيا بغرض ايجاد احداثى النقطة ب كالاتى :

٢ر س ١ + ٥ر س ٢ = ١

٤ر س ١ + ٢ر س ٢ = ١

وبضرب العادلة الاولى × ٢ ثم بطرح المعادلة الثانية من المعادلة الجديدة ينتج :

٤ر س ١ + س ٢ = ٢

٤ر س ١ + ٢ر س ٢ = ٢

بالطرح ٨ر س ٢ = ١

اى ان س ٢ = $\frac{١}{٨}$ر = $\frac{٥}{٤}$ جرام

وبالتعويض فى المعادلة الاولى بقيمة س ٢

٢ر س ١ + ٥ر × ($\frac{٥}{٤}$) = ١

٢ر س ١ + $\frac{٢٥}{٤٠}$ = ١

٢ر س ١ = ١ − $\frac{٢٥}{٤٠}$ = $\frac{١٥}{٤٠}$

وبذلك فان س ١ = $\frac{١٥}{٤٠}$ ÷ $\frac{٢}{١٠}$ = $\frac{١٥}{٤٠}$ × $\frac{١٠}{٢}$ = $\frac{١٥}{٨}$ جرام

اى ان احداثى النقطة ب هو ($\frac{١٥}{٨}$ ، $\frac{٥}{٤}$)

وبذلك تكون قيمة دالة الهدف هى :

٠٠٠٨ر × $\frac{١٥}{٨}$ + ٠٠١٢ر × $\frac{٥}{٤}$

= ٠٠١٥ر + ٠٠١٥ر = ٠٠٣ر جنيه

النقطة ج : ومن الشكل البيانى السابق يتضح ان احداثى هذه النقطة (٥ر ، صفر) وبالتعويض فى دالة الهدف :

٠٠٠٨ر × ٥ + ٠٠١٢ر × صفر = ٠٠٤ر جنيه

ويمكن تلخيص النتائج السابقة للنقاط الطرفية فى الاتى :

النقطة الطرفية	قيمة س ١	قيمة س ٢	قيمة دالة الهدف
أ	صفر	٥	٠٠٦ر
ب	$\frac{١٥}{٨}$	$\frac{٥}{٤}$	٠٠٣ر
ج	٥	صفر	٠٠٤ر

وعلى ذلك يمكن القول ان الحل الامثل هو النقطة ب وفيها يكون معدل المزج الامثل بين نوعى الحبوب كالاتى :

$\frac{١٥}{٨}$ من الارز و $\frac{٥}{٤}$ من القمح

وبذلك تصل تكلفة المنتج الجديد الى حدها الادنى .

ولكن قد يخطر على ذهن القارىء وهو يتابع هذه النتائج تساؤل مؤداه : لقد تبين من الحل الامثل ان نسب الخلط بين نوعى الحبوب والتى تؤدي الى تخفيض التكلفة الى حدها الادنى هى $\frac{١٥}{٨}$ جرام من الارز + $\frac{٥}{٤}$ جرام من القمح اى ان وزن المزيج الكلى الامثل هو $\frac{٢٥}{٨}$ جرام $(\frac{١٥}{٨} + \frac{٥}{٤})$. هل هذا يعنى انه لابد للشركة ان تجهز عبوات سعة كل منها $\frac{٢٥}{٨}$ جرام تماما بدلا من عبوات نمطية تسمح بوزن معقول من هذه المادة الغذائية ؟

للاجابة على ذلك نقول ان الحل الامثل قد حدد وزن كل عنصر فى الخلطة والتى يمكن من خلالها استنتاج نسب المزج بين العنصرين وهى :

$\frac{١٥}{٨}$ ارز : $\frac{٥}{٤}$ قمح

اى ان نسبة المزج هى : ٣ ارز : ٢ قمح

وطالما توصلنا الى نسب المزج بين العنصرين والتى تحقق اقل تكلفة ممكنة ، فلا مانع اطلاقا من استخدام عبوات بأى حجم طالما ان الخلطة بين العنصرين تحافظ على نسبة المزج بينها ، فمثلا اذا كانت العبوات النمطية التى تستخدمها الشركة حاليا تسع ٤٠ جراما من الخليط ، اذن نضع فى هذه العبوة ٢٤ جراما من الارز + ١٦ جراما من القمح ولا نكون بذلك قد خرجنا عن الحل الامثل لان النسبة بينهما هى $\frac{٢٤}{١٦} = \frac{٣}{٢}$ أى ٣ : ٢ كما هى .

الفصل الثاني

البرمجة الخطية

"حل مشاكل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس"

* مقدمة
* مفاهيم أساسية
* حل مشاكل التعظيم بطريقة السمبلكس
* حل مشاكل التخفيض بطريقة السمبلكس
* أسئلة وتطبيقات

الفصل الثانى
طريقة السمبلكس

مقدمة :

تناولنا فى الفصل الاول الكيفية التى تتم بها مشاكل البرمجة الخطية باستخدام المدخل البيانى ، الا انه يمكن ملاحظة ان المشاكل التى تناولناها بالتحليل والشرح والحل كانت دائما تتكون من متغيرين قراريين (س ١ ، س ٢) ، وهذا هو الذى جعل استخدام المدخل البيانى فى الحل سهلا ومبسطا ويسيرا ، الا اننا يمكن ان نتخيل انه عندما تزيد المتغيرات القرارية عن اثنين فان استخدام هذا المدخل لن يكون مناسبا بل ستنتابه كثيرا من نواحي التعقيد ،ويصل التعقيد الى حالة الاستحالة فى الحل اذا اصبحت المتغيرات القرارية اكثر من ثلاثة ، وهذا بطبيعة الحال راجع الى ان الشكل البيانى لمنطقة الحلول الممكنة محدد ببعدين فقط هما المحور الافقى والمحور الرأسى ونحن نحتاج عادة الى محور خاص لكل متغير قرارى ، اذن عندما تكون المتغيرات القرارية ثلاثة مثلا فان معنى ذلك انه لابد من استخدام المدخل الهندسى فى الرسم البيانى حيث ان منطقة الحلول الممكنة فى هذه الحالة ستكون فى الفراغ ويصعب كثيرا تحديدها وتصويرها ، ولذلك يكون استخدام المدخل البيانى فى هذه الحالة محفوفا بالعديد من صور التعقيد والصعوبة ، كذلك الحال اذا زادت معادلات القيود المفروضة على دالة الهدف بالصياغة الرياضية للمشكلة الى حد يكون تمثيلها فى الرسم البيانى متداخلا يكون استخدام هذا المدخل ايضا اتجاه نحو التعقيد فى الحل وما قد يصاحبه من احتمال عدم دقة النتائج التى يمكن التوصل اليها .

ولذلك فان هناك مدخل آخر او طريقة اخرى بديلة للمدخل البياني عندما يكون استخدامه مصدر تعقيد فى الحل ، وهذا المدخل هو ما يطلق عليه طريقة السمبلكس Simplex Method وهذه الطريقة فى البرمجة الخطية تعطى امكانيات اكبر ، كما يتسع نطاقها عن الطريقة البيانية ، اذ يمكن لمتخذ القرار ان يتعامل مع عدد من المتغيرات القرارية يزيد عن امكانيات الطريقة البيانية ، ايضا لا يوجد بها تعقيد فى حالة ما اذا تعددت القيود المفروضة على دالة الهدف فى الصياغة الرياضية للمشكلة ، فهذه الطريقة يمكن ان تتعامل مع اى عدد من المتغيرات القرارية ومع أى عدد من معادلات القيود المفروضة ، وان كان الحل يدويا فى مثل تلك الحالات سيكون مرهقا الا ان استخدامات الحاسب الالى والبرامج المتاحة الان للتشغيل عليه ازالت اي تعقيدات فى الحل خاصة عندما يكبر حجم الصياغة الرياضية للمشكلة .

ان طريقة السمبلكس تقوم على منهج مرتب ومنظم وتعمل من خلال هذا المنهج على ايجاد الحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية فى اطار خطوات متتابعة ومتعاقبة عن طريق تقييم متتالى للنقاط الطرفية Extreme Points فهى تعمل على اختبار مدى صلاحية تلك النقاط واحدة بعد الاخرى الى ان تصل الى النقطة التى لا يوجد افضل منها ، اى الى ان تصل الى الحل الامثل والذى يشير الى احسن حل ممكن .

ولعله يكون من المفيد اولا ان نتعرض فى بداية هذا الفصل وقبل الدخول فى الخطوات التنفيذية للحل بطريقة السمبلكس الى بعض المرتكزات التى تشكل المفاهيم الاساسية لهذه الطريقة حيث ان ذلك ضرورى للوقوف على فهم واضح وصحيح للخطوات التى تسير فيها هذه الطريقة ، وايضا تحديد معانى بعض المصطلحات التى تستخدم فى خطواتها ، كذلك التعرف على كيفية

اجراء العمليات الحسابية المطلوبة لها من الناحية الجبرية

مفاهيم اساسية : Underlying Concepts

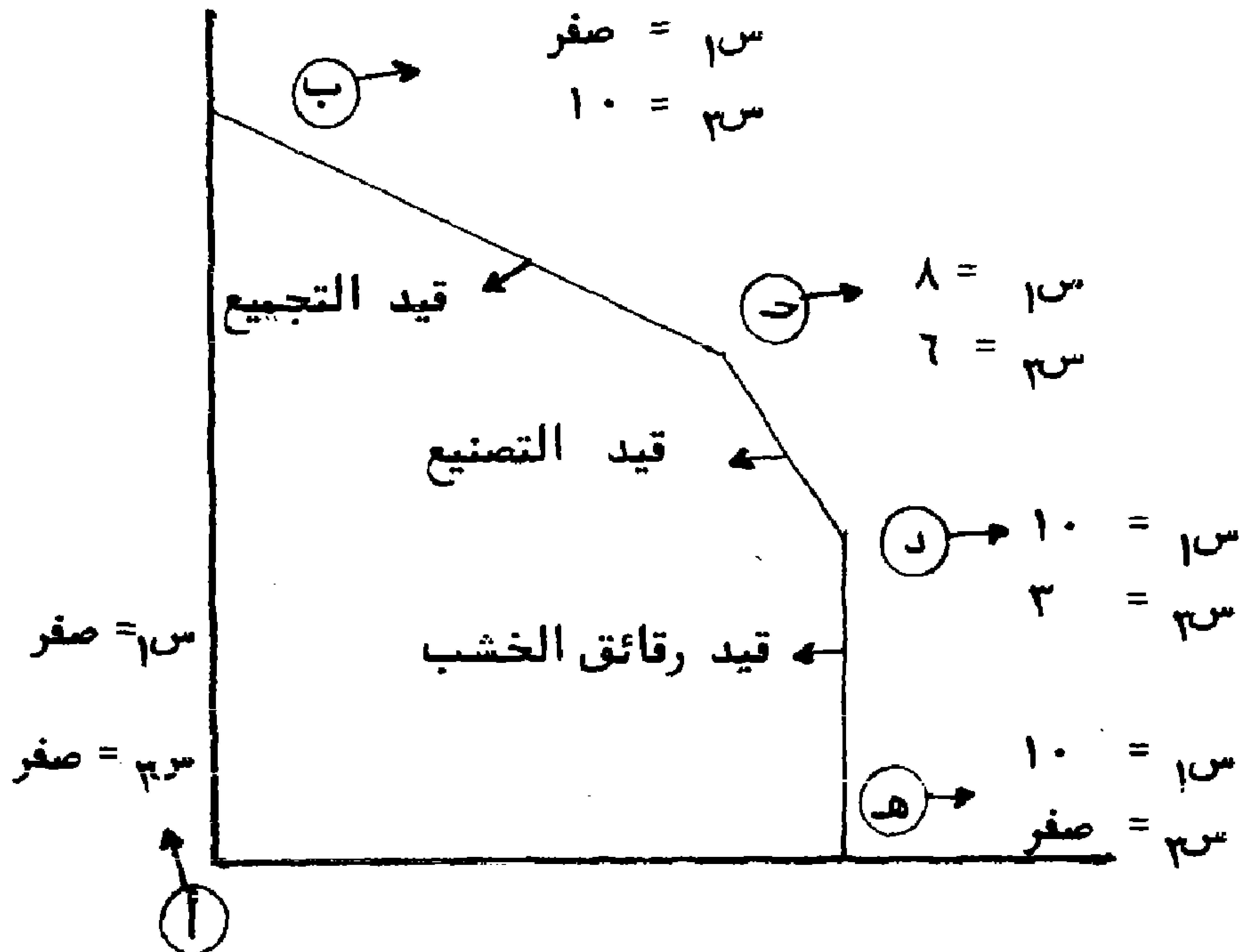
سنتعامل مرة اخرى مع المثال الذى سبق التعامل معه بالمدخل البيانى والذى تم وضع صياغته الرياضية على النحو التالى :

د (ر) = ٧ س ١ + ١٠ س ٢ ⟵ اقصى ربح ممكن

بشرط ان :

٣ س ١ + ٢ س ١ ≥ ٣٦	(قيد طاقة التصنيع)
٢ س ١ + ٤ س ٢ ≥ ٤٠	(قيد طاقة التجميع)
س ١ ≥ ١٠	(قيد رقائق الخشب)
س ١ ، س ٢ ≤ صفر	(شرط عدم السلبية)

وكان الشكل البيانى التالى يمثل منطقة الحلول الممكنة والنقاط الطرفية لهذه المشكلة .



ان ما نسعى الى توضيحه فى هذا المكان هو بيان كيف ان خطوات السمبلكس سوف تستخدم هذه النقاط الطرفية فى تناولها لحل المشكلة .

ان منهج طريقة السمبلكس تتطلب اختيار احد النقاط كحل اساسى من بين هذه النقاط الطرفية حتى تكون بمثابة نقطة بدء أو انطلاق نحو تتابع الخطوات وصولا للحل الامثل ، ونقطة الحل الاساسى او الحل المبدئى اصطلح على اختيارها بحيث تجعل الطاقات العاطلة بالاقسام الانتاجية أعلى ما يمكن وهذا بطبيعة الحال لا يحدث الا فى حالة عدم الانتاج ، أى عند النقطة الطرفية المنطبقة مع نقطة الاصل (أ) حيث تمثل هذه النقطة حالة عدم الانتاج حيث أن قيمة س ١ = صفر ، س ٢ = صفر ، وعندئذ تكون الطاقات العاطلة عند حدها الاعلى ويتم اختيار هذه النقطة كحل اساسى ممكن ، ثم نقوم بالتأكيد عما اذا ما كانت هذه النقطة الممكنة تمثل الحل الامثل أم لا ؟ ، ويتم ذلك عن طريق الوقوف على اثر التغيرات المحتملة والتى يمكن اجراؤها فى الحل على دالة الهدف . فاذا كان هناك اى تغيير فى الحل الحالى سيترتب عليه تحسين دالة الهدف عندئذ يمكن القول ان الحل الحالى غير أمثل Not Optimal ويتعين التحرك نحو هذا التغير المحتمل وسيستمر التحرك الى الحد الذى نجد عنده أن اى تغير محتمل سيخفض من دالة الهدف عندها نكون قد وصلنا الى الحل الامثل ويفضل ان نثبت عند هذا الحل دون اى تغيير آخر .

أن الحل الاساسى أو المبدئى الذى أشرنا الى أنه سيكون خطوة البداية فى طريقة السمبلكس وهو الحل عند نقطة الاصل هو حل ممكن جبريا حيث انه يقع على حدود منطقة الحلول الممكنة ، الا أنه بلا شك حل غير مرغوب فيه ماليا للشركة المنتجة ويتعين البحث عن حل أفضل ، وحيث أن *الهدف هو تعظيم الربح إذن يتعين*

الانتقال من حالة عدم الانتاج (والتى تمثلها نقطة الاصل) الى حالة الانتاج لان اى تغير فى قيم المتغيرات القرارية (اى انتاج كميات من س ١ ، س ٢) سيؤدى حتما الى زيادة قيمة دالة الهدف عما هى عليه فى نقطة الاصل .

وحيث أننا رفضنا النقطة (آ) كحل للمشكلة فانه يتعين الانتقال الى نقطة طرفية اخرى مجاورة أو متاخمة للنقطة (أ) Adjacent ، والنقطة الطرفية المجاورة هى النقطة التى يمكن الوصول اليها بالتحرك على طول احد الخطوط الممثلة للقيود ، وبالنظر الى الرسم البيانى السابق يتضح ان كل نقطة من النقاط الطرفية الموضحة بالشكل لها نقطتين طرفيتين متجاورتين ، فمثلا النقطتين (ب ، هـ) هما نقطتان طرفيتان متجاورتان للنقطة (أ) وهذا يعنى ان هناك امكانية اجراء تغييرين فى قيمة المتغيرات القرارية اذ بالتحرك الى النقطة الطرفية (ب) فانه يمكن انتاج اقصى ما يمكن من وحدات المتغير س ٢ ، واذا تحركنا الى النقطة الطرفية (هـ) فانه يمكن انتاج اقصى ما يمكن من وحدات المتغير س ١ ، ويصبح التساؤل عندئذ هو اى النقطتين يفضل ان ننتقل اليها ؟ .

ان المعيار او المقياس الذى سنقرر استناداعليه الى اى النقطتين سنتحرك هو مدى مساهمة كل منهما فى دالة الهدف ، فدالة الهدف سوف تزيد بمقدار عشرة جنيهات لكل وحدة تنتج من س ٢ ، وبمقدار ٧ جنيهات لكل وحدة من س ١ ، اى انه يمكن القول ان قيمة التغير فى دالة الهدف هى التى تحدد لنا الاتجاه الذى سنسلكه ، وحيث أن انتاج وحدة واحدة من س ٢ ستعمل على زيادة أكبر بدالة الهدف بالمقارنة بالزيادة الناتجة عن وحدة واحدة من س ١ ، لذا يتم اختيار الانتقال الى النقطة الطرفية (ب) .

وبعد الانتقال الى النقطة (ب) يظل السؤال مطروحا

وهو هل من الافضل الثبات عند النقطة (ب) ام التحرك الى نقطة اخرى ؟ اننا سنطبق نفس المعيار الذى اشرنا اليه فى الجزء السابق ، فالنقطة (ب) لهما نقطتان طرفيتان متجاورتان هما (ج) ، (أ) ، واحدى هاتين النقطتين (وهى النقطة أ) تعنى الرجوع الى النقطة الاصلية الاولى والتى سبق ان اختبرناها وتأكدنا انها لا تحقق اى ارباح اذن يمكن تجاهلها والتركيز باهتمامنا على النقطة (ج) ، ويكون سؤالنا الاساس هل من الافضل ان ننتقل الى هذه النقطة (ج) ام نظل كما نحن عند النقطة (ب) ؟ للاجابة على ذلك نقول اذا كان تحركنا الى النقطة (ج) سيعمل على تحسين دالة الهدف سننتقل اليها ، اما اذا كان تحركنا اليها سيكون سببا فى تخفيض قيمة دالة الهدف عما هى عليه عند النقطة (ب) فاننا سنظل كما نحن .

ان الانتقال من النقطة (ب) الى النقطة (ج) سيكون كما هو واضح من الرسم البيانى عبر الخط الممثل لقيد قسم التجميع والذى كانت معادلته على الصورة التالية :

٢ س ١ + ٤ س ٢ = ٤٠ (معادلة قيد قسم التجميع) .

وبالنظر الى التمثيل البيانى للخط المستقيم الممثل لمعادلة التجميع بالشكل السابق يتضح ان الانتقال عبر هذا الخط من النقطة (ب) الى النقطة (ج) يعنى زيادة الوحدات المنتجة من س ١ وتخفيض وحدات س ٢ ، ولكن هل تخفيض وحدة واحدة من س ٢ ينتج عنه زيادة وحدة واحدة من س ١ ؟ ان الاجابة على ذلك تتطلب النظر مرة اخرى الى معادلة التجميع والتي يتبين منها ان كل وحدة من س ١ تحتاج ساعتين من ساعات التجميع ، بينما كل وحدة من س ٢ تحتاج الى اربعة ساعات . وهذا يعنى ان تخفيض وحدة واحدة من انتاج س ٢ يترتب عليه وفر فى طاقة التجميع قدرها ٤ ساعات يمكن توجيهها لانتاج عدد ٢ وحدة من س ١ (حيث ان كل وحدة من س ١

تحتاج فقط ساعتين تجميع) . خلاصة القول ان كل وحدة يتم تخفيضها من س ٢ ستتيح الفرصة لانتاج وحدتين اضافيتين من س ١ وسيكون انعكاس هذا التبادل على دالة الهدف كالاتى :

تخفيض وحدة واحدة من س ٢ يؤدى الى تخفيض الارباح بمقدار ١٠ جنيهات وزيادة مقدارها ٢ وحدة من س ١ يؤدى الى زيادة الارباح بمقدار ١٤ جنيها ومحصلة ذلك كله ان الزيادة فى دالة الهدف ٤ جنيهات .

وهذا يعنى ان الانتقال من النقطة (ب) الى النقطة (ج) سيعمل على تحسين دالة الهدف ، اذن النقطة (ج) افضل من النقطة (ب) .

وعند النقطة (ج) سيظل تساؤلنا مطروحا ، وهوهل نقف عند هذه النقطة ام ننتقل منها الى نقطة اخرى ؟ للاجابة على ذلك نكرر ما سبق اتباعه عند الانتقال من نقطة لاخرى ، فالنقطة (ج) لها نقطتين طرفيتين متجاورتين وهما النقطة (ب) ، والنقطة (د) ،أما النقطة (ب) فقد سبق وان اوضحنا انها لا تمثل حلا امثلا لان النقطة (ج) افضل منها ، لذلك سيتم استبعادها ويتم التركيز على المقارنة بين النقطة (ج) الحالية والنقطة (د) .

ان الانتقال من النقطة (ج) الى النقطة (د) سيكون كما هو واضح من الرسم البيانى عبر الخط الممثل لقيد قسم التصنيع والذى كانت معادلته على الصورة التالية

٣ س ١ + ٢ س ٢ = ٣٦ (معادلة قيد قسم التصنيع)

وبالنظر الى التمثيل البيانى للخط المستقيم لمعادلة التصنيع بالشكل البيانى السابق يتضح ان الانتقال عبر هذا الخط من النقطة (ج) الى النقطة (د) يعنى زيادة الوحدات المنتجة من س ١ وتخفيض وحدات س ٢ ، وسيكون حساب معدل الزيادة والتخفيض كالاتى :

حيث ان تخفيض وحدة واحدة من س ٢ يعنى توفير عدد ٢

ساعة من ساعات التصنيع يمكن استغلالها فى انتاج وحدات من س ١ ، الا ان كل وحدة من س ١ تحتاج ٣ ساعات تصنيع اى ان هذا التوفير يعمل على انتاج $\frac{٢}{٣}$ وحدة من س ١ فقط . وبلغة الارباح فان تخفيض وحدة واحدة من س ٢ هو بمثابة تخفيض فى الارباح بمقدار عشرة جنيهات ، وزيادة $\frac{٢}{٣}$ وحدة من س ١ معناه زيادة الارباح بمقدار $\frac{٢}{٣}$ ٤ جنيه ($\frac{٢}{٣} \times ٧ = \frac{٢}{٣}$ ٤ جنيه) وبذلك تكون المحصلة النهائية للربح الناتج عن هذا التغير :

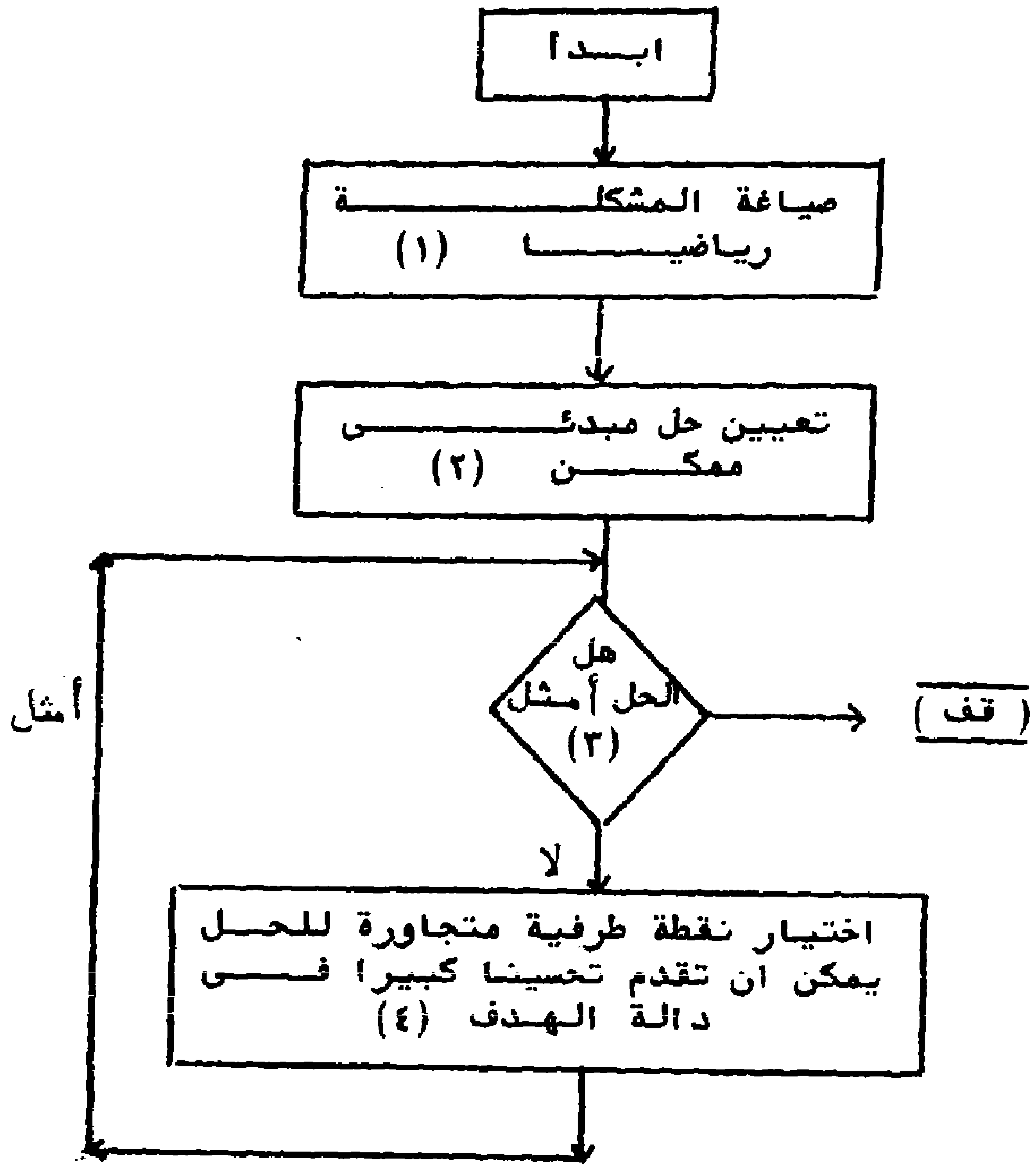
$- ١٠ + \frac{٢}{٣}$ ٤ $= - \frac{١}{٣}$ ٥ جنيه

اى ان المحصلة بالسالب وهذا يعنى ان هذا التبديل سيخفض قيمة دالة الهدف ، وحيث ان هدفنا هو تعظيم دالة الهدف ، لذلك فاننا لسنا فى حاجة الى التحرك الى النقطة (د) . وبذلك تكون النقطة الطرفية (ج) هى نقطة الحل الامثل .

هذه هى الخطوات المنهجية لطريقة السمبلكس ويمكن ان يلاحظ منها انه قد تم التوصل الى الحل الامثل عن طريق اختيار ثلاثة نقاط فقط من النقاط الخمسة الطرفية الممكنة ، وبالنسبة للمشاكل الكبيرة سنجد ان منهج السمبلكس سيأخذ فى اعتباره عدد صغير جدا من الحلول الممكنة عند النقاط الطرفية ، ان قوة طريقة السمبلكس لا تأتى فقط من قدرتها على حل مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة ، انما من كفاءتها ايضا وفاعليتها فى الوصول الى الحل الامثل من خلال اختبارات منظمة لعدد صغير من الحلول الممكنة .

خطوات منهج السمبلكس :

خريطة التتابع التالية تقدم ملخصا للخطوات العامة للحل والتى تشكل فى مجملها منهج او اجراءات طريقة السمبلكس .



ويتضح من خريطة التتابع السابقة ان منهج السمبلكـــس يتضمن اربعة خطوات منها خطوتين يتمان بصورة تكرارية حتى يتم الوصول الى الحل الامثل ، هذه الخطوات الاربعـــة اجمالا هى :

أولا: الصياغة الرياضية للمشكلة Formulate the problem Mathematically

وذلك بتحديد المتغيرات القرارية ، ووضع دالـــة الهدف ، وصياغة القيود المفروضة على الحل ، ولقد سبق ان تناولنا فى مقدمة الفصل الاول الكيفية التى يتم بهـــا اعداد الصياغة الرياضية لمشكلة البرمجة الخطية .

ثانيا: تعيين حل مبدئى(اولى)ممكن

Determine an Jnitial Feasible Solution

وذلك عن طريق اختيار احدى النقاط الطرفية كحـــل اساسى ممكن ، ويجدر التنويه هنا الى انه على الرغم مـــن انه يمكن اختيار اى نقطة من النقاط الطرفية كحل اساسى

ممكن ، الا انه من المتبع غالبا او من المألوف في مشاكل تعظيم دالة الهدف ان يتم اختيار نقطة الاصل كحل اساس ممكن والتي تكون عندها قيم جميع المتغيرات القرارية مساوية للصفر اى حالة عدم انتاج اى من المتغيرات القرارية .

ثالثا : اختبار نقطة الحل المبدئى من حيث كونها يمكن ان تمثل نقطة الحل الامثل ام لا ؟ ويتم ذلك عن طريق تحديد التغير فى قيمة دالة الهدف والذى يمكن ان يحدث اذا ما تم الانتقال الى نقطة طرفية مجاورة . فاذا لم تكن النقطة المتجاورة تعطى قيمة احسن لدالة الهدف فهذا يعنى ان النقطة الطرفية الحالية هى نقطة الحل الامثل وينتهى بذلك حل المشكلة . أما اذا اتضح ان هناك نقطة او اكثر من تلك النقاط المتجاورة احسن من النقطة الحالية فى تحسين دالة الهدف هنا يتعين الانتقال الى الخطوة الرابعة .

رابعا : اختيار نقطة طرفية مجاورة تعمل على اكبر تحسين فى دالة الهدف .

وينبغى ملاحظة ان الحلقة التى تربط الخطوتين الثالثة والرابعة (كما هو موضح بالشكل) تسمى حلقة تكرارية اى يتم تكرار هاتين الخطوتين حتى يتم التوصل الى الحل الامثل ، وتشمل الخطوات الاربع السابقة الخطوات العامة لمنهج السمبلكس ، وحتى يمكن تفهم العمليات الحسابية المطلوب القيام بها فى كل من هذه الخطوات ، فاننا سنستعرض فيما يلى بالتفصيل هذه الخطوات وسنقوم باجراء العمليات الحسابية لكل خطوة وبالتطبيق على ذات المثال الذى يمثل مشكلة شركة القاهرة للصناعات الهندسية وهى التى سبق لنا حلها بالطريقة البيانية .

حل مشاكل التعظيم بطريقة السمبلكس

الخطوة الاولى : صياغة المشكلة واضافة المتغيرات الراكدة .

Formulating the problem and Adding Slack variables.

لقد كانت الصياغة الرياضية التى تم وضعها لمشكلة شركة القاهرة للصناعات الهندسية على الوجه التالى :

تعظيم ٧ س ١ + ١٠ س ٢ (دالة الهدف)

بشرط ان

٣ س ١ + ٢ س ٢ ≥ ٣٦ (قيد التصنيع)

٢ س ١ + ٤ س ٢ ≥ ٤٠ (قيد التجميع)

س ١ ≥ ١٠ (قيد رقائق الخشب)

س ١ ، س ٢ ≤ صفر (عدم السلبية)

وكما كان الحال فى طريقة الرسم البيانى اذ كان يلزم لاتمام التمثيل البيانى ان يتم تحويل متباينات القيود الى معادلات ، ولقد كان ذلك يتم عن طريق الاهمال المؤقت للاشارة ، على ان تسترد الاشارة بتحديد اتجاه القيد فى الرسم البيانى ، كذلك فان طريقة السمبلكس تستلزم تحويل كل المتباينات الى معادلات ولكن ذلك لن يتم بالطريقة التى اتبعت فى الرسم البيانى بالاهمال المؤقت للاشارة ، حيث ان طريقة السمبلكس لا تستخدم الرسم فى الحل حتى نقول انه يمكن استرداد الاشارة التى استبعدت مؤقتا ، لذلك كان من الضرورى البحث عن اسلوب آخر عن طريقة نتمكن من تحويل المتباينات الى معادلات ، ووفقا لمنهج السمبلكس يتم تحويل كل المتباينات الى معادلات وذلك من خلال اضافة او طرح ما أصطلح على تسميته المتغيرات الراكدة Slack Variables وكل متغير راكد يضاف الى قيد معين انما يعبر عن مقدار الطاقة غير المستغلة بذلك القيد الذى اضيف اليه المتغير الراكد ، وسوف نستخدم الرمز (س) ليعبر عن المتغير الراكد مع تمييزه من قيد لاخر برقم يضاف اليه وعلى ان يكون أول متغير راكد يأخذ الرقم التالى للرقم الذى تم به تمييز آخر متغير قرارى ففى مثالنا هذا مثلا نجد ان آخر متغير قرارى قد أخذ الرمز والرقم (س ٢) ، اذن اول متغير راكد سيأخذ الرمز والرقم س ٣ وهكذا لباقى المتغيرات الراكدة بتسلسل الارقام وفق تتابعها ، ويتعين قبل الدخول فى

تطبيق هذه الخطوة على المثال الذى نحن بصدده ان نحدد اولا كيفية اضافة المتغيرات الراكدة الى القيود فى مختلف حالاتها :

(أ) اذا كانت المتباينة فى صورة $\geq$ (اقل من أو يساوى) فان المتغير الراكد يضاف للجانب الايمن حيث انه الجانب الاقل وبالتالى فان اضافته الى ذلك الجانب الايمن تتحول المتباينة الى معادلة .

(ب) اذا كانت المتباينة فى صورة $\leq$ (اكبرمن أو يساوى) فان المتغير الراكد يظهر مطروحا من الجانب الايمن وهو الجانب الراكد ولكن يجب التنويه هنا ان المتغيرات الراكدة لابد ان تكون غير سالبه لان الطاقة المستغلة للمتغيرات القرارية لن تتعدى اجمالى الطاقة المتاحة ، ولمعالجة مشكلة ظهور المتغيرات الراكدة بمعاملات سالبة فاننا نحتاج الى اضافة متغير مكمل لكل قيد يكون فيه المتغير الراكد له قيمة سالبة ، وهذه المتغيرات الجديدة تسمى المتغيرات الوهمية او الاصطناعية Artificial Variables ، وسنعود الى تفصيل ذلك عند التعرض لحل مشاكل البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس (مشاكل تخفيض التكلفة) .

(ج) اذا كان القيد فى شكل معادلة وبالتالى لسنا فى حاجة الى استخدام متغير راكد فانه من الضرورى اضافة متغير اصطناعى .

ولتحويل متباينات قيود الصياغة الرياضية للمشكلة التى نبحث عن الحل الامثل لها الى معادلات يتم الاتى :

٣ س ١ + ٢ س ٢ + س ٣ = ٣٦ (معادلة التصنيع)

٢ س ١ + ٤ س ٢ + س ٤ = ٤٠ (معادلة التجميع)

س ١ + س ٥ = ١٠ (معادلة رقائق الخشب)

الخطوة الثانية : اعداد الجدول المبدئى للحل

Preparing the Initial Tableau

قد يكون من المناسب اولا ان نوضح الشكل الذى يأخذه جدول السمبلكس والجدول التالي يوضح الهيكل الاساسى لجدول السمبلكس وسنجد ان اعمدة وصفوف ذلك الجدول تتضمن مجموعة من العناوين تشير الى معنى العمود أو الصنف وسيتم توضيح معناها ومفهومها حين الاستخدام الفعلي للجدول حتى نبتعد عن وضع تعريفات نظرية بعيدة عن التطبيق ، اذ من المستحسن ان نشير الى كل عمود وصف حين الحل الفعلي للمثال الذى نتناوله بالحل .

جدول السمبلكس

معاملات دالة الهدف للمتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة القيم	
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	
		صافي التغير	

معاملات دالة الهدف لجميع المتغيرات

اسماء جميع المتغيرات الاساسية وغير الاساسية

معاملات القيود لكافة المتغيرات

مقدار الانخفاض في دالة الهدف الناشئة بسبب زيادة وحدة واحدة في قيمة المتغير غير الاساسي .

اسماء المتغيرات الاساسية

معاملات دالة الهدف للمتغيرات الاساسية

قيمة صافي التغير والتي تمثل الفرق بين الارباح الداخلة والتكاليف الداخلة لكل وحدة زيادة من كل متغير من المتغيرات غير الاساسية .

القيم الجارية للمتغيرات الاساسية

قيمة دالة الهدف

ولاعداد الجدول المبدئى نقوم بالخطوات التالية :

(١) <u>عناوين الجدول</u> Tableau Headings

بداية اعداد الجدول المبدئى هى كتابة اسماء جميع المتغيرات وقيمة معاملاتها فى دالة الهدف فى اعلى صفين جهة اليسار من الجدول ، فالصف الاول امام عنوان الارباح الداخلة يتضمن دالة الهدف اى ربح الوحدة بكل منتج ، وحيث ان ربح الوحدة من س ١ = ٧ جنيهات ، ومن س ٢ = ١٠ جنيهات لذلك يتضمن صف دالة الهدف ٧ جنيه اعلى المتغير س ١ ، ١٠ جنيه اعلى س ٢ ونظرا لان المتغيرات س ٣ ، س ٤ ، س ٥ متغيرات راكدة لذلك نجد ان المعامل الخاص بكل منها فى دالة الهدف صفر اى ان هذه المتغيرات لا تدر ربحا ٠

ثم يتم استكمال اول عمودين على يمين الجدول وذلك بكتابة المتغيرات الاساسية فى الحل المبدئى بالعمود الثانى ، اما العمود الاول فيخصص لتسجيل معاملات دالة الهدف لهذه المتغيرات الاساسية بحيث يكون كل معامل مقابل للمتغير الخاص به ، ويجدر فى هذا المقام ان نحدد اولا ما هو المقصود باصطلاح المتغيرات الاساسية Basic Variables ،من المعروف مثلا ان النقطة الطرفية (ا) قيم المتغيرات س ١ ، س ٢ بها تساوى صفر لانها حالة عدم انتاج عندئذ نقول ان كل من س ١ ، س ٢ متغيرات غير اساسية عند النقطة (أ) ،لانها تاخذ قيما صفرية ، وعند النقطة (ا) سنجد ان كل الطاقات الخاصة بالتصنيع والتجميع ورقائق الخشب عاطلة وغير مستغلة ، أى ان س ٣ وهى ترمز للطاقة العاطلة بقسم التصنيع = ٣٦ ساعة ،و س ٤ وهى ترمز للطاقة العاطلة بقسم التجميع ٤٠ ساعة ، ورقائق الخشب العاطلة س ٥ = ١٠ وحدات ، اى ان هذه المتغيرات الراكدة قيمتها عند النقطة (ا) موجبة لذا يطلق عليها متغيرات اساسية اذن يمكن القول ان المتغيرات التى لها قيم صفرية يطلق عليها متغيرات غير اساسية ، اما المتغيرات التى لها

قيم غير صفرية فيطلق عليها متغيرات اساسية • ووصف المتغيرات بانها اساسية او غير اساسية سوف تتغير باستمرار كلما انتقلنا من نقطة طرفية لاخرى ، ولكن عدد المتغيرات الاساسية او غير الصفرية سيظل ثابتا ، وفى الحقيقة فان النظرية الاساسية للبرمجة الخطية تنص على " سيوجد دائما عددا من المتغيرات الاساسية بنفس عدد القيود الموجودة " •

وحيث ان الصياغة الرياضية للمشكلة التى نعالجها الان تحوى ثلاثة قيود لذلك سنجد ان هناك ثلاثة متغيرات لها قيم غير صفرية " متغيرات اساسية " ، وهذه المتغيرات الاساسية هى المتغيرات الراكدة بالنسبة للحل المبدئى •

واستنادا على المفهوم السابق فان عمود المتغيرات الاساسية سيتم التسجيل فيه من واقع هذا المفهوم اذ سيتم شغله بالمتغيرات الاساسية (الراكدة بالنسبة للجدول المبدئى) وهى على الترتيب س ٣ ، س ٤ ، س ٥ ويسجل فى العمود الاول امام كل منها قيمة معامل الهدف لها وهى فى الجدول المبدئى صفرا لكل منها •

وبتسجيل تلك البيانات بالجدول المبدئى سيظهر على الشكل التالى :

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٧	١٠	صفر	صفر	صفر
		القيم	س١	س٢	س٣	س٤	س٥
صفر صفر صفر	س ٣ س ٤ س ٥						
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة					
		صافى التغير					

(٢) جسم الجدول Body of the Tableau

وفى هذه المرحلة نبدأ بتسجيل معادلات القيود فى جسم الجدول مبتدئين بقيمة المعادلة ، فمثلا الصف الاول والذى يوجد به المتغير الاساسى س ٣ يوجد بالمعادلة الاولى لذا يتم تسجيل المعادلة الاولى بكاملها فى هذا الصف مبتدئين بقيمة المعادلة والتى تبلغ ٣٦ ، ثم يتم تسجيل معاملات المعادلة الاولى وفقا للمتغيرات على رأس كل عمود ، اى ان يكون كل معامل تحت المتغير المتعلق به فى الاعمدة فمثلا ٣ س ١ يتم تسجيلها بوضع رقم ٣ فى عمود س ١ ، كذلك ٢ س ٢ يتم تسجيلها بوضع رقم ٢ فى عمود س ٢ والرقم ١ فى عمود س ٣ ثم تسجل الرقم صفر فى كل من عمود س ٤ ، س ٥ لان معادلة التصنيع لا يوجد بها اى من هذين المتغيرين اى ان قيمتها بتلك المعادلة = صفر ، وبذلك نكون قد انتهينا من الصف الاول (صف س ٣) ، وبنفس الطريقة نقوم بتسجيل معاملات معادلة قسم التجميع فى الصف الثانى (صف س ٤) ، وهكذا .

وبانتهاء تسجيل كافة معاملات القيود بجسم الجدول فان الجدول المبدئى بعد ذلك التسجيل سيظهر على الشكل التالى :

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٧	١٠	صفر	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥
صفر	س٣	٣٦	٣	٢	١	صفر	صفر
صفر	س ٤	٤٠	٢	٤	صفر	١	صفر
صفر	س ٥	١٠	١	صفر	صفر	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة					
		صافي التغير					

وقبل ان نواصل استكمال الحل بالجدول المبدئي ، فانه يجدر بنا ان نلفت النظر انه يوجد جزء من جسم هذا الجدول يتعلق بالمتغيرات الاساسية له تكوين خاص يطلق عليه مصفوفة اساسية Basic Matrix ، وهذا الجزء هو المحدد بصفوف المتغيرات الاساسية والاعمدة الخاصة بتلك المتغيرات الاساسية ، ففي الجدول السابق تظهر تلك المصفوفة الاساسية على الشكل التالي :

	س ٣	س ٤	س ٥
س ٣	١	صفر	صفر
س ٤	صفر	١	صفر
س ٥	صفر	صفر	١

ونلاحظ من هذه المصفوفة أن لها خاصية واضحة اذ يظهر الرقم (١) في تقاطع صف المتغير الاساس وعموده ، بينما تظهر القيمة صفر فيما عدا ذلك ، وسوف يحدث في

كل جدول من جداول تحسين الحل مع اختلاف واضح وهـو ان اماكن ظهور الرقم (١) او الرقم (صفر) ستتغير مـع التغير الذى سيحدث فى اماكن المتغيرات الاساسية الـتى ستدخل فى الجزلات التالية للحل ، ولكن العلاقـة الثابتة التى لن تتغير فى المصفوفة الاساسية هـو أن الرقم (١) لابد ان يظهر عند تقاطع صف المتغير الاساسى مع عموده ، والصفر يظهر فيما عدا ذلك ، وسوف نستخدم هذه الخاصية فى تخطى بعض العقبات التى قد تلحق بحـل بعض المشاكل بطريقة السمبلكس كما سيظهر فى جـزء متقدم من هذا الكتاب الى هذا الحد نجد ان الجـدول المبدئى يحتاج الى بعض العمليات الحسابية لاستكمالـه وهو ما سيرد ذكره فيما يلى :

(٣) دالة الهدف Objective Function

الجزء المخصص لدالة الهدف بالجدول سيستعمل لشغلـه بقيمة دالة الهدف للحل الذى يمثله الجدول ، وعلـى الرغم من معرفتنا المسبقة بان قيمة دالة الهـدف بجدول الحل المبدئى هى صفر ، حيث ان قيمة المتغيـرات القرارية بهذا الجدول تساوى صفر لانه جدول يمثل حالـة عدم الانتاج ، الا انه يتعين توضيح الكيفية التى يتـم بها حساب قيمة دالة الهدف عند اى جدول فى اى مرحلـة من مراحل الحل .

يتم حساب قيمة دالة الهدف للحل الذى يمثله الجدول بصفة عامة سواء كان الجدول المبدئى او الجـداول التالية ، عن طريق ضرب معامل دالة الهدف للمتغيـر الاساس فى قيمة هذا المتغير بذات الجدول ويتم ذلـك لكل المتغيرات الاساسية ، وبجمع حواصل الضرب لكـل المتغيرات يكون الناتج هو قيمة دالة الهدف للحـل الذى يمثله الجدول أى ان :

قيمة دالة الهدف = مج (معامل دالة الهدف للمتغيـر

الاساس) x (قيمة المتغير الاساسى فى الجدول)

= صفر x ٣٦ + صفر x ٤٠ + صفر x ١٠ = صفر

ويتم تسجيل هذه القيمة فى المكان المخصص لها بالجدول

(٤) التكاليف الداخلة : Entering Costs

أما الصف الذى يوضح التكاليف الداخلة فى الجدول فانه يمثل الخسارة فى قيمة دالة الهدف الحالية والتى تنشأ نتيجة زيادة كل متغير من المتغيرات غير الاساسية بوحدة واحدة ، ولتوضيح ذلك نقول أن المتغير س ١ هو متغير غير اساسى فى الجدول المبدئى ويكون التساؤل هو ماذا لو انتجنا وحدة واحدة من س ١، بالنظر الى عمود هذا المتغير فى الجدول المبدئى سنجد ان الاجابة هى انه اذا فكرنا فى زيادة المتغير س ١ بمقدار وحدة واحدة فان ذلك يترتب عليه التخلى عن ٣ وحدات من س ٣ ، ووحدتين من س ٤ ، ووحدة واحدة من س ٥ ، اى ان التضحية او الخسارة التى تحدث فى قيمة دالة الهدف والتى تنشأ بسبب زيادة المتغير س ١ بمقدار وحدة واحدة تساوى مجموع حواصل ضرب كل من معاملات الاحلال هذه مضروبة فى معامل دالة الهدف المقابل لهذه المتغيرات ، أى انها باختصار تساوى مجموع حواصل ضرب معاملات العمود الاول x معاملات عمود المتغير غير الاساسى .

التكلفة الداخلة لكل متغير = مجـ (معامل دالة الهدف المتغير الاساسى) x (معامل القيد لذلك المتغير) فالتكاليف الداخلة للمتغير س ١ = صفرx ٣ + صفر x ٢ + صفر x ١ = صفر .

والتكاليف الداخلة للمتغير س ٢ = صفر x ٢ + صفرx ٤ + صفر x صفر = صفر .

وهكذا بالنسبة لباقى المتغيرات ، ويتم تسجيل القيم التى نحصل عليها فى المكان المخصص لها بالجدول

فى صف التكاليف الداخلة .

(٥) صافى التغير   Net Change

والصف الخاص بصافى التغير فانه يسجل الفرق بين قيمة الارباح الداخلة والتكاليف الداخلة لكل عمود من الاعمدة التى تمثل المتغيرات جميعها ، ويتم الحصول على قيمة صافى التغير لكل عمود عن طريق طرح التكاليف الداخلة والمسجلة فى الصف قبل الاخير من الارباح الداخلة والمسجلة باعلى صف بالجدول ، أى ان :

صافى التغير عند اى عمود = (الارباح الداخلة بالعمود) ـ (التكاليف الداخلة بالعمود) .

ولكن ماذا نعنى بصافى التغير . أو ما هو مغزاه ؟ .

لقد سبق القول انه اذا تم التفكير فى زيادة المتغير غير الاساسى وليكن س ١ بمقدار وحدة واحدة فان ذلك يترتب عليه التخلى عن ٣ وحدات من س٣ ، ووحدتين من س٤ ، ووحدة واحدة من س ٥ ، فصافى التغير يعنى اذن محصلة هذا الاحلال ، فزيادة س ١ بمقدار وحدة واحدة سيعطى ارباحا داخلة مقدارها ٧ جنيهات (وهى معامل س ١ بدالة الهدف) ولكن سيترتب على ذلك التضحية السابق ذكرها والتى كانت فى مجموعها بالنسبة للجدول المبدئى = صفر ، اذن صافى التغير كان لصالح هذا الاحلال .

وبانتهاء العمليات الحسابية السابقة تكون قد انتهينا من اعداد الجدول المبدئى للحل والذى سيظهر فى صورته الكاملة على الشكل التالى :

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٧	١٠	صفر	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥
صفر	س ٣	٣٦	٣	٢	١	صفر	صفر
صفر	س ٤	٤٠	٢	٤	صفر	١	صفر
صفر	س ٥	١٠	١	صفر	صفر	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	صفر	صافى التغير	٧	١٠	صفر	صفر	صفر

الخطوة الثانية : اختبار المثالية Checking optimality

الخطوة الثانية والتى تلى اعداد الجدول المبدئى وفقا لخطوات منهج السمبلكس هى اختبار مثالية ذلك الحل الذى يقدمه الجدول المبدئى ، او بمعنى آخر هى الاجابة عن التساؤل التالى : هل الحل الذى يقدمه الجدول المبدئى يمثل حلا امثل ، ام ان هناك امكانية لتحسينه وزيادة قيمة دالة الهدف ؟ ويمكن ان نقوم بذلك الاختبار من خلال مجرد النظر الى القيم الموجودة بالصف الاخير وهى قيم صف صافى التغير ، فلقد سبق القول ان قيمة صافى التغير فى اى عمود تشير الى محصلة عملية الاحلال لوحدة واحدة من المتغير الممثل للعمود ، وعليه فان قيم صافى التغير الموجبه تشير الى ان محصلة عملية الاحلال ستكون فى صالح دالة الهدف اذ انها ستعمل على زيادة قيمتها ، اما القيم السالبة لصافى التغير فانها تعنى ان محصلة عملية

الاحلال فى غير صالح دالة الهدف لانها ستخفض فى قيمتها فى الوقت الذى نسعى فيه الى زيادة وتعظيم دالة الهدف (ذلك فى مشاكل تعظيم دالة الهدف) .

وتأسيسا على ذلك فانه يمكن القول كقاعدة عامة " انه طالما وجد ان هناك ولو متغير واحد من كافة المتغيرات له قيمة صافى تغير موجبة فان ذلك يعنى انه يمكن تحسين الحل ، اى ان الحل الموجود بذلك الجدول لا يمثل الحل الامثل ولكن هناك امكانية تحسينه وعليه فان الجدول الذى يقدم الحل الامثل لابد وان يخلو تماما من القيم الموجبة بصف صافى التغير ، وان تكون قيم ذلك الصف اما سالبة و / او صفرية " .

وبتطبيق هذه القاعدة على جدول الحل المبدئى نجد انه لا يمثل جدولا للحل الامثل لانه يتضمن قيمتين موجبتين فى صف صافى التغير وهما ٧ فى عمود المتغير س ١ ، ١٠ فى عمود المتغير س ٢ ، لذلك فاننا يجب ان نسعى للوصول الى حل احسن وبذلك نقوم باعداد الجدول الثانى لتحسين الحل .

ملاحظة هامة :

تأخذ بعض المراجع بشكل مختلف الى حد ما فى تصوير جدول السمبلكس مما ينعكس اثره على كيفية اجراء اختبار مثالية الحل ، ولعل القارئ قد يقع فى حيرة عندما يجد ان اختبار المثالية والقاعدة العامة التى ارتكزنا عليها هنا تختلف عن بعض تلك المراجع بحيث تأتى على عكسها تماما ، والحقيقة انه لا اختلاف فى المنهج والتفكير والاسلوب فى خطوات منهج السمبلكس ، ولكن الاختلاف ينشأ فقط فى ايجاد القيم التى سيتم الحكم من خلالها على اختبار المثالية ، ففى مرجعنا هذا يتم اختبار المثالية من واقع صف صافى التغير والذى حصلنا على قيمه المختلفة من المعادلة التالية :

صافى التغير = الارباح الداخلة ـ التكاليف الداخلة
فى حين ان بعض المراجع الاخرى يتم فيها اختبار المثالية من واقع صف يطلق عليه صف اختبار المثالية او صف (ك ـ ر) اى التكاليف ـ الارباح اى مستخلص من المعادلة التالية :

ك ـ ر = التكاليف الداخلة ـ الارباح الداخلة

وبمقارنة المعادلتين السابقتين يتضح ان الاختلاف يوجد فى تقديم احدى القيم على الاخرى ، وعليه فان بعض المراجع الاخرى تذكر (وفقا لطريقة حسابها) أنه طالما ان صف اختبار المثالية به قيم سالبة فان ذلك يعنى عدم الوصول الى الحل الامثل .

وبناء على التوضيح السابق فانه لا يوجد اختلاف فى المنهج والطريقة ، وان كنا نفضل ما ورد بتحليلنا اذ ان الرقم الموجب يعطى انطباع بان هناك امكانية زيادة الارباح مما يعنى ان الحل غير امثل (فى مشاكل التعظيم) وان الرقم السالب يعطى شعور واحساس بأن تغيير الحل سيترتب عليه تخفيض دالة الهدف ، ولقد كان من الضرورى ذكر هذه *الملاحظة حتى لا يقع القارىء* فى حيرة اذا كان يتعامل مع اكثر من مرجع تختلف فيما بينها فى القاعدة التى ترتكز عليها فى اختبار المثالية .

الخطوة الثالثة : تحسين الحل Improving the Solution

توصلنا من الخطوة السابقة ان الحل الذى بدأنا به وهو الحل المبدئى عند نقطة الاصل لا يمثل الحل الامثل بدليل وجود ارقام موجبة فى صف صافى التغير ، ولذلك لابد من التحرك نحو حل جديد ينقلنا من جدول السمبلكس الاول الى جدول السمبلكس الثانى ويتم ذلك وفقا للخطوات التالية :

(١) <u>اختيار المتغير الداخل</u> Choosing the Entering Variable

تبين من اختبار المثالية بالجدول المبدئى ان هناك متغيرين غير اساسيين لهما قيمة موجبة فى صف صافى التغير وهما المتغير س ١ ، والمتغير س ٢ ، ولقد سبق وان ذكرنا ان قيمة صافى التغير تعنى محصلة عملية الاحلال لوحدة واحدة من المتغير الممثل للعمود ، وان قيم صافى التغير الموجبة تشير الى ان محصلة عملية الاحلال ستكون فى صالح دالة الهدف ، اذن من المنطقى كلما زادت قيمة صافى التغير الموجبة كان ذلك افضل لتحسين دالة الهدف ، وعليه فاننا نختار المتغير الداخل الذى سيقدم اكبر زيادة فى دالة الهدف للوحدة الواحدة ، اى اننا نختار المتغير ذات اكبر قيمة موجبة فى صف صافى التغير ليكون هو المتغير الداخل الذى سيدرج ضمن المتغيرات الاساسية فى عمود المتغيرات الاساسية بالجدول الجديد .

وبتطبيق تلك القاعدة على جدول الحل المبدئى يتضح ان اكبر معامل موجب فى صف صافى التغير هو القيمة ١٠ وهى القيمة التى توجد اسفل عمود س ٢ ، لذلك فاننا نختار المتغير س ٢ ليكون هو المتغير الداخل .

(٢) <u>اختيار المتغير الخارج</u> Selecting the Departing Variable

لاختيار المتغير الخارج والذى سيحل محله المتغير الداخل ، فانه ينبغى اختبار القيود المفروضة على قيمة المتغير الداخل ، وحيث ان المتغير الداخل سيكون هو المتغير س ٢ وهو لا يوجد الا فى القيد الاول والثانى لذلك سيكون تركيز الاختبار الذى سنقوم به منصب على القيدين الخاص بالتصنيع والتجميع .

أ ــ قيد التصنيع ٣ س ١ + ٢ س ٢ $\geqslant$ ٣٦

وهذا يعنى ان طاقة قسم التصنيع تسمح بانتاج ١٨ وحدة من س ٢ ($\frac{٣٦}{٢}$ = ١٨) .

ب ــ قيد التجميع ٢ س ١ + ٤ س ٢ $\geqslant$ ٤٠

وهذا يعنى ان طاقة قسم التجميع تسمح بانتاج ١٠ وحدات من س ٢ ($\frac{٤٠}{٤}$) .

وحيث ان عدد ١٠ وحدات من س ٢ هى اكثر تحديدا من ١٨ وحدة ، لذلك سنجد ان قيد التجميع هو الذى يحدد قيمة المتغير س ٢ فى الحل الجديد ، ومعنى ذلك ان س ٤ والتى تمثل المتغير الراكد فى قيد التجميع ستصل الى الصفر بانتاج ١٠ وحدات من س ٢ وطالما انها وصلت الى قيمة صفرية اذن اصبحت متغير غير اساسى لذلك يخرج هذا المتغير الخارج ويحل محله س ٢ المتغير الداخل .

ولكن كيف يتم اجراء تلك العمليات الحسابية من واقع جدول السمبلكس ؟ سنقوم بتحديد ذلك من خلال قسمة قيم المتغيرات الاساسية بالجدول المبدئى على المعاملات المقابلة بها بعمود المتغير الداخل ويكون المتغير الخارج هو صاحب اصغر خارج قسمة موجب وبتطبيق ذلك على مثالنا نجد : (هذه العملية الحسابية تتم على يسار الجدول) .

المتغيرات الاساسية	القيم		عمود س ٢ (الداخل)		خارج القسمة
س ٣	٣٦	÷	٢	=	١٨
س ٤	٤٠	÷	٤	=	١٠
س ٥	١٠	÷	صفر	=	∞

وعلى ذلك فان المتغير الخارج هو س ٤ لانه صاحب اصغر خارج قسمة .

(٣) <u>تحديد القطب او المفتاح</u> Key or Pivot

ويطلق على القيمة او الرقم الواقع عند تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج اسم القطب او المفتاح وهو فى مثالنا هذا يمثل الرقم (٤) .

(٤) اعداد الجدول الثانى للحل

بعد الانتهاء من اختيار المتغير الداخل (س ٢) وتحديد المتغير الخارج (س ٤) يمكننا ان نعد جدول الحل الثانى • وينبغى ان نلاحظ ان بعض عناصر الجدول الجديد سوف تكون هى نفسها تماما كما كانت بالجدول السابق لذلك يمكن كتابتها مباشرة دون انتظار اجراء اى تعديل عليها ، وهذه العناصر هى عناوين الاعمدة والصفوف وكذلك معاملات دالة الهدف الموجود فى اعلى صف بالجدول امام صف الارباح الداخلة اما باقى العناصر فيتم الحصول على قيمها الجديدة من خلال بعض العمليات الحسابية كالاتى :

(أ) يتم كتابة المتغيرات الاساسية تحت العمود الخاص بها بعد التعديلات التى ادخلت عليها وهى اخراج المتغير س ٤ ويحل محله المتغير س ٢ (لا داعى لاعادة ترتيب المتغيرات الاساسية ولكن المتغير الداخل يحل محل المتغير الخارج وفى نفس ترتيبه) ، ثم يتم كتابة معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية بالعمود الاول مع مراعاة تعديل معامل المتغير الاساسى الجديد (س ٢) ليصبح ١٠ بدلا من الصفر الذى كان يخص المتغير الخارج (س ٤) •

(ب) يتم حساب الارقام الجديدة للصف الرئيسى الجديد Main Raw وهو صف س ٢ لتحل محل قيم صف س ٤ القديمة بالجدول السابق ، ويتم حساب تلك الارقام الجديدة من خلال قسمة القيم المذكورة فى صف المتغير الخارج بالجدول السابق على القطب او المفتاح • فالصف القديم وهو صف س ٤ كانت ارقامه على الوجه التالى :

س ٤	٤٠	٢	٤	صفر	١	صفر
÷	÷	÷	÷	÷	÷	÷
المفتاح	٤	٤	٤	٤	٤	٤
قيم صف س ٢ فى الجدول الثانى	١٠	$\frac{1}{2}$	١	صفر	$\frac{1}{4}$	صفر

قاعدة : لايجاد قيم عناصر الصف الرئيسى الجديدة للجدول الثانى يتم قسمة جميع القيم القديمة لعناصر المتغير الخارج بالجدول الاول على المفتاح ثم يتم تسجيل هذه القيم الجديدة بالجدول الثانى امام المتغير الاساسى الجديد س ٢ .

(ج) تحسب القيم الجديدة لباقى الصفوف عن طريق تطبيق المعادلة التالية :

القيمة الجديدة = القيمة القديمة - (القيمة الجديدة المقابلة بالصف الرئيسى الجديد × المضاعف) .

والمضاعف هنا هو عبارة عن القيمة الواقعة عند تقاطع الصف المطلوب حساب قيمة الجديدة مع عمود المتغير الداخل وذلك بالجدول الاول . اى ان مضاعف صف س ٣ بالجدول الاول هو القيمة (٢) ، ومضاعف صف س ٥ بالجدول الاول هو القيمة صفر .

وفيما يلى توضيح لكيفية حساب القيم الجديدة لباقى الصفوف باستخدام المعادلة السابقة .

الارقام الجديدة للصف س ٣ :

٣٦	-	(١٠ × ٢)	=	١٦
٣	-	($\frac{١}{٢}$ × ٢)	=	٢
٢	-	(١ × ٢)	=	صفر
١	-	(صفر× ٢)	=	١
صفر	-	($\frac{١}{٤}$ × ٢)	=	- $\frac{١}{٢}$
صفر	-	(صفر× ٢)	=	صفر

الارقام الجديدة للصف س ٥ :

١٠ − (١٠ × صفر) = ١٠
١ − (١/٢ × صفر) = ١
صفر − (١ × صفر) = صفر
صفر − (صفر× صفر) = صفر
صفر − (١/٤ × صفر) = صفر
١ − (صفر× صفر) = ١

ويلاحظ ان الارقام الجديدة لصف س ٥ هي نفسها الارقام القديمة ، والسبب في ذلك ان المضاعف كانت قيمته صفر . لذلك يمكن وضع قاعدة مؤداها " اذا كان معامل المتغير الداخل في صف احد القيود يساوي صفرا فان معاملات هذا القيد لن تتغير في الجدول الجديد وستظل قيمته على ما هي عليه " .

(د) ايجاد عناصر صف التكلفة الداخلة ، ويتم حسابها بنفس الطريقة التي اتبعناها في الجدول الاول ، اذ نقوم بضرب معامل كل قيد × المعامل المقابل بدالة الهدف للمتغير الاساس ونقوم بجمع النتائج لكل عمود فمثلا بالنسبة للعمود س ١ يتم حساب التكلفة الداخلة كالاتي :

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية		عمود س ١		
صفر	×	٢	=	صفر
١٠	×	١/٢	=	٥
صفر	×	١	=	صفر

التكلفة الداخلة = ٥

وعلى نفس المنوال نقوم بحساب التكلفة الداخلة لباقي الاعمدة .

(هـ) ايجاد قيمة دالة الهدف للجدول الثانى :

ويتم ايجاد قيمة دالة الهدف للجدول الثانى بالطريقة التى سبق اعدادها فى الجدول الاول ، اى عن طريق ضرب معاملات الهدف لكل متغير اساسى فى قيم تلك المتغيرات ، ويكون حاصل الجمع هو قيمة دالة الهدف كالاتى :

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية		القيم		
صفر	×	١٦	=	صفر
١٠	×	١٠	=	١٠٠
صفر	×	١٠	=	صفر

قيمة دالة الهدف = ١٠٠

(و) ايجاد قيم صف صافى التغير :

وآخر خطوة لاستكمال الجدول الثانى هو ايجاد قيم صف صافى التغير ، ذلك عن طريق طرح التكاليف الداخلة من الارباح الداخلة كالاتى :

الارباح الداخلة	٧	١٠	صفر	صفر	صفر
ناقصا					
التكاليف الداخلة	٥	١٠	صفر	$\frac{٥}{٢}$	صفر
=					
صافى التغير	٢	صفر	صفر	$-\frac{٥}{٢}$	صفر

وبعد اجراء هذه الخطوة يكون قد تم استكمال كافة صفوف واعمدة الجدول الثانى ويظهر على شكله النهائى التالى :

الجدول الثانى للحل

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٧	١٠	صفر	صفر	صفر
		القيم	س١	س٢	س٣	س٤	س٥
صفر	س ٣	١٦	٢	صفر	١	− ١/٢	صفر
١٠	س ٢	١٠	١/٢	١	صفر	١/٤	صفر
صفر	س ٥	١٠	١	صفر	صفر	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٥	١٠	صفر	٥/٢	صفر
	١٠٠	صافى التغير	٢	صفر	صفر	− ٥/٢	صفر

رابعا : اختبار المثالية Checking Optimality

بعد الانتهاء من اعداد الجدول الثانى للحل ، يتعين اختبار مثاليته بمعنى الوقوف على ما اذا كان الجدول الثانى يقدم الحل الامثل ام لا ؟ وكما سبق القول فان هذا الاختبار يتم اجراؤه عن طريق مجرد النظر لقيم صف صافى التغير ، ووفقا للقاعدة سنجد ان المتغير غير الاساسى (س ١) هو المتغير الوحيد الذى له معامل موجب فى صف صافى التغير ، وهذا يعنى ان الجدول الثانى للحل هو جدول غير امثل وان هناك امكانية لتحسين الحل وزيادة دالة الهدف باختيار المتغير (س ١) كمتغير داخل ، ولذا يستلزم الامر اعداد جدول ثالث للحل وهذا ما ستقدمه الخطوة التالية :

خامسا : تحسين الحل ـ الجدول الثالث Improving the Solution

يتم السير فى نفس الخطوات التى سبق ذكرها عند تحسين الحل الوارد بالجدول المبدئى ، والتى وصلنا من خلالها الى الجدول الثانى والذى نحن بصدد تحسينه الان كالاتى :

(١) تحديد المتغير الداخل :

سبق القول انه كقاعدة عامة يعتبر المتغير ذات اكبر قيمة موجبة فى صف صافى التغير فى الجدول السابق هو المتغير الداخل ، وحيث انه قد ظهر بالجدول السابق متغير واحد له قيمة موجبة بالجدول الثانى وهو المتغير (س ١) . اذن المتغير الداخل هو المتغير (س ١) .

(٢) تحديد المتغير الخارج :

لتحديد المتغير الخارج والذى سيحل محلة المتغير الداخل في الجدول الثالث ، يتم قسمه قيم المتغيرات الاساسية على المعاملات المقابلة بعمود المتغير الداخل ويكون المتغير ذات اقل خارج قسمة موجب هو المتغير الخارج وتفصيلا فان العمليات الحسابية بهذه الخطوة تتم كالاتى :

المتغيرات الاساسية	القيم		س ١			
س ٣	١٦		٢	=	٨	المتغير الخارج
س ٢	١٠	÷	$\frac{١}{٢}$	=	٢٠	
س ٥	١٠		١	=	١٠	

وبناء على العمليات الحسابية السابقة سيكون المتغير الخارج هو (س٣) ، ومعنى ذلك ان المتغير(س ١) سيحل محل المتغير (س ٢) ، وبذلك ستكون المتغيرات الاساسية بالجدول الثالث هى : س ١ ، س ٢ ، س ٥ ويكون العنصر المحورى (المفتاح) الرقم (٢) وهو القيمة الواقعة عند تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج .

(٣) تحديد القيم الجديدة لصف المتغير الداخل بالجدول الجديد :

لايجاد هذه القيم يتم قسمة كل معاملات صف س ٣ بالجدول الثانى (المتغير الخارج) على المفتاح وتكون تلك العملية الحسابية كالاتى :

قيم صف س ٣ بالجدول الثانى	١٦	٢	صفر	١	$-\frac{1}{2}$	صفر
÷	÷	÷	÷	÷	÷	÷
المفتاح	٢	٢	٢	٢	٢	٢
قيم صف س ١ بالجدول الثالث	٨	١	صفر	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	صفر

كذلك ينبغى ملاحظة ان معامل دالة الهدف للمتغير الاساس (س ٣) فى الجدول الثانى كان صفر ، وبدخول المتغير (س ١) كمتغير اساسى يحل محل (س ٣) سيتم تغيير معامل دالة الهدف ليكون (٧) وهو معامل دالة الهدف للمتغير الداخل (س ١) .

(٤) ايجاد عناصر باقى القيود بالجدول الجديد :

(أ) القيم الجديدة لصف (س ٢) :

١٠ − (٨ × $\frac{1}{2}$) = ٦

$\frac{1}{2}$ − (١ × $\frac{1}{2}$) = صفر

١ − (صفر × $\frac{1}{2}$) = ١

صفر − ($\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$) = $-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ − ($-\frac{1}{4}$ × $\frac{1}{2}$) = $\frac{3}{8}$

صفر − (صفر × $\frac{1}{2}$) = صفر

ويتم كتابة هذه النتائج فى الجدول الثالث باعتبارها عناصر صف (س ٢) الجديدة فى الجدول الثالث .

(ب) القيم الجديدة لصف (س ٥) :

١٠ − (٨ × ١) = ٢

١ – (١ × ١) = صفر

صفر – (صفر × ١) = صفر

صفر – ($\frac{١}{٢}$ × ١) = $-\frac{١}{٢}$

صفر – ($-\frac{١}{٤}$ × ١) = $\frac{١}{٤}$

١ – (صفر × ١) = ١

وتكون هذه القيم هى عناصر صف (س ٥) بالجدول الثالث

(٥) ايجاد عناصر صف التكلفة الداخلة للجدول الثالث :

ويتم حسابها بنفس الطريقة التى اتبعناها فى اعداد الجدول الثانى ، وسنعطى مثالا لكيفية حسابها لاحد الاعمدة وليكن عمود س ٣ .

معاملات الهدف		س ٣		
٧		$\frac{١}{٢}$		$\frac{٧}{٢}$
١٠	×	$-\frac{١}{٤}$	=	$-\frac{٥}{٢}$
صفر		$-\frac{١}{٢}$		صفر
		التكلفة الداخلة		١

وهكذا بالنسبة لباقى الاعمدة .

(٦) ايجاد عناصر صف صافى التغير بالجدول الثالث :

وهى تمثل الفرق بين الارباح الداخلة والتكاليف الداخلة .

(٧) ايجاد قيمة دالة الهدف بالجدول الثالث :

وهى عبارة عن مجموع حواصل ضرب قيم المتغيرات الاساسية × معاملات هذه المتغيرات بدالة الهدف .

وبانتهاء الخطوات السابقة يكون قد تم اكتمال جدول الحل الثالث والذى يظهر على الصورة التالية :

الجدول الثالث

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٧	١٠	صفر	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥
٧	س ١	٨	١	صفر	١/٢	– ١/٤	صفر
١٠	س ٢	٦	صفر	١	– ١/٤	٣/٨	صفر
صفر	س ٥	٢	صفر	صفر	– ١/٢	١/٤	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٧	١٠	١	٢	صفر
	١١٦	صافى التغير	صفر	صفر	– ١	– ٢	صفر

سادسا : اختبار مثالية الجدول الثالث :

يمكن ان نلاحظ من الجدول الثالث للحل ان كل عناصر صف صافى التغير اما تساوى صفر او قيما سالبة ، عندئذ نقول ان الجدول الثالث هو جدول الحل الامثل ، وان اى محاولة لزيادة قيمة اى من المتغيرات غير الاساسية ستؤدى الى تخفيض دالة الهدف . لذلك يتعين ان نتوقف عن البحث عن حلول اخرى .

تطبيق محلول :

تنتج شركة كولدير ثلاثة انواع من المنتجات هى اجهزة التكييف ، وافران كهربائية ،ومجففات كهربائية للاستخدامات التجارية ، وقدرت الشركة هامش الربح لكل وحدة من المنتجات السابقة كالاتى :

اجهزة التكييف ٢١٠ جنيه
افران كهربائية ١٧٠ جنيه
مجففات كهربائية ٤٠ جنيه

وتمر تلك الانواع الثلاثة بعمليات انتاجية هى التصنيع والتجميع والتفتيش ، والجدول التالى يوضح عدد الساعات المطلوبة لانتاج وحدة واحدة من كل انواع المنتجات الثلاثة بهذه الاقسام .

المنتج	عدد الساعات المطلوبة للوحدة الواحدة .		
	تصنيع	تجميع	تفتيش
اجهزة التكييف	٣	٣	١
الافران الكهربائية	٤	٢	$\frac{٣}{٤}$
المجففات الكهربائية	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$

وكانت الساعات المتاحة بكل قسم من الاقسام الثلاثة للاسبوع القادم هى ٣٩٠ ساعة بقسم التصنيع ، ٣٦٠ ساعة بقسم التجميع ، ٢٠٠ ساعة بقسم التفتيش .

والمطلوب :

استخدام طريقة السمبلكس فى تحديد حجم الانتاج من كل من الانواع الثلاثة من المنتجات والتى تعمل على تعظيم اجمالى هامش الربح .

الحل :

الخطوة الاولى : اعداد الصياغة الرياضية للمشكلة :

تعظيم ٢١٠ س ١ + ١٧٠ س ٢ + ٤٠ س ٣ ⟵ اقصى ربح ممكن

القيود :

٣ س ١ + ٤ س ٢ + س ٣ ⩾ ٣٩٠ (قسم التصنيع)

٣ س ١ + ٢ س ٢ + $\frac{١}{٢}$ س ٣ ⩾ ٣٦٠ (قسم التجميع)

س ١ + $\frac{٣}{٤}$ س ٢ + $\frac{١}{٢}$ س ٣ ⩾ ٢٠٠ (قيد التفتيش)

س ١ ، س ٢ ، س ٣ ≤ صفر (عدم السلبية)

الخطوة الثانية : تحويل متباينات القيود الى معادلات باضافة المتغيرات الراكدة :

٣ س ١ + ٤ س ٢ + س ٣ + س ٤ = ٣٩٠

٣ س ١ + ٢ س ٢ + $\frac{١}{٢}$ س ٣ + س ٥ = ٣٦٠

س ١ + $\frac{٣}{٤}$ س ٢ + $\frac{١}{٢}$ س ٣ + س ٦ = ٢٠٠

الخطوة الثالثة : اعداد الجدول المبدئى للحل :

معاملات دالة الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٢١٠	١٧٠	٤٠	صفر	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦
صفر	س ٤	٣٩٠	٣	٤	١	١	صفر	صفر
صفر	س ٥	٣٦٠	٣	٢	$\frac{١}{٢}$	صفر	١	صفر
صفر	س ٦	٢٠٠	١	$\frac{٣}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	صفر	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	صفر	صافى التغير	٢١٠	١٧٠	٤٠	صفر	صفر	صفر

↑ المتغير الداخل

الخطوة الرابعة : اختبار مثالية الجدول المبدئى :

يتبين من مجرد النظر الى صف صافى التغير انه يوجد به ثلاثة قيم موجبة ، وهذا يعنى ان جدول الحل المبدئى غير امثل ، وانه يحتاج الى تحسين ، وبذلك ننتقل الى الخطوة التالية .

الخطوة الخامسة : اعداد الجدول الثانى لتحسين الحل :

أ ــ المتغير الداخل فى الجدول الثانى للحل سيكون هو المتغير س ١ ، وهو المتغير ذات اكبر قيمة موجبة فى صف صافى التغير .

ب ــ المتغير الخارج سيكون هو المتغير س ٥ ، وهو المتغير ذات اقل قيمة موجبة من خارج قسمة قيم كل متغير اساسى على القيمة المقابلة بعمود المتغير الداخل (انظر خارج القسمة على يسار الجدول المبدئى) .

جـ ــ المفتاح هو الرقم (٣) وهو القيمة الواقعة عند تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج .

د ــ ايجاد القيم الجديدة للصف الرئيسى الجديد (صف المتغير الداخل س ١) وذلك بقسمة جميع ارقام الصف القديم (صف س ٥ وهو المتغير الخارج) على المفتاح وبذلك يكون صف س ١ فى الجدول التالى كالاتى :

صف س ٥ فى الجدول المبدئى	٣٦٠	٣	٢	$\frac{1}{2}$	صفر	١	صفر
÷ المفتاح	÷ ٣	÷ ٣	÷ ٣	÷ ٣	÷ ٣	÷ ٣	÷ ٣
صف س ١ فى الجدول الثانى	١٢٠	١	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	صفر	$\frac{1}{3}$	صفر

هـ ــ ايجاد القيم الجديدة لصف س ٤ فى الجدول الثانى

(المضاعف = ٣)

٣٩٠ – (١٢٠ × ٣) = ٣٠
٣ – (١ × ٣) = صفر
٤ – (٢/٣ × ٣) = ٢
١ – (١/٦ × ٣) = ١/٢
١ – (صفر × ٣) = ١
صفر – (١/٣ × ٣) = –١
صفر – (صفر × ٣) = صفر

(و) ايجاد القيم الجديدة لصف س ٦ فى الجدول الثانى:

(المضاعف = ١) .

٢٠٠ – (١٢٠ × ١) = ٨٠
١ – (١ × ١) = صفر
٣/٤ – (٢/٣ × ١) = ١/١٢
١/٣ – (١/٦ × ١) = ١/٣
صفر – (صفر × ١) = صفر
صفر – (١/٣ × ١) = – ١/٣
١ – (صفر × ١) = ١

(ز) ايجاد صف التكاليف الداخلة

ويتم ايجاده عن طريق مجموع حواصل ضرب قيم معاملات كل عمود فى قيم معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية

(ح) ايجاد قيم صف صافى المتغير .

ويتم ايجاده عن طريق طرح قيم التكاليف الداخلة من صف الارباح الداخلة .

(ط) ايجاد قيمة دالة الهدف بالجدول الثانى

ويتم ايجادها عن طريق مجموع حواصل ضرب قيم المتغيرات الاساسية × معامل دالة الهدف لكل منها .

وبعد اجراء العمليات الحسابية السابقة وتدوينها بالجدول الثانى فان الجدول الثانى للحل سيظهر على الوجه التالى :

الجدول الثانى :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٢١٠	١٧٠	٤٠	صفر	صفر	صفر	
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦	
صفر	س ٤	٣٠	صفر	٢	$\frac{١}{٢}$	١	١ –	صفر	$\frac{٣٠}{٢} = ١٥$
٢١٠	س ١	١٢٠	١	$\frac{٢}{٣}$	$\frac{١}{٦}$	صفر	$\frac{١}{٣}$	صفر	$\frac{١٢٠}{٢÷٣} = ١٨٠$
صفر	س ٦	٨٠	صفر	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{٣}$	صفر	$-\frac{١}{٣}$	١	$\frac{٨٠}{١٢÷١} = ٩٦٠$
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٢١٠	١٤٠	٣٥	صفر	٧٠	صفر	
	٢٥٢٠٠	صافى المتغير	صفر	٣٠	٥	صفر	٧٠–	صفر	

المتغير الداخل ↑ (س ٢)

ويتبين من الجدول الثانى للحل انه مازالت توجد قيم موجبه بصف صافى التغير مما يشير الى ان الحل بالجدول الثانى لا يمثل الحل الامثل ولكن يحتاج الى تحسين ويتم ذلك فى الخطوة التالية :

<u>الخطوة السادسة : اعداد الجدول الثالث لتحسين الحل</u>

أ – المتغير الداخل فى الجدول الثالث لتحسين الحل سيكون هو المتغير س ٢ وهو المتغير ذات اكبر قيمة موجبة فى صف صافى التغير .

ب – المتغير الخارج سيكون هو المتغير $س_٤$ وهو المتغير ذات اقل قيمة موجبة من خارج قسمة قيم كل متغير اساسى على القيمة المقابلة بعمود المتغير الداخل (انظر خارج القسمة على يسار الجدول الثانى للحل) .

جـ – المفتاح هو الرقم (٢)

د ـ ايجاد القيم الجديدة للصف الرئيسى الجديد س ٢ وذلك عن طريق قسمة جميع ارقام الصف القديم (صف س ٤ وهو المتغير الخارج) على المفتاح ، وبذلك يكون صف س ٢ فى الجدول الثالث كالاتى :

صف س ٤ فى الجدول الثانى	٣٠	صفر	٢	$\frac{١}{٢}$	١	١ــ	صفر
÷	÷	÷	÷	÷	÷	÷	÷
المفتاح	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢
صف س ٢ فى الجدول الثالث	١٥	صفر	١	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	صفر

هـ ـ ايجاد القيم الجديدة لصف س ١ فى الجدول الثالث = (المضاعف = $\frac{٢}{٣}$)

١٢٠ − (١٥ × $\frac{٢}{٣}$) = ١١٠

١ − (صفر × $\frac{٢}{٣}$) = ١

$\frac{٢}{٣}$ − (١ × $\frac{٢}{٣}$) = صفر

$\frac{١}{٦}$ − ($\frac{١}{٤}$ × $\frac{٢}{٣}$) = صفر

صفر − ($\frac{١}{٢}$ × $\frac{٢}{٣}$) = $-\frac{١}{٦}$

$\frac{١}{٣}$ − ($-\frac{١}{٢}$ × $\frac{٢}{٣}$) = $\frac{٢}{٣}$

صفر − (صفر × $\frac{٢}{٣}$) = صفر

و ـ ايجاد القيم الجديدة لصف س ٦ فى الجدول الثالث : (المضاعف $\frac{١}{١٢}$)

٨٠ − (١٥ × $\frac{١}{١٢}$) = $\frac{٣١٥}{٤}$

صفر − (صفر × $\frac{١}{١٢}$) = صفر

$\frac{١}{١٢}$ − (١ × $\frac{١}{١٢}$) = صفر

$\frac{١}{٣}$ − ($\frac{١}{٤}$ × $\frac{١}{١٢}$) = $\frac{٥}{١٦}$

صفر − (١/٢ × ١/١٢) = − ١/٢٤

− ١/٣ − (− ١/٢ × ١/١٢) = − ٧/٢٤

١ − (صفر × ١/١٢) = ١

ز ـ ثم يتم ايجاد قيم صف التكاليف الداخلة وكذلك قيمة دالة الهدف وقيم صف صافى التغير . وبعد اجراء العمليات الحسابية السابقة وتدوينها بالجدول الثالث فان جدول الحل الثالث سيظهر بالشكل التالى :

الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٢١٠	١٧٠	٤٠	صفر	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦
١٧٠	س ٢	١٥	صفر	١	١/٤	١/٢	− ١/٢	صفر
٢١٠	س ١	١١٠	١	صفر	صفر	− ١/٦	٢/٣	صفر
صفر	س ٦	٣١٥/٤	صفر	صفر	٥/١٦	− ١/٢٤	− ٧/٢٤	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٢١٠	١٧٠	٤٢ر٥	٥٠	٥٥	صفر
	٢٥٦٥٠	صافى التغير	صفر	صفر	ـ ٢ر٥	ـ٥٠	ـ٥٥	صفر

ويتضح من الجدول الثالث للحل انه يمثل جدول الحل الامثل والذى يتضمن :

انتاج ١١٠ جهاز تكييف تحقق ربحا مقداره ٢٣١٠٠

انتاج ١٥ فرن كهربائى تحقق ربحا مقداره ٢٥٥٠

الارباح القصوى ٢٥٦٥٠

وهذا الكم من الإنتاج سيستغل طاقة قسم التصنيع بكاملها (س ٤) ويستغل طاقة قسم التجميع بكاملها (س ٥) ، ويتبقى طاقة عاطلة بقسم التفتيش (س ٦) مقدارها $\frac{٣١٥}{٤}$ (٧٨ $\frac{٣}{٤}$ ساعة) .

حل مشاكل تخفيض التكلفة بطريقة السمبلكس

Solving Minimization problems with simplex

تستخدم طريقة السمبلكس ايضا لحل المشاكل التى يكون الهدف فيها تخفيض التكاليف ، وعلى الرغم ان تطبيق طريقة السمبلكس لحل مشاكل تخفيض التكلفة عملية سهلة ولا تحتاج جهد اضافى ، الا انه قد يكون من المفيد ان نقوم باجراء تطبيق لها على تلك النوعية من المشاكل ، لنقف على حقيقة انه يتعين عمل بعض التعديلات لمراحل وخطوات طريقة السمبلكس والتى سبق تطبيقها على مشاكل التعظيم .

ولتسهيل متابعة تناول هذا الموضوع فاننا سنتناول فى الجزء التالى تطبيق هذه الطريقة ، على ذات مشكلة تخفيض التكلفة ، والتى سبق حلها فى مقدمة هذا الكتاب باستخدام طريقة الرسم البيانى ، والخاصة بشركة القاهرة للمنتجات الغذائية ، ولقد تمثلت تلك المشكلة فى ان الشركة تريد ان تخفض من تكلفة مزيج القمح والارز ، على ان تحافظ على ما يحتاجه المستهلك من فيتامين (أ) وفيتامين (د) ، وليذكر القارئ اننا قد قمنا بصياغة هذه المشكلة على الوجه التالى :

دالة الهدف تخفيض ٨٠٠٠ر س ١ + ١٢٠٠ر س ٢

بشرط ان :

٢ر س ١ + ٥ر س ٢ ≥ ١ (قيد فيتامين أ)

٤ر س ١ + ٢ر س ٢ ≥ ١ (قيد فيتامين ب)

س ١ ، س ٢ ≥ صفر (عدم السلبية)

وفيما يلى سنقوم بحل هذه المشكلة باستخدام طريقة

السمبلكس ، والتي تستلزم السير في خطوات الحل التالية :

الخطوة الاولى : تحويل متباينات القيود الى معادلات

تبدأ خطوات طريقة السمبلكس بتحويل المشكلة الى صيغة تصلح للحل باستخدام طريقة السمبلكس وذلك باضافة المتغيرات الراكدة Slack variables لمتباينات المشكلة لتحويلها الى معادلات ، وفي المشكلة السابقة الخاصة بتعظيم الارباح رأينا ان المتغير الراكد يضاف الى الجانب الاقل في القيد ومن ثم يتحول من متباينة الى معادلة وحيث ان المشكلة التي كنا نعالجها كانت متبايناتها (≥) لذلك كنا نضيف المتغيرات الراكدة الى الجانب الايمن منها وهو الجانب الاقل في القيد ، الا انه بالنظر الى متباينات قيود مشكلة شركة القاهرة للمنتجات الغذائية نجد ان الجانب الاقل هو الجانب الايسر حيث ان المتباينات من النوع ≤ (اكبر من او يساوى) ، اذن سنضيف المتغير الراكد الى الجانب الايسر في كل قيد من القيود المفروضة على دالة الهدف ، وباضافة المتغيرات الراكدة س ٣ ، س ٤ الى متباينات القيود ستظهر على الصورة التالية :

٢س ١ + ٥س ٢ = ١ + س ٣ (معادلة قيد فيتامين أ)

٤س ١ + ٢س ٢ = ١ + س ٤ (معادلة قيد فيتامين د)

ويجدر ان نلفت النظر عند هذا الحد ان المتغيرات الراكدة التي اضفناها الى متباينات مشكلة التخفيض تختلف في معناها عن تلك التي كنا نضيفها الى متباينات مشكلة التعظيم ، فهي في مشاكل التعظيم كانت بمثابة مقدار الطاقة غير المستغلة في كل قيد ، اما هنا وفي مشاكل التخفيض فانها تعني عكس ذلك تماما ، فهي تمثل مقدار الزيادة عن المطلوب لمقابلة الاحتياجات ، ويمكن توضيح هذا المفهوم بوضوح اكثر

اذا عبرنا عن القيدين السابقين فى صورتهما العامة اللفظية كالاتى :

(الفيتامين المستمد من المتغيرات القرارية)= (الاحتياجات اليومية من الفيتامين) + الفيتامين الزائد من المتغيرات المضافة) .

ولكن قد يثار تساؤل وهو لماذا نأخذ فى اعتبارنا الحل الذى يمدنا باكثر من الحد الادنى للاحتياجات اليومية من الفيتامين فى الوقت الذى نحاول فيه ان نصل بالتكاليف الى حدها الادنى ؟ وللاجابة على ذلك نقول ان المشكلة التى نعالجها الان بها قيدين للاحتياجات ، وحتى يمكن تحقيق احد القيدين وليكن قيد فيتامين (ا) يلزم ان نستخدم قمح وارز اكثر من الحاجة لتحقيق قيد فيتامين (د)، وهذا بدوره سيؤدى الى وجود زيادة او فائض من فيتامين (د) يزيد عن الحاجة .

<u>الخطوة الثانية : اعداد الجدول المبدئى</u>

Preparing the Initial Tableau

ان اعداد هذه الخطوة وتنفيذها قد يحتاج اولا ان نقف على بعض المفاهيم العامة التى تساعد على الفهم الصحيح لكيفية اعداد هذا الجدول،لما سيكون بينه وبين الاسلوب الذى اتبع فى مشاكل التعظيم من اختلافات فيتعين علينا بداية ان نعين الحل المبدئى الممكن والذى سيمثله الجدول المبدئى للحل ، فبالنسبة لمشاكل التعظيم وجدنا انه بعد اضافة المتغيرات الراكدة الى القيود لم تكن هناك اى صعوبة فى اجراء الخطوة الثانية وهى تعيين حل مبدئى ممكن ، اذ كان هذا الحل المبدئى الممكن يقع دائما عند نقطة الاصل ، والتى تكون فيها قيم المتغيرات القرارية مساوية للصفر ، وتكون المتغيرات الراكدة هى المتغيرات الاساسية ، والتى يمكن حساب قيمة كل منها بالتعويض فى معادلات القيود بجعل قيم المتغيرات القرارية مساوية للصفر ، عندئذ

نحصل على قيم تلك المتغيرات الراكدة (المتغيرات الاساسية فى الحل المبدئى الممكن) .

والسؤال الان الا يمكن ان نقوم بعمل نفس الشىء فى مشاكل التخفيض ؟ وبمعنى آخر الا يمكن ان نختار نقطة الاصل كحل مبدئى ونعين قيم المتغيرات الراكدة بمعلومية قيم المتغيرات القرارية المساوية للصفر عند نقطة الاصل ؟ للاجابة على ذلك سنقوم بالسير فى نفس مفهوم مشاكل التعظيم لنرى مدى امكانية اختيار نقطة الاصل كحل مبدئى فى مشاكل التخفيض .

كانت معادلة قيد فيتامين (أ) كالاتى :

٢ر س ١ + ٥ر س ٢ = ١ + س ٣

فاذا اخترنا نقطة الاصل كحل مبدئى ، اذن ستكون قيم كل من س ١ ، س ٢ وهى المتغيرات القرارية مساوية للصفر ، وبالتعويض فى تلك المعادلة يكون الناتج :

٢ر (صفر) + ٥ر (صفر) = ١ + س ٣

صفر = ١ + س ٣

∴ س ٣ = – ١

اى ان المتغير الراكد (س ٣) وهو المتغير الاساسى عند نقطة الاصل يكون متغيرا سالبا .

وكذلك الحال بالنسبة لمعادلة قيد فيتامين (د) والتى كانت على الصورة التالية :

٤ر س ١ + ٢ر س ٢ = ١ + س ٤

واذا اخترنا نقطة الاصل كحل مبدئى ممكن ستكون قيم المتغيرات القرارية (س ١ ، س ٢) مساوية للصفر، اى ان :

٤ر (صفر) + ٢ر (صفر) = ١ + س ٤

∴ س ٤ = – ١

اى ان المتغير الراكد (س ٤) وهو متغير اساسى عند نقطة الاصل سيكون متغيرا سالبا،ولمعالجة مشكلة ظهور المتغيرات الراكدة بمعاملات سالبة فى الجدول المبدئى للحل فاننا نحتاج الى ان نضيف متغيرا مكمل لكل قيد

يكون فيه المتغير الراكد له قيمة سالبة ، وهذه المتغيرات الجديدة تسمى المتغيرات الوهمية أو المتغيرات الاصطناعية Artificial variables وقدسميت بذلك لانها تستخدم لتحويل نقطة الاصل الوهمية من نقطة غير ممكنة الى نقطة ممكنة ، واهميتها فقد تكمن فى انها اداة حسابية تسمح بمعالجة نوعين من القيود وهما النوع المتساوى (معادلات) والنوع الاكبر من أو يساوى (≥) .

وعلى ذلك يمكن ان نعتبر المتغير الصناعى (ص ١) هو بمثابة المتمم الصناعى الذى يتم وضعه بمعادلة القيد الاول ليمنع ان يأخذ المتغير الراكد (س ٣) قيمة سالبة ، كذلك نعتبر (ص ٢) هو بمثابة المتمم الصناعى الذى يضاف الى معادلة القيد الثانى حتى لا يأخذ المتغير الراكد (س ٤) قيمة سالبة ،وباضافة تلك المتغيرات الصناعية الى معادلات القيود السابقة ستصبح القيود الجديدة على الصورة التالية :

٢ر س ١ + ٥ر س ٢ + ص ١ = ١ + س ٣

٤ر س ١ + ٢ر س ٢ + ص ٢ = ١ + س ٤

وبعد اجراء هذا التحويل نكون قد تمكنا من تحويل نقطة الاصل من نقطة غير ممكنة الى نقطة حل ممكن ، اذ ان منهج السمبلكس سوف يختار المتغيرات الاصطناعية لتكون هى المتغيرات الاساسية المبدئية (عند نقطة الاصل الوهمية) ، وستكون المتغيرات القرارية والمتغيرات الراكدة بمثابة متغيرات غير اساسية قيمة كل منها صفر ، وعندئذ تكون قيم المتغيرات الصناعية كالاتى :

٢ر (صفر) + ٥ر (صفر) + ص ١ = ١ + (صفر)

∴ ص ١ = ١

وكذلك الحال بالنسبة لمعادلة القيد الثانى

٤ر (صفر) + ٢ر (صفر) + ص ٢ = ١ + (صفر)

∴ ص ٢ = ١

وهذا معناه ان نقطة الاصل (الوهمية) اصبحت نقطة حل مبدئى ممكن ، فيها قيم المتغيرات الراكدة والوهمية = صفر ، والمتغيرات الصناعية لها قيم موجبة .

وهناك مشكلة اخرى ستظهر ويتطلب الامر معالجتها ليستقيم الحل بطريقة السمبلكس ، وتتلخص هذه المشكلة فى انه عندما نقوم باختيار مثالية جدول الحل المبدئى ، فسنجد انه طبقا لقاعدة اختبار المثالية يمثل جدول الحل الامثل ، وذلك لان المتغيرات الصناعية التى اضفناها الى معادلات القيود ليست ممثلة فى دالة الهدف ، ومن ثم ليس لها تكلفة ، وبذلك ظهر الحل فى الحل المبدئى بانه حل امثل لان متغيراته الاساسية ص ١ ، ص ٢ ليس لها تكلفة ، ونحن لا نريد بطبيعة الحال (وفقاً لمنهج السمبلكس) ان نستبدل احد المتغيرات القرارية والتى لها تكلفة ، بأحد المتغيرات الصناعية والتى ليس لها تكلفة . ومعنى ما تقدم ان اضافة المتغيرات الصناعية لمعادلات القيود وان كان سيمكننا من التغلب على مشكلة المعاملات السالبة للمتغيرات الراكدة ، الا انه حتى هذا الحد من التحليل لم يمكننا من ان نتغلب على مشكلة عدم التحرك الى نقطة طرفية اخرى افضل من نقطة الاصل .

ولعلاج هذه المشكلة يتعين ان نضيف الى دالة الهدف كل متغير صناعى اضيف لقيود المعاملات . وان تكون له تكلفة بدالة الهدف حتى لا نصطدم بعد عدة جولات للحل انه قد ظهر لنا ثانية متغير صناعى ، احتل مكانا بين المتغيرات الاساسية وهو ما نسعى الى استبعاده كلية لانه متغير وهمى وزائف ، اذن يتطلب الامر اضافته الى دالة الهدف وان نحدد له تكلفة مرتفعة جدا حتى لا يدخل مرة اخرى كمتغير أساسى واحد الطرق المناسبة لاجراء ذلك هى ان نحدد تكلفة كل متغير صناعى بقيمة مقدارها

(م) وهى تكلفة مرتفعة جدا وهذا المدخل يسمى طريقة (م) الكبرى Big "M" Method ويمكن ان نترك الرمز (م) كمعامل دالة هدف للمتغير الصناعى او ان نستبدله بقيمة مرتفعة جدا اذا ما قورنت بمعاملات المتغيرات القرارية بدالة الهدف ، وهناك من يفضل الالتجاء الى المدخل الثانى ومثلا يجعل فى هذا المثال قيمة (م) مائة مليم وهى بذلك تفوق كثيرا جدا قيم معاملات الهدف للمتغيرات القرارية .

ولكننا نفضل تجنب العمل باعداد كبيرة تتطلب عمليات حسابية لا داعى لها ومن ثم سنرمز بالحرف (م) للقيمة الكبيرة لمعاملات الهدف للمتغيرات الصناعية وبعد اجراء التحويرات السابقة ستظهر المشكلة على صورة الصياغة التالية : (مع ملاحظة اننا جعلنا معاملات دالة الهدف قيم صحيحة لتسهيل العمليات الحسابية) .

دالة الهدف تخفيض ٨ س ١ + ١٢ س ٢ + م ص ١ + م ص ٢

معادلات القيود

٢ر س ١ + ٥ر س ٢ − س ٣ + ص ١ = ١

٤ر س ١ + ٢ر س ٢ − س ٤ + ص ٢ = ١

وبذلك سيأخذ الجدول المبدئى للحل الشكل التالى (سنحول دالة الهدف من جنيهات الى مليمات) .

الجدول المبدئى

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٨	١٢	صفر	صفر	م	م	
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	ص ١	ص ٢	
م	ص ١	١	٢ر	٥ر	−١	صفر	١	صفر	$\frac{1}{٥ر}$ =
م	ص ٢	١	٤ر	٢ر	صفر	−١	صفر	١	$\frac{1}{٢ر}$ =
دالة الهدف	التكاليف الداخلة		٦رم	٧رم	−م	−م	م	م	
٢ م	صافى التغير		٨−٦رم	١٢−٧رم	م	م	صفر	صفر	

↑ متغير داخل (س ٢)

الخطوة الثالثة : اختبار مثالية الجدول المبدئى

يلاحظ ان التكاليف قد بلغت فى جدول الحل المبدئى (٢ م) وهى تكاليف عالية جدا ، كما يتضح ان قيمة صافى التغير تختلف بين الزيادة والنقصان من عمود لاخر بالنسبة للمتغيرات غير الاساسية ، وحيث أننا نهدف الى تخفيض التكاليف لذلك فان الحل سيكون غير امثل طالما وجد ان هناك متغير او اكثر من المتغيرات غير الاساسية له قيمة سالبة فى صف صافى التغير (على عكس مشاكل تعظيم الارباح) ، لان الحل الامثل يحدث عندما نجد ان كل قيم صف صافى التغير آما صفرية أو موجبة .

وتطبيقا للقاعدة السابقة فان الجدول المبدئى السابق لا يمثل الحل الامثل لان صف صافى التغير يشير الى انه فى الامكان تخفيض اجمالى التكاليف عن طريق اختيار اى من المتغيرين س ١ ، س ٢ كمتغير داخل حيث ان صافى تغير اى منهما يمثل قيمة سالبة (لاحظ اننا ذكرنا قبل ذلك ان قيمة م كبيرة جدا) . لذلك يتطلب الامر تحسين الحل واختيار نقطة طرفية اخرى .

الخطوة الرابعة : تحسين الحل

ويسير تحسين الحل فى نفس الخطوات التى سبق توضيحها فى مشكلة التعظيم وهى كالاتى :

(١) تعيين المتغير الداخل : ان الخطوة الاولى فى تحسين الحل هى تعيين المتغير الداخل ، والقاعدة فى اختيار المتغير الداخل لمشاكل التخفيض هى عكس ما اتبعناه عند حل مشاكل التعظيم ، فحيث اننا نحاول تخفيض التكاليف ، لذلك فاننا سنختار المتغيرات ذات اكبر قيمة باشارة سالبة فى صف صافى التغير كمتغير داخل

وبالنظر الى صف صافى التغير يتبين ان القيمتين السالبتين هما : (٨ – ٦رم) و (١٢ – ٧ر م)، وحيث ان (١٢ – ٧رم) هو العدد الاكبر باشارة سالبة فى صف صافى التغير لذلك فان س ٢ هو المتغير الداخل (يمكن ان تفرض قيمة كبرى لقيمة م ولتكن ١٠٠ حتى تساعدك على تحديد القيمة السالبة الاكبر) .

٨ – (٦ر x ١٠٠) = (٨ – ٦٠ = – ٥٢)

١٢– (٧ر x ١٠٠) = (١٢– ٧٠ = – ٥٨)

(٢) تعيين المتغير الخارج : بنفس الطريقة التى اتبعناها فى مشاكل التعظيم ، فالمتغير الخارج هو المتغير ذات اقل خارج قسمة لقيم المتغيرات الاساسية على المعاملات المقابلة بعمود المتغير الداخل ، وقد اجريت تلك العملية الحسابية على يسار الجدول المبدئى ، ويتضح منها ان خارج القسمة الاقل يقابل المتغير ص ١ ، ومن ثم فانه يعتبر المتغير الخارج .

(٣) تحديد قيمة المفتاح : والقيمة (٥ر) هى المفتاح حيث انها القيمة التى تقع عند تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج .

(٤) ايجاد القيم الجديدة للصف الرئيس الجديد (صف المتغير الداخل س ٢) .

صف ص ١ فى الجدول المبدئى	١	٢ر	٥ر	١–	صفر	١	صفر
	÷	÷	÷	÷	÷	÷	÷
المفتاح	٥ر	٥ر	٥ر	٥ر	٥ر	٥ر	٥ر
صف س ٢ فى الجدول الثانى	٢	٤ر	١	٢–	صفر	٢	صفر

(٥) **ايجاد القيم الجديدة للصف ص ٢ فى الحدول الثانــى (المضاعف = ٢ر)**

١ ـ (٢ × ٢ر) = ٦٠ر
٤ر ـ (٤ × ٢ر) = ٣٢ر
٢ر ـ (١ × ٢ر) = صفر
صفر ـ (ـ٢ × ٢ر) = ٤٠ر
ـ١ ـ (صفر × ٢ر) = ـ١ر
صفر ـ (٢ × ٢ر) = ـ٤ر
١ ـ (صفر × ٢ر) = ١

(٦) ولايجاد باقى القيم بالجدول كدالة الهدف وقيم صف التكاليف الداخلة ، وكذلك قيم صف صافى التغير ، سنتبع نفس الطريقة التى اتبعت فى حل مشكلة تضخيم الارباح .

(٧) تصوير الجدول الثانى للحل . (يلاحظ انه يمكن اسقاط عمود ص ١ (المتغير الخارج) من الجدول الثانى للحل . او يمكن الابقاء عليه لانها متغيرات صناعية بخروج احدهما كمتغير خارج نقوم بحذفه من الجدول لانه قد ادى المطلوب منه فى تسهيل الحل ولا داعى لاستمراره وهذا ما فعلناه عند اعداد الجدول الثانىللحل تسهيلا للعمليات الحسابية) .

الجدول الثانى

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة / القيم	٨ / س ١	١٢ / س ٢	صفر / س ٣	صفر / س ٤	م / ص٢
١٢	س ٢	٢	٤ر	١	ـ٢	صفر	صفر
م	ص ٢	٦ر	٣٢ر	صفر	٤ر	ـ١	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٤٨+ ٣٢رم	١٢	ـ٢٤+ ٤رم	ـ م	م
	٢٤+٦رم	صافى التغير	٣٫٢ ـ ٣٢رم	صفر	٢٤ـ ٤رم	م	صفر

واذا اعتبرنا ان قيمة م هى ١٠٠ (كقيمة كبرى)، ستكون قيمة دالة الهدف ٨٤ فى حين كانت بالجدول الاول ٢٠٠ أى ان الحل يتجه نحو التحسين وهذا يؤكد صحة ما قمنا به من خطوات .

الخطوة الخامسة : اختبار مثالية الجدول الثانى

وبفحص صف صافى التغير بالجدول الثانى نجد ان كلا من المتغيرين س ١ ، س ٣ لهما قيم صافى تغير سالبة ومعنى ذلك ان الجدول الثانى لا يمثل الحل الامثل ولكن يتعين تحسينه .

الخطوة السادسة : تحسين الحل الوارد بالجدول الثانى

(١) تحديد المتغير الداخل : ان الاختيار سينحصر بين كلا من المتغيرين س ١ ، س ٣ وهما اللذان لهما قيما سالبة فى صف صافى التغير ، وحيث ان المتغير الداخل هو ذات اكبر قيمة باشارة سالبة فى صف صافى التغير، لذا يكون المتغير الداخل هو المتغير س ١ . ويمكن حساب ذلك كالاتى بفرض ان قيمة م كبرى = ١٠٠

س ١ = ٢ر٣ − ٣٢ر × ١٠٠ = ٢ر٣ − ٣٢ = −٨ر٢٨

س٣ = ٢٤ − ٤ر × ١٠٠ = ٢٤ − ٤٠ = −١٦

وبذلك يكون المتغير س ١ هو المتغير الداخل .

(٢) تحديد المتغير الخارج : من نواتج خارج القسمة على يسار الجدول الثانى يتضح ان المتغير الخارج هو ص ٢ لانه ذات اقل خارج قسمة (٨٧٥ر١) .

(٣) تعيين المفتاح : والمفتاح هو القيمة (٣٢ر) وهى القيمة الواقعة عند تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج .

(٤) ايجاد القيم الجديدة للصف الرئيسي الجديد (صف المتغير س ١)

صف ص ٢ فى	٦ر	٣٢ر	صفر	٤ر	ــ١	١
الجدول الثانى	÷	÷	÷	÷	÷	÷
المفتاح	٣٢ر	٣٢ر	٣٢ر	٣٢ر	٣٢ر	٣٢ر
صف س ١ فى الجدول الثالث	٨٧٥ر١	١	صفر	٢٥ر١	ــ١٢٥ر٣	١٢٥ر٣

(٥) ايجاد القيم الجديدة للصف س ٢ فى الجدول الثالث (المضاعف = ٤ر) .

٢ ــ (٨٧٥ر١ × ٤ر) = ٢٥ر١

٤ر ــ (١ × ٤ر) = صفر

١ ــ (صفر × ٤ر) = ١

ــ٢ ــ (٢٥ر١ × ٤ر) = ــ٥ر٢

صفر ــ (ــ١٢٥ر٣× ٤ر) = ٢٥ر١

(٦) ولايجاد باقى القيم بالجدول ، كقيمة دالة الهدف وقيم صف التكاليف الداخلة ، وكذلك قيم صف صافى التغير سنتبع نفس الطريقة التى اتبعت فى الانتقال من الجدول المبدئى إلى الجدول الثانى .

(٧) تصوير الجدول الثالث للحل . مع ملاحظة استبعادنا للمتغير الصناعي ص ٢ .

الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٨	١٢	صفر	صفر
		القيم	س١	س٢	س ٣	س ٤
١٢	س ٢	١ر٢٥	صفر	١	-٢ر٥	١ر٢٥
٨	س ١	١ر٨٧٥	١	صفر	١ر٢٥	-٣ر١٢٥
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٨	١٢	-٢٠	-١٠
	٣٠	صافى التغير	صفر	صفر	٢٠	١٠

وحيث ان صف صافى التغير بالجدول الثالث لا يحتوى على قيم سالبة ، فاننا بذلك نكون قد وصلنا الى الحل الامثل ويتمثل فى ان تكون نسبة المزج بين الارز والقمح هى :

١ر٨٧٥ ارز : ١ر٢٥ قمح

أى ٣ : ٢

وهى نفس القيمة التى توصلنا اليها باستخدام الطريقة البيانية .

<u>تمرين محلول :</u>

اوجد الحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية التى امكن وضع صياغتها على الشكل المبسط التالى :

دالة الهدف تخفيض ٦ س ١ + ١٠ س ٢

بشرط ان :

– ١ س ١ + ٥ س ٢ ≤ ١٠٠

س ١ ≥ ٢٠

س ١ + س ٢ = ١٦

س ١ ، س ٢ ≤ صفر

الحل :

الخطوة الاولى : تحويل متباينات القيود الى معادلات

يلاحظ ان القيود الواردة على دالة الهدف فى المثال السابق تشتمل على متباينات من النوع (≤) اكبر او يساوى ، ومن النوع (≥) اقل من او يساوى بالاضافة الى معادلة ، وعلى ذلك تبدأ طريقة السمبلكس بتحويل المتباينات الى معادلات وبالنسبة للمتباينة من النوع الاول (≤) فاننا نقوم باضافة متغيرا راكدا مطروحا (س ٣) ومتغيرا اصطناعيا موجبا (ص ١) وعلى ذلك تكون المتباينة بعد تحويلها الى معادلة فى الصورة التالية :

١٠ س ١ + ٥ س ٢ - س٣ + ص ١ = ١٠٠

ولتحويل المتباينة س ١ ≥ ٢٠ الى معادلة يضاف اليها المتغير الراكد فقط وبذلك تصبح بعدتحويلها الى معادلة كالاتى :

س ١ + س ٤ = ٢٠

اما المعادلة الثالثة فيضاف اليها المتغير الاصطناعى (ص ٢) وبذلك تكون على الشكل التالى :

س ١ + س ٢ + ص ٢ = ١٦

ويتعين ان يتم تمثيل المتغيرات الاصطناعية بدالة الهدف ، ولضمان استبعادها من الحل الامثل تعطى لتلك المتغيرات وزنا كبيرا فى صورة رمز معين وليكن الرمز (م) ، ولكننا سبق وان وجدنا ان استخدام رمز ليعبر عن القيمة الكبيرة للمتغيرات الاصطناعية يعقد العمليات الحسابية ، ولذلك سنفترض قيمة رقمية كبيرة بالمقارنة بتلك المعاملات الواردة بدالة الهدف وهى (٦ ، ١٠) لذلك سنفترض ان تلك القيمة الكبيرة هى ١٠٠ .

وبناء على ما تقدم فانه بعد اجراء التعديلات السابقة تكون المشكلة على الوجه الاتى :

دالة الهدف تخفيض ٦ س ١ + ١٠ س ١ + ١٠٠ ص ١ + ١٠٠ص ٢

المعادلات :

١٠ س ١ + ٥ س ٢ − س ٣ + ص ١ = ١٠٠

س ١ + س ٤ = ٢٠

س ١ + س ٢ + ص ٢ = ١٦

الخطوة الثانية : اعداد الجدول المبدئي للحل

ويتم اعداده وفق الطريقة المعتادة لمنهج السمبلكس وسيظهر الجدول المبدئي للحل على الصورة التالية :

الجدول المبدئي

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٦	١٠	صفر	صفر	١٠٠	١٠٠	
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	ص ١	ص٢	
١٠٠	ص ١	١٠٠	١٠	٥	−١	صفر	١	صفر	١٠٠/١٠ = ١٠
صفر	س ٤	٢٠	١	صفر	صفر	١	صفر	صفر	٢٠/١ = ٢٠
١٠٠	ص ٢	١٦	١	١	صفر	صفر	صفر	١	١٦/١ = ١٦
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١١٠٠	٦٠٠	−١٠٠	صفر	١٠٠	١٠٠	
	١١٦٠٠	صافي التغير	−١٠٩٤	−٥٩٠	١٠٠	صفر	صفر	صفر	

↑ متغير داخل (س ١)

الخطوة الثالثة : اختبار مثالية الحل بالجدول المبدئي

بالنظر الى صف صافي التغير بالجدول المبدئي يتبين ان هناك قيم صافي تغير سالبة ، وهذا يعني وفقا لقاعدة الامثلية ، ان الجدول المبدئي لا يقدم الحل الامثل ولكنه يحتاج الى تحسين ، وهذا يقودنا الى الخطوة الرابعة .

الخطوة الرابعة : تحسين الحل

وكما هو معتاد تسير خطوات تحسين الحل كما يلي :

(١) تعيين المتغير الداخل : سيتم اختيار المتغير س ١ كمتغير داخل لانه ذات اكبر قيمة باشارة سالبة في صف صافي التغير بالجدول المبدئي .

(٢) تحديد المتغير الخارج : سيكون المتغير الخارج هو المتغير الاصطناعي ص ١ حيث انه يمثل اقل خارج قسمة كما هو مبين على يسار الجدول المبدئي .

(٣) تحديد المفتاح . القيمة (١٠) هي قيمة المفتاح وهي القيمة الواقعة عند تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج .

(٤) ايجاد القيم الجديدة للصف الرئيسي الجديد (صف المتغير الداخل س ١) .

صف ص ١ في الجدول المبدئي	١٠٠	١٠	٥	١-	صفر	١	صفر
÷	÷	÷	÷	÷	÷	÷	÷
المفتاح	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠
صف س ١ في الجدول الثاني	١٠	١	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{١٠}$	صفر	$\frac{١}{١٠}$	صفر

(٥) ايجاد القيم الجديدة لباقى الصفوف :

(أ) القيم الجديدة للصف س ٤ فى الجدول الثانى (المضاعف = ١) .

٢٠ − (١٠ × ١) = ١٠
١ − (١ × ١) = صفر
صفر − (١/٢ × ١) = − ١/٢
صفر − (− ١/١٠ × ١) = ١/١٠
١ − (صفر × ١) = ١
صفر − (١/١٠ × ١) = − ١/١٠
صفر − (صفر × ١) = صفر

(ب) القيم الجديدة للصف ص ٢ فى الجدول الثانى (المضاعف = ١) .

١٦ − (١٠ × ١) = ٦
١ − (١ × ١) = صفر
١ − (١/٢ × ١) = ١/٢
صفر − (− ١/١٠ × ١) = ١/١٠
صفر − (صفر × ١) = صفر
صفر − (١/١٠ × ١) = − ١/١٠
١ − (صفر × ١) = ١

(٦) ولايجاد باقى قيم الجدول كدالة الهدف ، وقيم صف التكاليف الداخلة ، وكذلك قيم صف صافى التغير ، سنتبع نفس الاسلوب المعتاد لطريقة السمبلكس .

(٧) تصوير الجدول الثانى للحل ويلاحظ ايضا اننا سنسقط منه عمود ص ١ وهو المتغير الخارج حيث لا داعى لوجوده لانه قد ادى المطلوب منه فى تسهيل الحل .

الجدول الثانى

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٦	١٠	صفر	صفر	١٠٠
		القيم	س١	س٢	س٣	س٤	ص٢
٦	س ١	١٠	١	١/٢	١/٢	صفر	صفر
صفر	س ٤	١٠	صفر	-١/٢	-١/١٠	١	صفر
١٠٠	ص ٢	٦	صفر	١/٢	١/١٠	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٦	٥٣	٩٤/١٠	صفر	١٠٠
	٦٦٠	صافى التغير	صفر	-٤٣	-٩٤/١٠	صفر	صفر

↑

المتغير الداخل

الخطوة الخامسة : اختبار مثالية الجدول الثانى

بفحص صف صافى التغير بالجدول الثانى يتبين أن هناك قيم صافى تغير سالبة ، وهذا يعنى ان الجدول الثانى لا يقدم الحل الامثل ولكن يحتاج الى تحسين وهذا ما سنفعله فى الخطوة التالية .

الخطوة السادسة : تحسين الحل

وتسير اجراءات تحسين الحل كما يلى :

(١) تعيين المتغير الداخل : سيتم اختيار المتغير (س ٢) كمتغير داخل فى الجدول الثالث ، لانه ذات اكبر قيمة باشارة سالبة فى صف صافى التغير كما هو واضح بالجدول الثانى .

(٢) تحديد المتغير الخارج : سيكون المتغير الخارج هو المتغير الاصطناعى ص ٢ حيث انه يمثل اقل خارج قسمة كما هو مبين على يسار الجدول الثانى

(٣) تحديد المفتاح : وتمثل القيمة $(\frac{1}{2})$ نقطة تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج ، وعليه فانها تمثل قيمة المفتاح .

(٤) ايجاد القيم الجديدة للصف الرئيسى الجديد (صف المتغير الداخل س ٢)

صف ص ٢ فى الجدول الثانى	٦	صفر	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	صفر	١
÷	÷	÷	÷	÷	÷	÷
المفتاح	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
صف س ٢ فى الجدول الثالث	١٢	صفر	١	$\frac{1}{5}$	صفر	٢

(٥) ايجاد القيم الجديدة لباقى الصفوف

(أ) القيم الجديدة للصف س ١ فى الجدول الثالث (المضاعف $\frac{1}{2}$) .

$$10 - (12 \times \frac{1}{2}) = 4$$
$$1 - (\text{صفر} \times \frac{1}{2}) = 1$$
$$\frac{1}{2} - (1 \times \frac{1}{2}) = \text{صفر}$$
$$-\frac{1}{10} - (\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}) = -\frac{1}{5}$$
$$\text{صفر} - (\text{صفر} \times \frac{1}{2}) = \text{صفر}$$
$$\text{صفر} - (2 \times \frac{1}{2}) = 1$$

(ب) القيم الجديدة للصف س ٤ فى الجدول الثالث (المضاعف $-\frac{1}{2}$) .

$$10 - (12 \times -\frac{1}{2}) = 16$$
$$\text{صفر} - (\text{صفر} \times -\frac{1}{2}) = \text{صفر}$$

$-\frac{١}{٢} - (١ \times -\frac{١}{٢}) =$ صفر

$\frac{١}{١٠} - (\frac{١}{٥} \times -\frac{١}{٢}) = \frac{١}{٥}$

$١ - ($ صفر $\times -\frac{١}{٢}) = ١$

صفر $- (٢ \times -\frac{١}{٢}) = ١$

(٦) ولايجاد باقى قيم الجدول ، وهى دالة الهدف ، وصف التكاليف الداخلة ، وقيم صافى التغير ، نتبع الاسلوب المعتاد .

(٧) تصوير الجدول الثالث للحل ، ويلاحظ كذلك اننا اسقطنا فى ذلك الجدول عمود س ٢ لانه متغير خارج وأدى مهمته فى تسهيل الحل .

الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٦	١٠	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤
٦	س ١	٤	١	صفر	$-\frac{١}{٥}$	صفر
صفر	س ٤	١٦	صفر	صفر	$\frac{١}{٥}$	١
١٠	س ٢	١٢	صفر	١	$\frac{١}{٥}$	صفر
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٦	١٠	$\frac{٤}{٥}$	صفر
	١٤٤	صافى التغير	صفر	صفر	$-\frac{٤}{٥}$	صفر

المتغير الداخل

الخطوة السابعة : اختبار مثالية الجدول الثالث

على الرغم من ان قيمة دالة الهدف قد انخفضت الى ١٤٤ جنيه في الجدول الثالث بعد ان كانت ٦٦٠ جنيه بالجدول الثاني ، اى ان الحل بالجدول الثالث كان افضل من الحل بالجدول الثاني ، الا انه مع ذلك لا يعتبر جدول الحل الامثل ، اذ ما زال صف صافي التغير بالجدول الثالث به قيمه سالبة للمتغير س ٣ وهذا يعني ان الجدول الثالث لا يقدم الحل الامثل ولكن يتعين العمل لمزيد من تحسين الحل .

الخطوة الثامنة : تحسين الحل واعداد الجدول الرابع

(١) المتغير الداخل هو المتغير س ٣

(٢) المتغير الخارج هو المتغير س ٢

(٣) المفتاح هو $\frac{1}{5}$

(٤) القيم الجديدة للصف الرئيسي الجديد (صف المتغير الداخل س ٣) .

صف س ٢ في الجدول الثالث	١٢	صفر	١	$\frac{1}{5}$	صفر
÷	÷	÷	÷	÷	÷
المفتاح	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
صف س ٣ في الجدول الرابع	٦٠	صفر	٥	١	صفر

(٥) القيم الجديدة لباقي الصفوف

(أ) القيم الجديدة للصف س ١ في الجدول الرابع

(المضاعف = $-\frac{1}{5}$) .

٤ − (٦٠ × $-\frac{1}{5}$) = ١٦

١ − (صفر × $-\frac{1}{5}$) = ١

صفر − (٥ × $-\frac{1}{5}$) = ١

$-\frac{1}{5}$ − (١ × $-\frac{1}{5}$) = صفر

صفر − (صفر × $-\frac{1}{5}$) = صفر

(ب) القيم الجديدة للصف س ٤ في الجدول الرابع

(المضاعف $\frac{١}{٥}$) ٠

١٦ − (٦٠ × $\frac{١}{٥}$) = ٤

صفر − (صفر × $\frac{١}{٥}$) = صفر

صفر − (٥ × $\frac{١}{٥}$) = −١

$\frac{١}{٥}$ − (١ × $\frac{١}{٥}$) = صفر

١ − (صفر × $\frac{١}{٥}$) = ١

(٦) ثم يتم حساب باقى قيم الجدول وهى دالة الهدف ، التكاليف الداخلة ، صافى التغير وسيظهر جدول الحل الرابع على الشكل التالي :

الجدول الرابع

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٦	١٠	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤
٦	س ١	١٦	١	١	صفر	صفر
صفر	س ٤	٤	صفر	− ١	صفر	١
صفر	س ٣	٦٠	صفر	٥	١	صفر
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٦	٦	صفر	صفر
	٩٦	صافى التغير	صفر	٤	صفر	صفر

وواضح من الجدول الرابع انه جدول الحل الامثل ،
وبذلك يكون الحل الامثل هو س ١ = ١٦ ، س ٢ = صفر ٠
وتصل التكلفة الى ادنى حد لها ، اذ تبلغ ٩٦ جنيها

معالجة بعض الحالات الخاصة فى حل نماذج البرامج الخطية :

فى بعض الاحيان وعند حل مشاكل البرمجة الخطية ، تظهر بعض الحالات الخاصة ، ونظرا لاهمية مواجهة وحل هذه المشاكل فاننا سنستعرض فيما يلى الكيفية التى يتم بها التعامل مع تلك الحالات الخاصة ، وقد اخترنا امثلة لغرض التوضيح وراعينا ان تكون بسيطة وسهلة وفى نفس الوقت يمكن حلها بيانيا وبطريقة السمبلكس حتى تكون الفائدة اعم اذ ستظهر تلك الحالات فى الرسم البيانى على شكل يختلف عن شكل ظهورها فى طريقة السمبلكس ، مما يستوجب التعرف على شكل ظهورها فى الاسلوبين ، والحالات الخاصة التى سنتناولها هى :

أولا : حالة تعدد الحلول المثلى .

ثانيا : حالة الحلول غير المحددة .

ثالثا : حالة ان الحلول الممكنة غير موجودة .

رابعا : حالة تعدد المتغيرات المرشحة للدخول .

خامسا : حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج .

وفيما يلى توضيحا لكيفية التعامل مع تلك الحالات الخاصة .

أولا : حالة تعدد الحلول المثلى :

وكما هو واضح من طبيعة هذه الحالة الخاصة فى البرامج الخطية فانها تفيد انه لا يوجد حل امثل واحد لمشكلة البرمجة الخطية كما تعودنا على ذلك فى كافة التطبيقات التى تم حلها ، ولكن تظهر عند حل بعض مشاكل البرامج الخطية ، سواء كان أسلوب الحل الطريقة البيانية ام طريقة السمبلكس ، ان هناك عدة حلول مثلى للمشكلة وتعطى جميعها نفس قيمة دالة الهدف وحتى يمكن معرفة ابعاد طبيعة مشكلة البرمجة الخطية التى تنتابها هذه الظاهرة سنفترض مشكلة البرمجة الخطية التالية :

الصياغة الرياضية للمشكلة

دالة الهدف تعظيم س ١ + ٢ س ٢ ——— اقصى

ربح ممكن بشرط ان :

س ١ + ٢ س ٢ ≥ ٢٤

٣/٢ س ١ + س ٢ ≥ ١٨

س ١ ≥ ١٠

س ٢ ≥ ١١

س ١ ، س ٢ ≤ صفر

وفيما يلى نقوم بحل هذه المشكلة بالطريقة البيانية وبطريقة السمبلكس وسنبدأ بالطريقة البيانية :

(١) تحويل متباينات القيود الى معادلات باهمال الاشارة (≥) .

س ١ + ٢ س ٢ = ٢٤

٣/٢ س ١ + س ٢ = ١٨

س ١ = ١٠

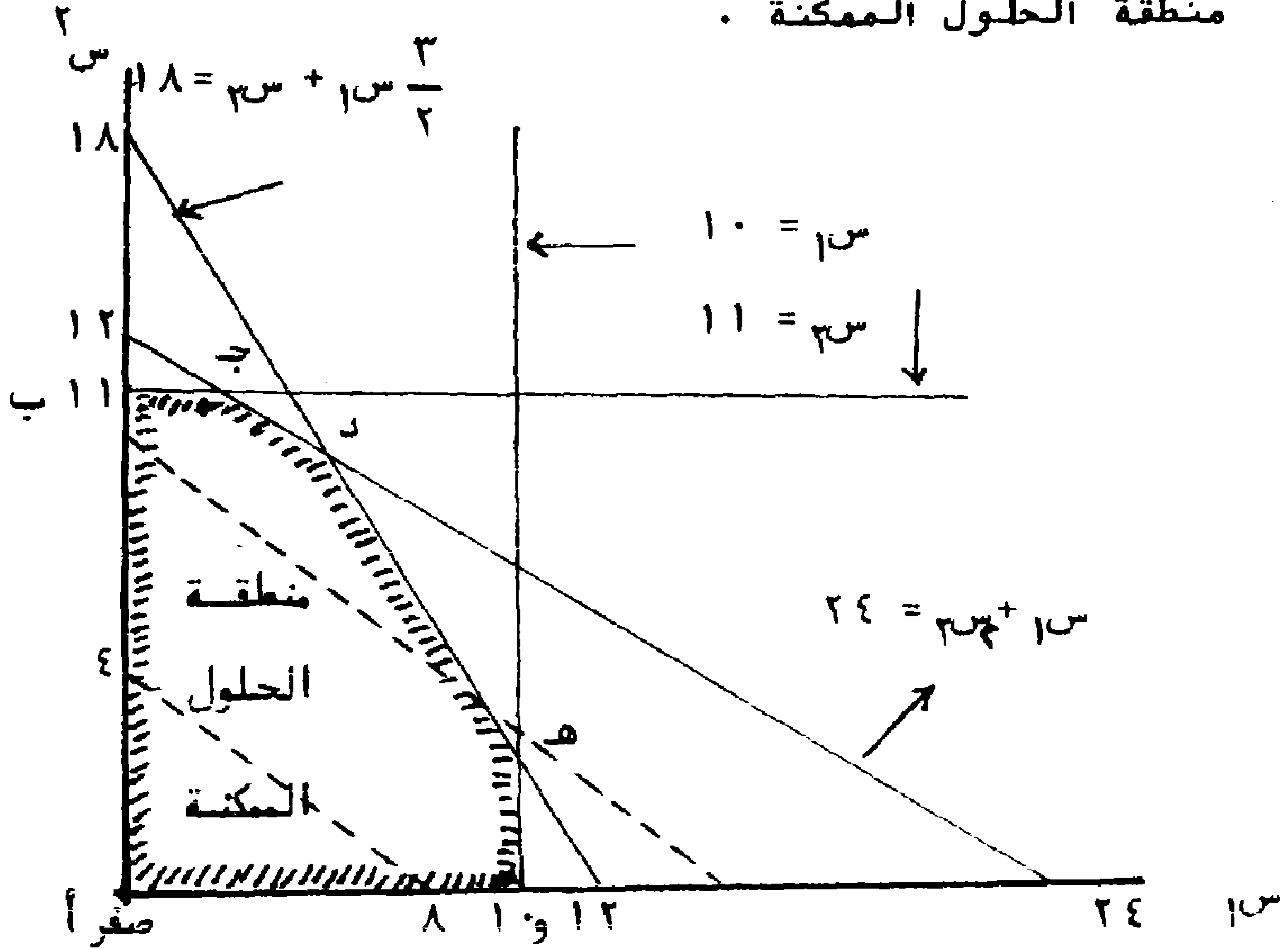
س ٢ = ١١

(٢) التمثيل البيانى للمعادلات

(أ) ايجاد الاحداثيات الخاصة بكل معادلة

معادلات القيود	احداثي النقطة الاولى		احداثي النقطة الثانية	
	نفرض ان س ١= صفر	∴ س٢	∴ س١	نفرض ان س٢ = صفر
س١ + ٢ س٢ = ٢٤	صفر	١٢	٢٤	صفر
٣/٢ س١ + س٢ = ١٨	صفر	١٨	١٢	صفر
س ١ = ١٠	—	∞	١٠	صفر
س ٢ = ١١	صفر	١١	∞	—

(ب) تمثيل الاحداثيات على الرسم البياني وتحديد منطقة الحلول الممكنة .



ومن هذا الشكل يتضح ان منطقة الحلول الممكنة هى المنطقة أ ب ج د هـ ، ويمكن تعيين نقطة الحل الامثل باستخدام طريقة خط الربح المتساوى ، فاذا اخترنا قيمة لدالة الهدف ولتكن ٨ حيث ان هذا الرقم يقبل القسمة على معاملات دالة الهدف كما انه يمثل كمية انتاج تقع بمنطقة الحلول الممكنة فان الخط المتقطع الاول بالشكل البيانى يمثل دالة الهدف س ١ + ٢ س ٢ =٨، ثم نقوم برسم خطوط متوازية لهذا الخط (كما هو موضح بالشكل) فى اتجاه زيادة قيمة دالة الهدف ، وبالتحرك لاعلى حتى نصل الى اعلى نقطة لتكون هى نقطة الحل الامثل التى تصل بقيمة دالة الهدف الى حدها الاقصى ، سنجد ان حافة المسطرة سوف تنطبق تماما مع خط المعادلة س ١ + ٢ س ٢ = ٢٤ ، ومعنى ان خط الربح المتساوى منطبق على هذا الخط ان اى نقطة على هذا الخط فى حدود منطقة الحلول الممكنة يعتبر حل امثل ، اى ان هذه المشكلة لها حلول مثلى متعددة .

وعموما سنجرب ذلك ليقف القارئ على تلك الحقيقة واضحة . ان النقطتين د ، ج يقعان على خط المعادلة س ١ + ٢ س ٢ = ٢٤ وفى نفس الوقت من حدود منطقة الحلول الممكنة ، ان ذلك يعنى ان كلا من النقطتين د ، ج يمثل حلا امثلا بل والاكثر ان اى نقطة واقعة بينهما على نفس الخط يعتبر حلا امثلا ايضا . وسنجرب الان قيمة دالة الهدف عند النقطتين ج ، د .

<u>قيمة دالة الهدف عند النقطة ج :</u> لحساب قيمة دالة الهدف عند النقطة (ج) يتعين :

أولا : ان نحسب قيم كل من س ١ ، س ٢ عند تلك النقطة ويتم ذلك عن طريق حل المعادلتين

س ١ + ٢ س ٢ = ٢٤

س ٢ = ١١

وبالتعويض بقيمة س ٢ فى المعادلة الاولى نحصل على قيمة س ١

س ١ + ٢ × ١١ = ٢٤

س ١ = ٢٤ − ٢٢

∴ س ١ = ٢

اى ان النقطة ج تمثل س ١ = ٢ ، س ٢ = ١١

∴ قيمة دالة الهدف عند النقطة ج = ١×٢+٢×١١ = ٢٤ جنيه .

<u>قيمة دالة الهدف عند النقطة (د)</u>

النقطة (د) هى نقطة تقاطع معادلة القيد الاول

(س ١ + ٢ س ٢ = ٢٤)

ومعادلة القيد الثانى (٣/٢ س ١ + س ٢ = ١٨)

اذن عن طريق حل هاتين المعادلتين آنيا نحصل على احداثى تلك النقطة كالاتى :

س ١ + ٢ س ٢ = ٢٤ (١)

٣/٢ س ١ + س ٢ = ١٨ (٢)

×٢ ٣ س ١ + ٢ س ٢ = ٣٦ (٣)

وبطرح (١) من (٣)

∴ ٢ س ١ = ١٢

∴ س ١ = $\frac{١٢}{٢}$ = ٦

وبالتعويض بتلك القيمة فى المعادلة الاولى نحصل على قيمة س ٢

٦ + ٢ س ٢ = ٢٤

٢ س ٢ = ٢٤ − ٦

س ٢ = $\frac{١٨}{٢}$ = ٩

∴ احداثى النقطة (د) هو (٦ ، ٩) .

وبذلك تكون قيمة دالة الهدف عند النقطة (د) هى

١ × ٦ + ٢ × ٩ = ٢٤ جنيه

وبمقارنة قيمة دالة الهدف عند النقطة (د) بقيمتها عند النقطة (ج) نجد انها متماثلة وتساوى ٢٤ جنيه ، وهذا يعنى ان النقطتين (د) ، (ج) نقطتان للحل الامثل ليس هذا فقط بل وكافة النقاط الواقعة بينهما على خط المعادلة الاولى كلها تمثل حلولا مثلى وبنفس قيمة دالة الهدف اى هناك تعدد فى الحلول المثلى .

وقد يكون من المفيد ايضا فى هذا المكان ان نبرز شكل تلك الحالة اذا ما تم حلها باستخدام اسلوب السمبلكس

(١) الصياغة الرياضية للمشكلة :

تعظيم س ١ + ٢ س ٢ ⟵ اقصى ربح ممكن

بشرط ان

س ١ + ٢ س ٢ ≥ ٢٤

$\frac{٣}{٢}$ س ١ + س ٢ ≥ ١٨

س ١ ≥ ١٠

س ٢ ≥ ١١

س ١ ، س ٢ ≤ صفر

(٢) **تحويل متباينات القيود الى معادلات باضافة المتغيرات الراكدة :**

$$س_1 + ٢س_2 + س_3 = ٢٤$$
$$\frac{٣}{٢}س_1 + س_2 + س_4 = ١٨$$
$$س_1 + س_5 = ١٠$$
$$س_2 + س_6 = ١١$$

(٣) **اعداد جداول الحل وصولا للحل الامثل :**

الجدول المبدئي :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١	٢	صفر	صفر	صفر	صفر
		القيم	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$س_4$	$س_5$	$س_6$
صفر	$س_3$	٢٤	١	٢	١	صفر	صفر	صفر
صفر	$س_4$	١٨	$\frac{٣}{٢}$	١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	$س_5$	١٠	١	صفر	صفر	صفر	١	صفر
صفر	$س_6$	١١	صفر	١	صفر	صفر	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	صفر	صافي التغير	١	٢	صفر	صفر	صفر	صفر

المتغير الداخل ↑ ($س_2$)

الجدول الثانى :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١	١	صفر	صفر	صفر	صفر
		القيم	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$س_4$	$س_5$	$س_6$
صفر	$س_3$	٢	١	صفر	١	صفر	صفر	-٢
صفر	$س_4$	٧	$\frac{3}{2}$	صفر	صفر	١	صفر	-١
صفر	$س_5$	١٠	١	صفر	صفر	صفر	١	صفر
٢	$س_2$	١١	صفر	١	صفر	صفر	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	صفر	٢	صفر	صفر	صفر	٢
	٢٢	صافى المتغير	١	صفر	صفر	صفر	صفر	-٢

المتغير الداخل (↑ $س_1$)

الجدول الثالث :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١	٢	صفر	صفر	صفر	صفر
		القيم	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$س_4$	$س_5$	$س_6$
١	$س_1$	٢	١	صفر	١	صفر	صفر	-٢
صفر	$س_4$	٤	صفر	صفر	$-\frac{3}{2}$	١	صفر	٢
صفر	$س_5$	٨	صفر	صفر	-١	صفر	١	٢
٢	$س_2$	١١	صفر	١	صفر	صفر	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١	٢	١	صفر	صفر	صفر
	٢٤	صافى المتغير	صفر	صفر	-١	صفر	صفر	صفر

متغير داخل (↑ $س_6$)

وباختبار مثالية الجدول الثالث نجد ان جميع قيم صف صافي التغير اما صفرية او سالبة اى انه يمثل جدول الحل الامثل . ولكن هنا يثار تساؤل الا يمكن ان يكون هناك حل امثل آخر ؟ للاجابة على هذا التساؤل نقول انه اذا اردنا ان نعدل فى الحل الوارد بالجدول الثالث ونسير الى جدول رابع وهذا يتطلب تعيين متغير داخل من المتغيرات غير الاساسية ليصبح متغير غير اساسى . نحن نعلم ان لدينا فى هذه المشكلة ستة متغيرات كما هو واضح من الجدول الثالث اربعة منها اساسية واثنين غير اساسية وهما :

المتغيرات الاساسية هى : $س_١$ ، $س_٤$ ، $س_٥$ ، $س_٢$

المتغيرات غير الاساسية هى: $س_٣$ ، $س_٦$

فاذا اردنا تعديل الحل بالجدول الثالث يتعين اختيار $س_٣$ أو $س_٦$ ليصبح متغير داخل اى ينتقل من حالته غير الاساسية ليصبح متغير أساسى . ولكن أيهما نختار ؟

بالنظر الى قيمة صافى التغير لكل منهما نجد انه بالنسبة للمتغير غير الاساسى $س_٣$ (-١) وهذا يعنى ان اختيار هذا المتغير سيؤدى الى تخفيض دالة الهدف وهذا عكس ما هو مطلوب اما قيمة صافى التغير للمتغير $س_٦$ (صفر) فان ذلك يعنى انه يمكن ان يدخل فى الحل دون اى تغير فى قيمة دالة الهدف وهذا هو المطلوب . والجدول الرابع يقدم هذا التعديل .

الجدول الرابع :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١	٢	صفر	صفر	صفر	صفر
		القيم	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$س_4$	$س_5$	$س_6$
١	$س_1$	٦	١	صفر	$-\frac{1}{2}$	١	صفر	صفر
صفر	$س_6$	٢	صفر	صفر	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	صفر	١
صفر	$س_5$	٤	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$	١-	١	صفر
٢	$س_2$	٩	صفر	١	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	صفر	صفر
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١	٢	١	صفر	صفر	صفر
	٢٤	صافى التغير	صفر	صفر	١-	صفر	صفر	صفر

وبمقارنة قيمة دالة الهدف بالجدول الرابع نجد انها نفس قيمة دالة الهدف بالجدول الثالث اى ان المشكلة التى عالجناها لها اكثر من حل امثل ويعطى نفس قيمة دالة الهدف فقيمة المتغيرات القرارية كانت فى كل من الجدولين كالاتى :

المتغيرات القرارية	القيمة بالجدول الثالث	القيمة بالجدول الرابع
$س_1$	٢	٦
$س_2$	١١	٩
قيمة دالة الهدف	٢٤ جنيه	٢٤ جنيه

وقبل ان نترك هذه الحالة نود ان نلفت النظر الى انه يجدر ملاحظة التماثل بين دالة الهدف والقيد الاول ، وهذا معناه انه عند رسم خط الربح المتساوى سوف ينطبق على معادلة القيد الاول ، وعلى ذلك عندما

تكون دالة الهدف هى نفسها احد القيود عند كتابته على صورة معادلة ، فاننا نحصل على حلول مثلى متعـــــددة.

ولعل معرفة الادارة ومتخذى القرارات بان المشكلة التى بين ايديهم لها عدة حلول مثلى يمكنهم من حريـــة الحركة والمرونة والمقارنة والملاءمة وفى وضع افضـــل لمقابلة اى تعديلات او ظروف طارئة . اذ بدل ان يفـــرض حل واحد قد تعترضه بعض الصعوبات اثناء التنفيـــــذ تكون الادارة قادرة على الاختيار من بين تلك الحلـــول المثلى وفقا للموقف الذى يستدعى اتخاذ القرار. لذلــك يتعين عند حل مشكلة برمجة خطية ان نقف على الحـــل او الحلول المثلى ولا يكتفى بحل واحد بحجة ان جميعهـا سواء لانها تحقق نفس الربحية فترشيد اتخاذ القـــرارات الادارية يتطلب مزيدا من المرونة وهذا ما يوفره تعـدد الحلول المثلى .

ثانيا : حالة الحلول غير المحددة :

يحدث فى بعض الاحيان عند حل احدى مشاكل البرمجـة الخطية ان نجد ان الحلول المثلى غير محددة ولا يمكـــن تعيينها بسهولة ، وهذه الحالة تشير الى حقيقـــــة ان قيمة دالة الهدف يمكن ان تزيد بدون حدود وذلك فـى حالة مشاكل التعظيم او تقل قيمتها فى حالة مشاكـــــل التخفيض بدون حدود ، ويحدث هذا سواء كنا نتبع اسلـوب الرسم البيانى فى الحل او طريقة السمبلكس . ولتوضيـح هذه الحالة سنفترض المثال التالى :

مثال : أوجد الحل الامثل لمشكلة البرمجـــــة الخطية والتى تم اعداد صياغتها الرياضية على الوجــه التالى :

دالة الهدف تعظيم ١٢ س$_{١}$ + ٦ س$_{٢}$ ⟵ اقصى ربح ممكن

بشرط ان :

٤ س$_{١}$ – ٤ س$_{٢}$ ≥ ٢٠

٨ س$_{١}$ – ٢ س$_{٢}$ ≥ ٨٠

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≤ صفر

الحل :

(١) تحويل متباينات القيود الى معادلات باهمال الاشارة (>) ٠

٤ س$_{١}$ – ٤ س$_{٢}$ = ٢٠

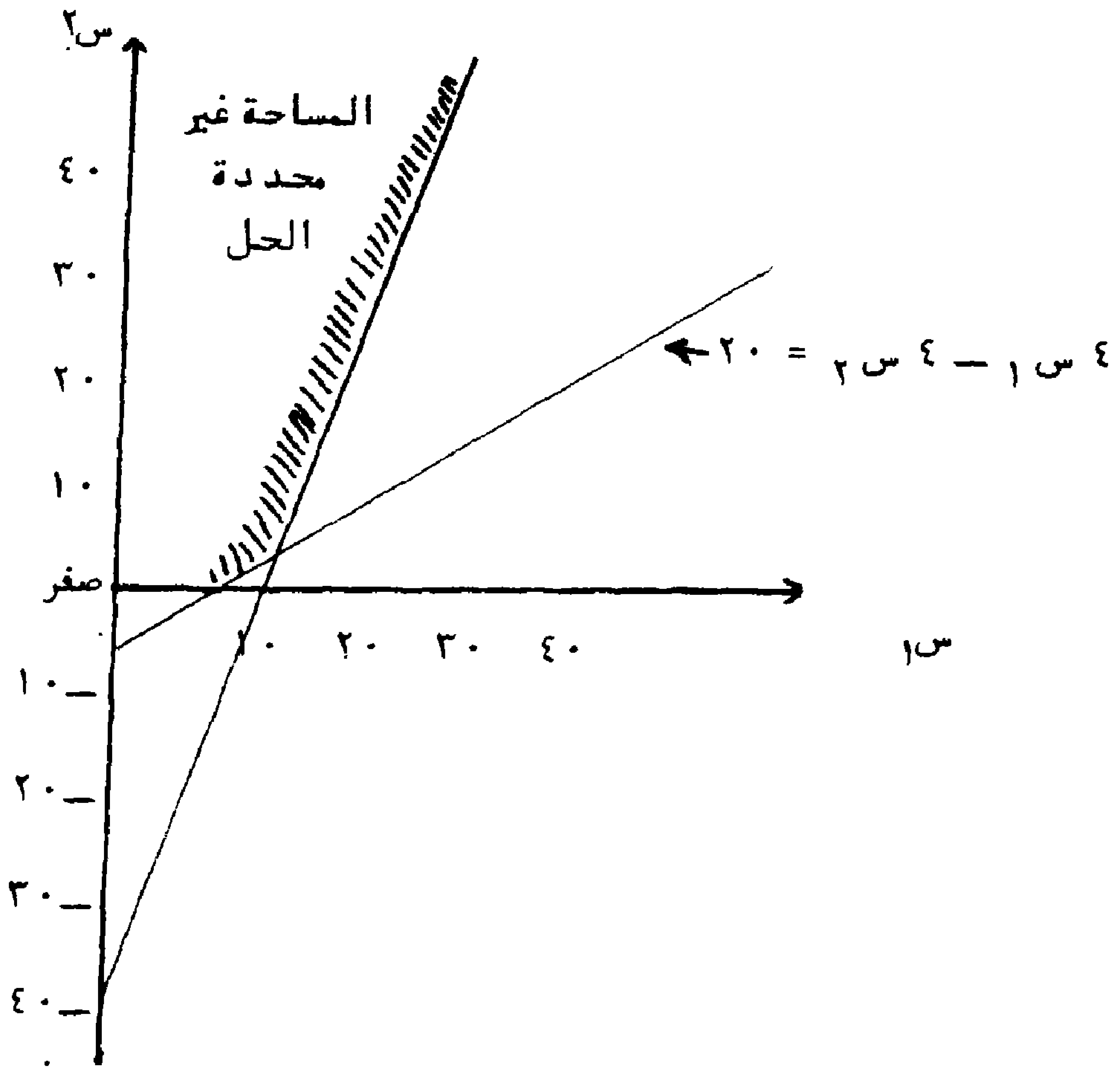
٨ س$_{١}$ – ٢ س$_{٢}$ = ٨٠

(٢) التمثيل البياني للمعادلات :

(أ) ايجاد الاحداثيات الخاصة بكل معادلة

معادلات القيود	احداثي النقطة الاولى		احداثي النقطة الثانية	
	بفرض س$_{١}$ = صفر	اذن س$_{٢}$ =	اذن س$_{١}$ =	بفرض س$_{٢}$ = صفر
٤ س$_{١}$ – ٤ س$_{٢}$ = ٢٠	صفر	– ٥	٥	صفر
٨ س$_{١}$ – ٢ س$_{٢}$ = ٨٠	صفر	– ٤٠	٢٠	صفر

(ب) تمثيل الاحداثيات على الرسم البيانى وتحديد منطقة الحلول الممكنة ٠



ومن هذا الرسم البيانى يتضح ان منطقة الحلول الممكنة هى مساحة غير محددة الحل ومن ثم فان الحل فى هذه الحالة لتلك المشكلة غير محدد ، ولعل هذا الوضع ناشىء من انه يلاحظ من القيود بتلك المشكلة ان المتغير س $_{٢}$ يمكن ان تزيد قيمته بدون حدود وهذا معناه صعوبة تحديد حل معين ٠

وفيما يلى نتناول حل ذات المشكلة باتباع طريقة السمبلكس لنتعرف على شكل جداول الحل وكيف تظهر المشكلة بان حلها غير محدد ومن ثم نتوقف عن المزيد من اجراءات تحسين الحل ٠

(١) <u>الصياغة الرياضية للمشكلة</u>

دالة الهدف تعظيم ١٢ $س_{١}$ + ٦ $س_{٢}$ ← اقصى ربح ممكن بشرط ان :

٤ $س_{١}$ – ٤ $س_{٢}$ ≤ ٢٠
٨ $س_{١}$ – ٢ $س_{٢}$ ≤ ٨٠
$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ≥ صفر

(٢) تحويل متباينات القيود الى معادلات باضافة المتغيرات الراكدة

٤ $س_{١}$ – ٤ $س_{٢}$ + $س_{٣}$ = ٢٠
٨ $س_{١}$ – ٢ $س_{٢}$ + $س_{٤}$ = ٨٠

(٣) اعداد الجدول المبدئى للحل :

الجدول المبدئى

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١٢	٦	صفر	صفر
		القيم	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$
صفر	$س_{٣}$	٢٠	٤	– ٤	١	صفر
صفر	$س_{٤}$	٨٠	٨	– ٢	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر
	صفر	صافى المتغير	١٢	٦	صفر	صفر

↑ المتغير الداخل

ويتبين من الجدول المبدئى ان الحل غير امثـــل
ولذا سيتم تحسينه فى الجدول الثانى

(٤) الجدول الثانى للحل

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١٢	٦	صفر	صفر
		القيم	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	$س_٤$
١٢	$س_١$	٥	١	١ –	١/٤	صفر
صفر	$س_٤$	٤٠	صفر	٦	٢ –	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١٢	١٢–	٣	صفر
	٦٠	صافى التغير	صفر	١٨	٣–	صفر

↑ المتغير الداخل

(٥) الجدول الثالث للحل

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١٢	٦	صفر	صفر
		القيم	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	$س_٤$
١٢	$س_١$	٢٥/٣	١	صفر	– ١/١٢	١/٦
٦	$س_٢$	٢٠/٣	صفر	١	– ١/٣	١/٦
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١٢	٦	– ٣	٣
	– ١٤	صافى التغير	صفر	صفر	٣	٣–

ونلاحظ من الجدول الثالث انه مازالت قيمة صافي التغير للمتغير غير الاساسي $س_٣$ موجبة وهذا يعني امكانية تحسين الحل ، باختيار $س_٣$ متغير داخل ، على الرغم من خروجه قبل ذلك عند الانتقال من الجدول الثاني ، وحتى لو سرنا فرضا في الحل وفقا للقاعدة العامة لطريقة السمبلكس واخترنا $س_٣$ متغير داخل فعند تحديد المتغير الخارج سنجد ان خارج القسمة للمتغيرات الاساسية قيما سالبة (كما هو موضح على يسار الجدول الثالث وهنا لا يمكن اختيار ايهما حيث ان القاعدة ان المتغير الخارج هو اقل خارج قسمة موجب وحيث لا يوجد خارج قسمة موجب فان الحل يتوقف .

وكان من الممكن ملاحظة ان هذا سيحدث لهذه المشكلة وان الحل غير محدد وذلك اذا ما نظرنا الى عمود $س_٢$ بالجدول المبدئي فاننا نلاحظ ان معاملات هذا العمود اما سالبة او صفرا وهذا يعني ان قيمة $س_٢$ غير محددة وان دالة الربح تزيد بلا حدود .

ولكن هل يعني ما قدمناه في الجزء السابق ان مشكلة البرمجة الخطية غير محددة المساحة للحل لا يمكن ان نصل في حلها الى حل امثل ، الحقيقة ان الاجابة بنعم على هذا التساؤل امر غير صحيح اذ ان هناك مشاكل لها مساحة غير محددة الحل ولكن يمكن الوصول الى حل امثل لها . ان ذلك يتوقف على شكل دالة الهدف الخاصة بتلك المشكلة . اذن يمكن القول بصفة عامة انه لا يمكن الادعاء بان مشاكل البرمجة الخطية والتي تتصف بان منطقة الحلول الممكنة لها غير محددة المساحة ليس لها حل امثل ولكن ذلك يتوقف على الشكل الذي تكون عليه دالة الهدف ، ويمكن التحقق من ذلك بمثال تطبيقي

مثال :

اوجد الحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية التى تم صياغتها على الوجه التالى :

دالة الهدف : تعظيم $٣ س_{١} - س_{٢}$ ⟵ اقصى ربح ممكن

بشرط ان :

$$٢ س_{١} - س_{٢} \leq ٢$$
$$س_{١} \leq ٣$$
$$س_{١} ، س_{٢} \geq صفر$$

الحل البيانى :

(١) تحويل متباينات القيود الى معادلات عن طريق اهمال الاشارة (>)

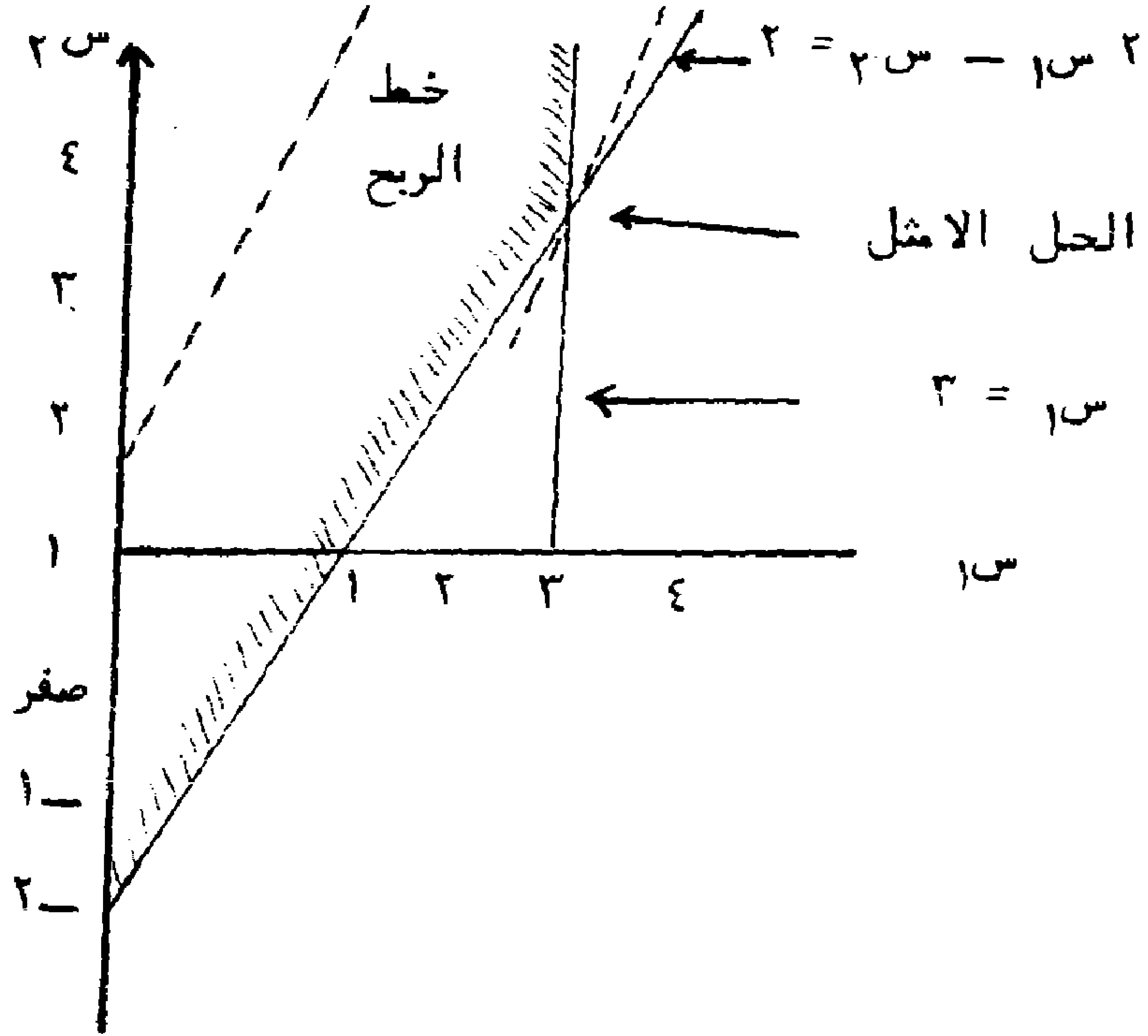
$$٢ س_{١} - س_{٢} = ٢$$
$$س_{١} = ٣$$

(٢) التمثيل البيانى للمعادلات

(أ) ايجاد الاحداثيات الخاصة بكل معادلة .

معادلات القيود	احداثى النقطة الاولى		احداثى النقطة الثانية	
	بفرض ان $س_{١} = ٠$	اذن $س_{٢} =$	اذن $س_{١} =$	بفرض ان $س_{٢} = ٠$
$٢ س_{١} - س_{٢} = ٢$	صفر	− ٢	١	صفر
$س_{١} = ٣$	—	∞	٣	صفر

(ب) تمثيل الاحداثيات على الرسم البياني وتحديد منطقة الحلول الممكنة .



ويتبين ان الحل الامثل هو نقطة تقاطع خطي المعادلتين،وذلك على الرغم من ان المساحة التي تمثل منطقة الحلول الممكنة غير محددة . والحل الامثل من هذا الشكل هو :

$$س_1 = ٣$$

$$س_2 = ٤$$

وتصل الارباح الى اقصى حد لها اذ تبلغ ٥ جنيه .

الحل بطريقة السمبلكس :

وفيما يلى حل المشكلة السابقة باستخدام طريقة السمبلكس وذلك لتحديد الحل الامثل فى حالة وجود منطقة حلول ممكنة غير محددة .

(١) تحويل متباينات القيود الى معادلات باضافة المتغيرات الراكدة .

$$٢ س_{١} - س_{٢} + س_{٣} = ٢$$
$$س_{١} + س_{٤} = ٣$$

(٢) اعداد الجدول المبدئى للحل :

الجدول المبدئى

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٣	−١	صفر	صفر
		القيم	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$
صفر	$س_{٣}$	٢	٢	−١	١	صفر
صفر	$س_{٤}$	٣	١	صفر	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر
	صفر	صافى التغير	٣	−١	صفر	صفر

↑ متغير داخل

(٣) الجدول الثانى للحل

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٣	١-	صفر	صفر
		القيم	س١	س٢	س٣	س٤
٣	س١	١	١	$-\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	صفر
صفر	س٤	٢	صفر	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٣	$-\frac{٣}{٢}$	$\frac{٣}{٢}$	صفر
	٣	صافى التغير	صفر	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{٣}{٢}$	صفر

↑ المتغير الداخل (عمود س٢)

(٤) الجدول الثالث للحل

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٣	١-	صفر	صفر
		القيم	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$س_4$
٣	$س_1$	٣	١	صفر	صفر	١
١ -	$س_2$	٤	صفر	١	١-	٢
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٣	١-	١	١
	٥	صافي التغير	صفر	صفر	١-	١-

ويمثل الجدول الثالث جدول الحل الأمثل وهو نفس الحل الذى توصلنا اليه من خلال حل المشكلة بالطريقة البيانية .

ثالثا : حالة أن الحلول الممكنة غير موجودة :

اذا تبين انه لايمكن الوفاء ومقابلة كل القيود المفروضة على دالة الهدف سواء كان تعظيم أو تخفيض ، فانه يمكن القول أنه لايوجد الحل الممكن لتلك المشكلة ، اذ أن الحل الممكن هو ذلك الحل الذى لايتعارض مع أي من القيود المفروضة او الشروط المقيدة . ودائما تظهر هذه الحالة فى ظل وجود قيود تتضمن ($\geqslant$) وكذلك قيود تتضمن ($\leqslant$) . وفى هذه الحالة سنجد أن كلا المتغيرات لايمكن ان يتقابلا وبالتالى ليس هناك مساحة أو منطقة حلول ممكنة ومن ثم لاحل ممكن .

مثال :

أوجد الحل الأمثل للمشكلة التالية :

دالة الهدف تخفيض $٥س_1 + ٤س_2$ ⟵ أدنى حد ممكن

بشرط أن :

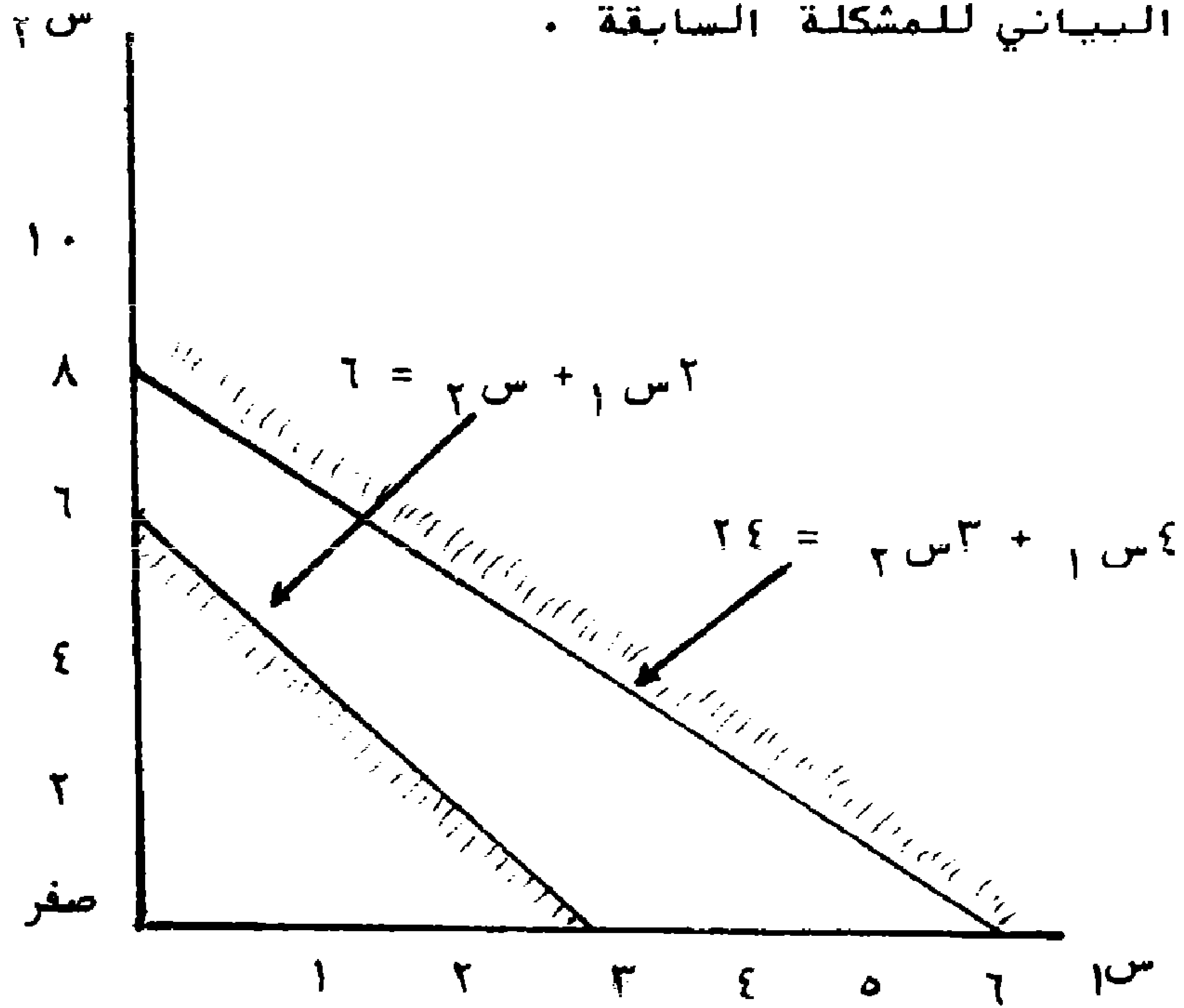
$$٢س_{١} + س_{٢} \leq ٦$$

$$٤س_{١} + ٣س_{٢} \geq ٢٤$$

$$س_{١} ، س_{٢} \geq صفر$$

(١) الحل باستخدام الحل البياني :

بعد الانتهاء من اجراءات الحل العادية باستخدام المدخل البياني فان الشكل التالي يمثل التمثيل البياني للمشكلة السابقة .



ويتبين من هذا الشكل أن الحلول الممكنة غير موجودة وذلك لانه لاتوجد منطقة يمكن ان تقابل كل القيود الموجودة .

(٢) الحل باستخدام طريقة السمبلكس :

ونهدف من حل تلك المشكلة باستخدام طريقة السمبلكس الى الوقوف على الشكل الذى ستأخذه جداول الحل فى تلك الحالة

أ) تحويل المتباينات الى معادلات بعد اضافة المتغيرات الراكدة والاصطناعية :

$$٢س_{١} + س_{٢} + س_{٣} = ٦$$

$$٤س_{١} + ٣س_{٢} - س_{٤} + ص_{١} = ٢٤$$

ب) اعداد الجدول المبدئى للحل .

الجدول المبدئي

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٥	٤	صفر	صفر	١٠٠
		القيم	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	$س_٤$	$ص_١$
صفر	$س_٣$	٦	٢	١	١	صفر	صفر
١٠٠	$ص_١$	٢٤	٤	٣	صفر	-١	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٤٠٠	٣٠٠	صفر	-١٠٠	١٠٠
	٢٤٠٠	صافي التغير	-٣٩٥	-٢٩٤	صفر	١٠٠	صفر

↑ متغير داخل

الجدول الثاني

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٥	٤	صفر	صفر	١٠٠
		القيم	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	$س_٤$	$ص_١$
٥	$س_١$	٣	١	½	½	صفر	صفر
١٠٠	$ص_١$	١٢	صفر	١	-٢	-١	صفر
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٥	-١٠٢½	-١٩٧½	-١٠٠	صفر
	١٢١٥	صافي التغير	صفر	-٩٨½	١٩٧½	١٠٠	١٠٠

↑ متغير داخل

نلاحظ ان المتغير الاصطناعي $ص_١$ مازال موجودا بالجدول الثاني على الرغم ان دوره مجرد تسهيل الحل ثم يختفي ويتم الاستغناء عنه ولو واصلنا الحل فيمكن أن نلاحظ ان المتغير $ص_١$ سيستمر ايضا بالجدول الثالث .

الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٥	٤	صفر	صفر	١٠٠
		القيم	س١	س٢	س٣	س٤	ص١
٤	س٢	٦	٢	١	١	صفر	صفر
١٠٠	ص١	٦	٢-	صفر	٣-	١-	صفر
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١٩٢-	٤	٢٩٦-	١٠٠-	صفر
	٦٢٤	صافى التغير	١٩٧	صفر	٢٩٦	١٠٠	١٠٠

وواضح ان المتغير الاصطناعي مازال باقيا بالجدول الثالث رغم ان الحل كما هو واضح من صف صافى التغير انه حل آمثل .

وبناء على ماتقدم فانه يمكن القول انه اذا تبين من الرسم البياني انه لايمكن مقابلة كل القيود الممثلة بالرسم ولانستطيع تحديد منطقة للحلول الممكنة عندئذ نعلم ان المشكلة ليس لها حل ممكن . أما اذا كان الحل بواسطة طريقة السمبلكس فاننا يمكن ان نعرف ان المشكلة ليس لها حل ممكن اذا استمر احد المتغيرات الاصطناعية باقيا فى الحل حتى نصل الى الحل الأمثل .

رابعا : حالة تعدد المتغيرات المرشحة للدخول :

لقد سبق القول فى الاجزاء السابقة التى تناولنا فيها منهج طريقة السمبلكس انه يلزم لتعيين المتغير الداخل فحص صف صافى التغير،فاذا كانت المشكلة التى نقوم بحلها ذات هدف تعظيم فيكون المتغير الداخل فى تلك الحالة هو المتغير ذات اكبر قيمة موجبة فى صف

صافي التغير ، واذا كانت المشكلة ذات هدف تخفيضي فيكون المتغير الداخل هو المتغير ذات اكبر قيمة باشارة سالبة . الى هذا الحد لاتوجد مشكلة اذن في عملية اختيار المتغير الداخل ،ولكن المشكلة تبدأ في الظهور عندما نجد أن هناك أكثر من متغير واحد متعادل في صف صافي التغير ويمثل أكبر قيمة أي أكثر من متغير مرشح للدخول وفقا لقاعدة اختيار المتغير الداخل ، عندئذ ستكون المشكلة هي الاختيار من بين هذه المتغيرات المرشحة للدخول . وفي الحقيقة فلاتوجد هناك قاعدة محددة للمفاضلة بينهما ، وطالما انه لاتوجد قاعدة محددة ترشد الى اختيار معين يسهم في الوصول الى الحل الامثل بشكل أسرع اذن يمكن الاختيار بطريقة جزافية . ولكن يبقى تساؤل هل اختيار المتغير الداخل جزافيا **مؤثر في الوصول الى الحل الامثل** ؟ للاجابة على ذلك نقول ان الاختيار الجزافي ليس له تأثير على الحل الأمثل ولكن تأثيره سينعكس على الوصول الى ذلك الحل اسرع وفي عدد جداول للحل أقل. ولكن الحقيقة اننا لانملك قاعدة تمكننا من هذا الاختيار الذي يسهم في سرعة الوصول الى الحل الأمثل ومن ثم فليس أمامنا سوى الاختيار الجزافي لحين التوصل الى القاعدة التي تحقق حسن الاختيار بدلا من الاختيار الجزافي .

<u>مثال</u>

اوجد الحل الأمثل للمشكلة التي تم صياغتها على الوجه التالي :

دالة الهدف تعظم $١٠س_١ + ١٠س_٢$ ← اقصى ربح ممكن

بشرط أن :

$$س_١ + ٢س_٢ \leqslant ١٠$$

$$س_٢ \leqslant ٥$$

$$س_١ ، س_٢ \geqslant صفر$$

(١) تحويل متباينات القيود الى معادلات باضافة المتغيرات الراكدة

$$س_١ + س_٢ + س_٣ = ١٠$$
$$س_٢ + س_٤ = ٥$$

(٢) اعداد الجدول المبدئي للحل :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١٠	١٠	صفر	صفر
		القيم	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	$س_٤$
صفر	$س_٣$	١٠	١	٢	١	صفر
صفر	$س_٤$	٥	صفر	١	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر
	صفر	صافي التغير	١٠	١٠	صفر	صفر

↑ المتغير الداخل

يتبين من هذا الجدول ان هناك حالة تعدد في المتغيرات المرشحة للدخول، اذ ان صافى التغير للمتغير غير الاساس $س_١$ ، والمتغير غير الاساسي الاخر $س_٢$ متعادلان ،وحيث ان القاعدة الواجبة التطبيق فى تلك الحالة هى الاختيار بينهما جزافيا ،لذلك فقد تم اختيار المتغير $س_١$ ليكون هو المتغير الداخل (هذا الاختيار وان كان يبدو انه جزافيا الا انه متعمد من جانبنا لهدف سوف يتم الكشف عنه فى موضعه المناسب، حيث انه لو تم اختيار $س_٢$ لادى الى ظهور مشكلة نحن فى غنى عنها).

(٣) الجدول الثاني لتحسين الحل :

بعد الانتهاء من العمليات الحسابية لتحسين الحل

بالجدول المبدئى ،فان الجدول الثانى للحل يظهر على الصورة التالية : (مع ملاحظة انه لاتوجد عمليات حسابية نظرا لان المفتاح (١) ومضاعف صف $س_{٤}$(صفر)).

الجدول الثاني

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١٠	١٠	صفر	صفر
		القيم	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$
١٠	$س_{١}$	١-	١	٢	١	صفر
صفر	$س_{٤}$	٥	صفر	١	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١٠	٢٠	١٠	صفر
	١٠٠	صافي التغير	صفر	١٠-	١٠-	صفر

وباختبار مثالية الجدول الثاني يتضح انه يمثل الحل الأمثل ، وعليه يمكن القول انه امكن التغلب على مشكلة تعدد المتغيرات المرشحة للدخول بالاختيار الجزافي لاى منهما.

أما لماذا ذكرنا قبل ذلك انه قد يبدو ان اختيارنا للمتغير $س_{١}$ كمتغير داخل انه قد تم بشكل جزافى الا انه فى حقيقته متعمد من جانبنا ، فانه لتوضيح السبب وراء ذلك سنعيد حل نفس المثال السابق مع تعديل بسيط انه سيتم اختيار $س_{٢}$ كمتغير داخل ، وفى هذه الحالة سنجد ان اختيار المتغير الخارج وتعيينه سيصبح مشكلة اذ سنجد ان خارج القسمية سيكون كالآتي :

عند صف $س_{٣}$ $\frac{١٠}{٢} = ٥$

عند صف $س_{٤}$ $\frac{٥}{١} = ٥$

أي سيكون هناك تعدد في المتغيرات المرشحة للخروج وهذا يمثل مشكلة تحتاج الى حل ، لذلك فان السر وراء اختيار

المتغير $س_١$ كمتغير داخل هو حقيقة جاء بتطبيق قاعدة الاختيار الجزافى ولكن بتصرف بمعنى الا يكون جزافيا محضا ولكن بتصرف اذا كان من الممكن ان يكون هذا التصرف يبعدنا عن الدخول فى مشكلة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج والتى تتطلب جهدا حسابيا كبيرا كما يتضح من الجزء التالي :

حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج :

قد يحدث التعادل عند اختيار المتغير الخارج، فقد يتساوى خارج قسمة قيم المتغيرات الاساسية على المعاملات المقابلة بعمود المتغير الداخل وذلك لأكثر من صف كما تبين ذلك من الجدول الثاني ، ولتوضيح تلك الحالة بصورة اكثر عمقا سواء من حيث ظهورها أو من حيث كيفية التعامل معها نفترض ان الجدول المبدئي التالي يمثل الجدول الاول لحل احدى مشاكل البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس والمطلوب تحسين هذا الحل وصولا الى الحل الامثل .

الجدول المبدئي

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٣	٥	صفر	صفر	صفر
		القيم	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	$س_٤$	$س_٥$
صفر	$س_٣$	٤	١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	$س_٤$	٦	صفر	١	صفر	١	صفر
صفر	$س_٥$	١٢	٣	٢	صفر	صفر	١
دالة الهدف		التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	صفر	صافي التغير	٣	٥	صفر	صفر	صفر

المتغير الداخل ↑ (عمود $س_٢$)

ويتضح من الجدول المبدئي ان المتغير س ٢ هو المتغير الداخل لأنه اكبر قيمة موجبة فى صف صافى التغير، أما بالنسبة للمتغير الخارج وتحديده ، فسنجد ان أمامنا متغيران اساسيان لهما نفس القيمة من خارج قسمة قيم تلك المتغيرات على العناصر المقابلة لها في عمود المتغير الداخل ، وهما المتغيرين س ٤ ،س ٥ وهذا يعني انهما سيصلان الى الصفر في وقت واحد عند زيادة المتغير الداخل س ٢ بمقدار ٦ وحدات .

وقد يتبادر الى ذهن القارئ تساؤل.ولماذا لانختار ايهما بطريقة جزافية كما فعلنا فى حالة تعدد المتغيرات المرشحة للدخول ؟ للاجابة على ذلك سنبين للقارئ مدى خطورة الاختيار الجزافي للمتغير الخارج فى هذه الحالة . فبفرض انه قد تم الاختيار الجزافي للمتغير س ٤ كمتغير خارج . فان جدول السمبلكس الثاني سيظهر بعد اجراء كافة العمليات الحسابية على النحو التالى :

الجدول الثانى

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٣	٥	صفر	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥
صفر	س ٣	٤	١	صفر	١	صفر	صفر
٥	س ٢	٦	صفر	١	صفر	١	صفر
صفر	س ٥	صفر	٣	صفر	صفر	-٢	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	صفر	٥	صفر	٥	صفر
	٣٠	صافي التغير	٣	صفر	صفر	-٥	صفر

ويتبين من هذا الجدول مدى خطورة الاختيار الجزافي للمتغير الخارج في حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج

بالجدول المبدئي ،لقد نتج عن ذلك كما هو واضح من الجدول الثاني ان اصبح المتغير الاساسي ($س_{٥}$) له قيمة صفرية ، وهذا معناه ببساطة ان الحل بدأ يعاني من الانتكاس او الاعتلال او (التحليل) Degeneracy والحل المنتكس هو ذلك الحل الذى تكون فيه قيمة أحد المتغيرات الاساسية مساوية للصفر،لأنه وفقا لمنهج السمبلكس يكون عدد المتغيرات الاساسية مساويا لعدد تباينات القيود (بخلاف قيود عدم السلبية) ،أى ان لكل قيد متغير أساس يمثله بجدول السمبلكس المبدئى ثم يستمر الحل ويستمر عدد تلك المتغيرات الاساسية محافظة على هذه القاعدة حتى التوصل الى جدول الحل الأمثل ، أى انه يشترط لايجاد حل اساسى ممكن غير منتكس أن يتوفر فى جدول الحل (أي جدول من المبدئي حتى الأمثل) عدد من المتغيرات الموجبة (اكبر من الصفر) يتساوى مع عدد قيود المشكلة.

ونفرض اننا تغاضينا عن ظهور حالة الانتكاس التى ألمت بالجدول الثانى وحاولنا تحسين الحل الوارد بذلك الجدول ، فكما هو واضح من صف صافى التغير بذلك الجدول يمكن اختيار $س_{١}$ كمتغير داخل ، ويكون المتغير $س_{٥}$ هو المتغير الخارج ، ويكون جدول الحل الثالث كالآتى :

الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٣	٥	صفر	صفر	صفر
		القيم	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	$س_{٥}$
صفر	$س_{٣}$	٤	صفر	صفر	١	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٥	$س_{٢}$	٦	صفر	١	صفر	١	صفر
٣	$س_{١}$	صفر	١	صفر	صفر	$-\frac{٢}{٣}$	$\frac{١}{٣}$
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٣	٥	صفر	٣	١
	٣٠	صافي التغير	صفر	صفر	صفر	-٣	-١

وواضح ان الجدول الثالث يمثل الحل الامثل لان صف صافى التغير لاتوجد به اى قيم موجبة ،ويتبين ان قيم المتغيرات بالحل **الامثل هي :**

المتغيرات الاساسية			المتغيرات غير الاساسية		
$س_1$	=	صفر	$س_4$	=	صفر
$س_2$	=	٦	$س_5$	=	صفر
$س_3$	=	٤			

وطبعا واضح من هذه النتائج ان الحل مازال يعاني من حالة الاعتلال او الانتكاس لان المتغيرات الاساسية ذات القيم الموجبة (اكبر من الصفر) اثنتين فقط ،في حين ان عدد قيود المشكلة ثلاثة ، كذلك نلاحظ أن قيمة دالة الهدف بالجدول الثالث كما كانت عليه فى الجدول الثاني ، وهذا الامر كان متوقعا لان المتغير $س_1$ كانت قيمته صفر ومن ثم لم تتأثر قيمة دالة الهدف .

تبين لنا مما سبق مظاهر المشكلة ، ولكن ماهي خطورتها ،ان خطورة الاختيار الجزافي للمتغير الخارج فى حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج قد يؤدى الى ان نواجه اثناء حل المشكلة بطريقة السمبلكس بأحد آمرين وكلاهما يزيد المشكلة تعقيدا وهما :

الامر الاول : طول مراحل الوصول الى الحل الامثل .

الامر الثاني : دائرية الحل .

وفيما يلى شرح وتوضيح للأمرين السابقين .

فبالنسبة للأمر الاول فان اختيار أحد المتغيرات المرشحة للخروج اختيارا جزافيا اذا كان هناك تعدد في المتغيرات المرشحة للخروج قد يؤدى الى ان عدد الجداول المطلوب اتمامها وصولا الى الحل الامثل - بفرض الوصول الى هذا الحل - يزيد كثيرا عن عددها اذا احسن اختيار هذا المتغير الخارج. ولتوضيح هذه الحالة سنفترض مشكلة

ما ثم نقوم بحلها مرة باختيار احد المتغيرات دون الآخر المرشح معه للخروج ، ومرة ثانية باختيار المتغير الآخر المرشح للخروج بدلا من المتغير الذى اخترناه في الحالة الأولى ، وذلك لنرى تأثير هذا الاختيار على عدد جداول الحل وصولا للحل الامثل للمشكلة .

<u>مثال</u> : أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية التى تم صياغتها على الوجه التالي :

دالة الهدف : تعظيم ٩ س$_1$ + ٦ س$_2$ ⟵

بشرط أن :

٦ س$_1$ + ١٢ س$_2$ $\geq$ ١٤٤

١٢س$_1$ + ٦ س$_2$ $\geq$ ١٨٠

٩ س$_1$ $\geq$ ١٠٨

س$_1$ ، س$_2$ $\leq$ صفر

<u>الحل</u> :

بعد القيام بالعمليات الحسابية المعتادة وفقا لطريقة السمبلكس سيظهر جدول الحل الثاني على الصورة التالية :

الجدول الثاني

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٩	٦	صفر	صفر	صفر	
		القيم	س$_1$	س$_2$	س$_3$	س$_4$	س$_5$	
صفر	س$_3$	٧٢	صفر	١٢	١	صفر	$-\frac{٢}{٣}$	$\frac{٧٢}{١٢}$ = ١
صفر	س$_4$	٣٦	صفر	٦	صفر	١	$-\frac{٤}{٣}$	$\frac{٣٦}{٦}$ = ١
٩	س$_1$	١٢	١	صفر	صفر	صفر	$\frac{١}{٩}$	
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٩	صفر	صفر	صفر	١	
	١٠٨	صافي التغير	صفر	٦	صفر	صفر	١-	

↑ المتغير الداخل

ومن الجدول الثاني يتضح ان هناك تعدد فى المتغيرات المرشحة للخروج ، وسنظهر للقارىء الآن ماهوأثر الاختيار الجزافي للمتغير الخارج على عدد جداول الحل ، لذلـــك سنواصل تحسين الحل مرة باختيار س٤ كمتغير خارج،ثممرة اخرى باختيار س٣ كمتغير خارج لنقارن بين عدد الجداول فى الحالتين ٠

في حالة اختيار (س٤) كمتغير خارج :

الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٩	٦	صفر	صفر	صفر
		القيم	س١	س٢	س٣	س٤	س٥
صفر	س٣	صفر	صفر	صفر	١	-٢	٢
٦	س٢	٦	صفر	١	صفر	١/٦	- ٢/٩
٩	س١	١٢	١	صفر	صفر	صفر	١/٩
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٩	٦	صفر	١	- ١/٣
	١٤٤	صافي التغير	صفر	صفر	صفر	- ١	١/٣

↑ متغير داخل

الجدول الرابع

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٩	٦	صفر	صفر	صفر
		القيم	س١	س٢	س٣	س٤	س٥
صفر	س٥	صفر	صفر	صفر	١/٢	- ١	١
٦	س٢	٦	صفر	١	١/٩	- ١/١٨	صفر
٩	س١	١٢	١	صفر	- ١/١٨	١/٩	صفر
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٩	٦	١/٦	٢/٣	صفر
	١٤٤	صافي التغير	صفر	صفر	- ١/٦	- ٢/٣	صفر

في حالة اختيار ($س_{٣}$) كمتغير خارج :

الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٩	٦	صفر	صفر	صفر
		القيم	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	$س_{٥}$
٦	$س_{٢}$	٦	صفر	١	$\frac{١}{١٢}$	صفر	$-\frac{١}{١٨}$
صفر	$س_{٤}$	صفر	صفر	صفر	$-\frac{١}{٢}$	١	١-
٩	$س_{١}$	١٢	١	صفر	صفر	صفر	$\frac{١}{٩}$
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٩	٦	$\frac{١}{٢}$	صفر	$\frac{٢}{٣}$
	١٤٤	صافي التغير	صفر	صفر	$-\frac{١}{٢}$	صفر	$-\frac{٢}{٣}$

يتضح مما سبق ان اختيار المتغير $س_{٣}$ كمتغير خارج سيخفض عدد جداول السمبلكس المطلوبة للوصول الى الحل الأمثل ،وهذا يعنى ان الاعتماد على الاختيار الجزافي للمتغير الخارج في حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخوج قد يقودنا الى كثرة جداول الحل وما يستتبعها من استطالة العمليات الحسابية المطلوبة وصولا للحل الأمثل،وهذه الصعوبة والعقبة تمثل احدى مخاطر الاختيار الجزافي المشار اليه.

أما الامر الثاني والذى يعتبر من مخاطر الاختيار الجزافي للمتغير الخارج فانه يتمثل في أن قيمةدالة الهدفقد لاتتغير من جدول لآخر ،وقد يستمر الامر كذلك لعدة جداول متتالية ، وقد يصل الامر ان تدخل جولات الحل فى حلقة دائرية تدور فيها وتتكرر فيها نفس مجموعة المتغيرات التى سبق اختفاؤها وهذا مانطلق عليه دائرة الحل ،ولتوضيح ذلك الامر سنقوم بحل المشكلة

التالية وسنكتفى ببيان الجدول المبدئي والجدول الاخير للمقارنة بينهما واستنتاج طبيعة العقبة التى اطلقنا عليها اصطلاح دائرية الحل :

دالة الهدف تعظيم ٧٥رس$_{١}$ — ١٥٠س$_{٢}$ + ٢٠رس$_{٣}$ — ٦س$_{٤}$

بشرط أن :

٢٥رس$_{١}$ — ٦٠س$_{٢}$ — ٠٤رس$_{٣}$ + ٩س$_{٤}$ + س$_{٥}$ = صفر

٥رس$_{١}$ — ٩٠س$_{٢}$ — ٠٢رس$_{٣}$ + ٣س$_{٤}$ + س$_{٦}$ = صفر

س$_{٣}$ + س$_{٧}$ = ١

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، س$_{٤}$ ≥ صفر

الجدول المبدئي

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٧٥ر	١٥٠-	٠٢ر	٦-	صفر	صفر	صفر
		القيم	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	س$_{٤}$	س$_{٥}$	س$_{٦}$	س$_{٧}$
صفر	س$_{٥}$	صفر	٢٥ر	٦٠-	٠٤ر-	٩	١	صفر	صفر
صفر	س$_{٦}$	صفر	٥ر	٩٠-	٠٢ر-	٣	صفر	١	صفر
صفر	س$_{٧}$	١	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	صفر	صافى التغير	٧٥ر	١٥٠-	٠٢ر	٦-	صفر	صفر	صفر

↑

متغير داخل

وبعد عدة جولات للحل بغرض تحسين الحل سيظهر الجدول السابع كما يلي : الجدول السابع

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٧٥ر	–١٥٠	٢ر٠	–٦	صفر	صفر	صفر
		القيم	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$س_4$	$س_5$	$س_6$	$س_7$
صفر	$س_5$	صفر	٢٥ر	–٦٠	–٤٠ر	٩	١	صفر	صفر
صفر	$س_6$	صفر	٥ر	–٩٠	–٢٠ر	٣	صفر	١	صفر
صفر	$س_7$	١	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	١
دالة الهدف		التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	صفر	صافي التغير	٧٥ر	–١٥٠	٢٠ر	–٦	صفر	صفر	صفر

وبمقارنة الجدول السابع بالجدول المبدئي نجد أن الجدول السابع هو نفسه الجدول المبدئي أي اننا انتهينا من حيث بدأنا، ولو واصلنا الحل فسنعود بعد سبع جداول الى نقطة البداية مرة أخرى ،وسنظل ندور في دائرة مغلقة ليس لها نهاية، اذ لايمكن الوصول الى الحل الأمثل ، وهذا مانطلق عليه ظاهرة الارتداد أو دائرية الحل ، وهذا الأمر نشأ بسبب الاختيار الجزافي للمتغير الخارج في حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج .

كيفية اختيار المتغير الخارج :

اذا كان الاختيار الجزافي للمتغير الخارج في حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج يؤدى الى ظهور المشاكل والصعوبات التى اوضحناها سابقا، اذن يتعين البحث عن اسلوب يمكننا من البعد عن هذا الاختيار

الجزافي ومايجره من عقبات . وهناك طريقتان تستخدمان في هذه الحالة متى توافرت شروط معينة .

أولا : طريقة تشارنز وكوبر

Charnes & Copper Method

وتقوم هذه الطريقة على مجموعة من الخطوات هي :

١- تحديد المتغيرات الاساسية المتعادلة ، أي المتغيرات المرشحة للخروج .

٢- يتم ايجاد خارج قسمة معاملات أول عمود من مصفوفة الوحدة والذي يقع على يسار عمود المتغير الداخل على معاملات هذا العمود (عمود المتغير الداخل) وبالنسبة لصفوف المتغيرات الاساسية المرشحة للخروج.

٣- اذا كان خارج القسمة من الخطوة الثانية يمثل قيما غير متساوية فانه يتم اختيار المتغير المقابل للقيمة الاقل كمتغير خارج،وبذلك نكون قد وصلنا الى حل مشكلة التعادل .ولكن بفرض ان قيم خارج القسمة مازالت متعادلة أيضا ، فانه يتعين ان نجرى ذات العمل الذى قمنا به في الخطوة الثانية ولكن باستخدام ثاني عمود من مصفوفة الوحدة على يسار عمود المتغير الداخل، ونستمر في ذلك حتى يمكن ان نصل الى قيم متفاوتة نتمكن من اختيار اقلها قيمة ليكون المتغير الاساسي صاحب هذه القيمة هو المتغير الخارج ومن ثم نتجاوز مشكلة التعادل .

ولتوضيح الكيفية التى يتم بها تطبيق قاعدة تشارنز وكوبر عمليا فاننا نعود الى المثال الذى اوردناه لعرض مشكلة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج،وفيما يلي الجدول المبدئي فى ذلك المثال .

الجدول المبدئي

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٣	٥	صفر	صفر	صفر
		القيم	س١	س٢	س٣	س٤	س٥
صفر	س٣	٤	١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	س٤	٦	صفر	١	صفر	١	صفر
صفر	س٥	١٢	٣	٢	صفر	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	صفر	صافي التغير	٣	٥	صفر	صفر	صفر

↑
المتغير الداخل

ويتبين من الجدول المبدئي ان هناك تعدد في المتغيرات المرشحة للخروج اذ ان هناك تعادل فى خارج القسمة لكل من س٤، س٥ كما هو مبين على يسار الجدول ومن ثم هناك مشكلة فى اختيار المتغير الخارج لأننا لايتعين ان نقوم بالاختيار الجزافي من بينها حتى لانتعرض للعقبات السابق الاشارة اليها، ولذلك سنقوم بتطبيق قاعدة " تشارنز وكوبر" وفق خطواتها المحددة التالية :

١- الخطوة الاولى هى تحديد المتغيرات المتعادلة والمرشحة للخروج ، ومن الجدول المبدئي السابق يتضح ان كل من المتغير س٤ ،والمتغير س٥ هي متغيرات أساسية متعادلة مرشحة للخروج.

٢- يتم قسمة عناصر اول عمود من مصفوفة الوحدة والواقع على يسار عمود المتغير الداخل على عناصر عمود المتغير الداخل بالنسبة للمتغيرات المتعادلة اي بصورة تفصيليةعلى الوجه التالي :

المتغيرات الاساسية	عمود المتغير الداخل		مصفوفة الوحدة			خارج القسمة
س ٣	صفر		١	صفر	صفر	
س ٤	١	÷	صفر	١	صفر	صفر / ١ = صفر
س ٥	٢	÷	صفر	صفر	١	صفر / ٢ = صفر

(٢) يتضح من الخطوة السابقة ان خارج القسمة مازال متساوى ، لذلك سننتقل لاجراء نفس عملية القسمة ولكن عن طريق العمود الثاني من مصفوفة الوحدة كالآتي :

المتغيرات الاساسية	عمود المتغير الداخل		مصفوفة الوحدة			خارج القسمة
س ٣	صفر		١	صفر	صفر	
س ٤	١	÷	صفر	١	صفر	١ / ١ = ١
س ٥	٢	÷	صفر	صفر	١	صفر / ٢ = صفر

ويتضح من خارج القسمة اننا استطعنا ان نصل الى قيم غير متساوية وان المتغير س٥ يمثل خارج القسمة الاقل ، لذلك سيتم اختياره كمتغير خارج ويتم اعداد الجدول الثانى للحل كالآتى :

الجدول الثاني

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٣	٥	صفر	صفر	صفر
		القيم	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	س$_{٤}$	س$_{٥}$
صفر	س$_{٣}$	٤	١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	س$_{٤}$	صفر	$-\frac{٣}{٢}$	صفر	صفر	١	$-\frac{١}{٢}$
٥	س$_{٢}$	٦	$\frac{٣}{٢}$	١	صفر	صفر	$\frac{١}{٢}$
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	$\frac{١٥}{٢}$	٥	صفر	صفر	$\frac{٥}{٢}$
	٣٠	صافى التغير	$-\frac{٩}{٢}$	صفر	صفر	صفر	$-\frac{٥}{٢}$

وهذا يمثل الحل الأمثل . اذن تمكنا وبسهولة من التخلص من المخاطر التى تنشأ من الاختيار الجزافي للمتغير الخارج وذلك باتباع منهج طريقة تشارنز وكوبر . ويمكن للقارىء تطبيق هذه الطريقة لحل المشكلة الدائرية التى أوردناها فى هذا الجزء .

ثانيا : طريقة (م) الصغرى :

وهذه الطريقة تقوم على فكرة جعل قيم المتغيرات الاساسية التى تساوى صفرا فى عمود القيم تساوى قيمة ضئيلة جدا تقترب من الصفر ولكنها ليست صفرا .ولنرمز لهذه القيمة بالرمز م ، ولذلك تعرف هذه الطريقة بطريقة (م) الصغرى ،وفيما يلى مثالا رقميا يتم من خلاله تلمس ملامح طريقة (م) الصغرى فى علاج مشكلة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج .

مثال :

دالة الهدف تعظيم ١٢س$_{١}$ + ١٥س$_{٢}$ + ١٤س$_{٣}$ ← اقصى ربح ممكن

بشرط أن :

$$-س_{١} + س_{٢} \leq \text{صفر}$$

$$-س_{١} + ٢س_{٣} \leq \text{صفر}$$

$$س_{١} + س_{٢} + س_{٣} \leq ١٠٠$$

$$س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} \geq \text{صفر}$$

وبعد اضافة المتغيرات الراكدة الى هذه الصياغة ، سيظهر جدول الحل المبدئي على الصورة التالية مع ملاحظة اننا وضعنا الرمز (م) محل القيمة صفر امام المتغير $س_{٤}$ ، والمتغير $س_{٥}$ وذلك تطبيقا لطريقة (م) الصغرى .

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١٢	١٥	١٤	صفر	صفر	صفر
		القيم	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	$س_{٥}$	$س_{٦}$
صفر	$س_{٤}$	م	١-	١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	$س_{٥}$	م	١-	صفر	٢	صفر	١	صفر
صفر	$س_{٦}$	١٠٠	١	١	١	صفر	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	صفر	صافى التغير	١٢	١٥	١٤	صفر	صفر	صفر

↑ المتغير الداخل

الجدول الثاني

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١٢	١٥	١٤	صفر	صفر	صفر
		القيم	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦
١٥	س٢	م	١-	١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	س٥	م	١-	صفر	٢	صفر	١	صفر
صفر	س٦	١٠٠ - م	٢	صفر	١	١-	صفر	١
دالة الهدف		التكاليف الداخلة	١٥-	١٥	صفر	١٥	صفر	صفر
١٥		صافي التغير	٢٧	صفر	١٤	١٥-	صفر	صفر

↑ المتغير الداخل (س١)

الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١٢	١٥	١٤	صفر	صفر	صفر
		القيم	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦
١٥	س٢	٥٠ + م/٢	صفر	١	١/٢	١/٢	صفر	١/٢
صفر	س٥	٥٠ + م/٢	صفر	صفر	٥/٢	- ١/٢	١	١/٢
١٢	س١	٥٠ + م/٢	١	صفر	١/٢	- ١/٢	صفر	١/٢
دالة الهدف		التكاليف الداخلة	١٢	١٥	٢٧/٢	٣/٢	صفر	٢٧/٢
١٢٥٠ + ٣م/٢		صافي التغير	صفر	صفر	١/٢	- ٣/٢	صفر	- ٢٧/٢

↑ المتغير الداخل (س٣)

الجدول الرابع

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١٢	١٥	١٤	صفر	صفر	صفر
		القيم	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	$س_{٥}$	$س_{٦}$
١٥	$س_{٢}$	٤٠ + $\frac{٢م}{٥}$	صفر	١	صفر	$\frac{٣}{٥}$	$-\frac{١}{٥}$	$\frac{٢}{٥}$
١٤	$س_{٣}$	٢٠ + $\frac{م}{٥}$	صفر	صفر	١	$-\frac{١}{٥}$	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{١}{٥}$
١٢	$س_{١}$	٤٠ − $\frac{٣م}{٥}$	١	صفر	صفر	$-\frac{٢}{٥}$	$-\frac{١}{٥}$	$\frac{٢}{٥}$
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١٢	١٥	١٤	$\frac{٧}{٥}$	$\frac{١}{٥}$	$\frac{٦٨}{٥}$
	١٣٦٠ + $\frac{٨م}{٥}$	صافى التغير	صفر	صفر	صفر	$-\frac{٧}{٥}$	$-\frac{١}{٥}$	$-\frac{٦٨}{٥}$

وبالنظر الى صف صافى التغير يتضح ان الجدول الرابع يمثل جدول الحل الامثل، وحيث اننا افترضنا منذ البداية ان قيمة (م) صغيرة جدا اذن يمكن اهمالها ومن ثم يكون الحل الامثل كالآتي :

$س_{١}$ = ٤٠ ، $س_{٢}$ = ٤٠ ، $س_{٣}$ = ٢٠

وتكون قيمة دالة الهدف ١٣٦٠

* *

اسئلة وتطبيقات :

١- ماذا يقصد بالقيد المحكم ،وماهو العنصر المحوري ؟

٢- لماذ يتم اختيار المتغير ذات أكبر قيمة موجبة في صف صافي التغير ليكون هو المتغير الداخل في الجولة التالية للحل (في مشاكل التعظيم) ؟ وكيف يتم اختيار المتغير الداخل في حالة تعدد المتغيرات المرشحة للدخول ؟

٣- علل لما يأتي :

أ) اذا كان مضاعف صف أحد القيود يساوي صفرا فان معاملات هذا القيد لن تتغير في الجدول التالي وستظل على ماهي عليه .

ب) اذا كان المفتاح يساوي واحد صحيح فان أرقام الصف الرئيسي الجديد هي نفسها أرقام الصف القديم .

ج) تعتبر المتغيرات الراكدة في مشاكل تخفيض دالة الهدف بصفة عامة بمثابة متغيرات اضافية اكثر منها طاقة غير مستغلة .

د) ان اضافة متغيرات اصطناعية الى قيود المشكلة يستلزم ايضا اضافة هذه المتغيرات الى دالة الهدف .

٤- ماهي خطورة الاختيار الجزافي للمتغير الخارج في حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج ؟.

٥- ماهو المقصود بظاهرة الانتكاس أو دائرية الحل ؟ وكيف يمكن علاجها ؟ .

٦- شركة صناعية تتخصص في انتاج ثلاثة نوعيات من المنتجات هامش الربح للوحدة من كل منها كان كالاتي :

النوع الاول ٢٠ جنيه
النوع الثاني ٤٠ ،،
النوع الثالث ٣٠ ،،

ويمر كل نوع من هذه المنتجات على ثلاثة أقسام انتاجية بغرض تصنيعها لتكون تامة الصنع ، وكان الوقت المطلوب لانتاج الوحدة الواحدة من كل نوع من هذه المنتجات من تلك الاقسام الانتاجية كالتالي :

المنتج	القسم الاول	القسم الثاني	القسم الثالث
النوع الأول	٣ ساعة	٢ ساعة	١ ساعة
النوع الثاني	٤ ،،	١ ،،	٣ ،،
النوع الثالث	٢ ،،	٢ ،،	٢ ،،

والمطلوب تحديد الانتاج الامثل الذى يصل بالارباح المحققة الى اقصى حد لها فى ضوء الطاقة المتاحة بالاقسام الانتاجية وهي :

٦٠ ساعة بالقسم الاول
٤٠ ،، ،، الثاني
٨٠ ،، ،، الثالث

٧- مصنع طاقته الانتاجية محدده بتسعين ساعة اسبوعيا مقسمة بين آلتين : الآلة الاولى تستغل ثلثي الوقت والباقى للآلة الثانية .فاذا كان المصنع ينتج منتجين $س_1$ ، $س_2$ ، واذا كانت الآلة الاولى تنتج من $س_1$ ثلاثة امثال انتاجها من $س_2$ ، والآلة الثانية تنتج من المنتج $س_2$ ضعف وحدات $س_1$ ، واذا كان ربح الوحدة من المنتج $س_1$ ستة جنيهات ومن المنتج $س_2$ عشرة جنيهات .

احسب أفضل تشكيله انتاجية من منتجات المصنع والتى تعمل على تحقيق هدف تعظيم الربح .

٨- اذا علمت انه فى احدى الشركات الصناعية التي تنتج ثلاثة منتجات يبلغ هامش الربح للوحدة الواحدة من كل منتج على الترتيب ٨ ، ٦، ١٢ جنيه . ولكنه نظرا لندرة المواد الاولية المستخدمة فى الانتاج . فقد أعدت ادارة الانتاج بيانا احصائيا عن عدد وحدات المواد الأولية اللازمة لانتاج الوحدة الواحدة من المنتجات الثلاثة ظهر على الصورة التالية :

البيان	المادة أ	المادة ب	المادة ج
عدد وحدات المواد الأولية اللازمة لانتاج وحدة من المنتج الاول	٨	٩	١٠
عدد وحدات المواد الأولية اللازمة لانتاج وحدة من المنتج الثاني	٦	٨	١٢
عدد وحدات المواد الأولية اللازمة لانتاج وحدة من المنتج الثالث	١٢	١٨	١٥
مجموع وحدات المواد الاولية التي يمكن الحصول عليها .	٩٦	١٢٦	١٥٠

والمطلوب : استخدام طريقة السمبلكس فى تخطيط معدل الانتاج الامثل فى حدود المواد الموجودة .

٩- تقوم احدى شركات الادوية بانتاج دواء مقوى يمد الجسم بالحد الادنى من مجموعة الفيتامينات أ ، ب ،ج . ويتم انتاج هذا الدواء من تركيبة معينة من ثلاثة انواع مختلفة من المواد الغذائية ($س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$) . والجدول التالي يبين كمية الفيتامينات الموجودة داخل كل وحدة من الاغذية المختلفة والحد الادنى للفيتامينات المطلوبة فى هذا الدواء .

المادة الغذائية	مقدار الفيتامينات بالملجم في كل وحدة			تكلفة الوحدة من المادة الغذائية
	فيتامين (أ)	فيتامين (ب)	فيتامين (ج)	
س ١	٣٠٠	٤٠٠	٢٠٠	٦٠ قرش
س ٢	٢٠٠	١٠٠	٢٠٠	٤٠ قرش
س ٣	١٠٠	٣٠٠	٢٠٠	٨٠ قرش
الحد الادنى للفيتامينات المطلوبة	٢٠٠٠	٤٠٠٠	٣٠٠٠	

والمطلوب ايجاد الخلطة المثلى من الأنواع المختلفة من المواد الغذائية المذكورة بهدف تخفيض التكاليف مع الاحتفاظ بالحد الادنى للمقادير المطلوبة من الفيتامينات التي يحتوى عليها هذا الدواء.

١٠- قامت شركة مصر للطيران بتطوير هيكل اسطولها الجوى وذلك بشراء عدد من الطائرات الحديثة من طراز بوينج ٧٦٧، وقد توقعت الشركة تطورا كبيرا في حجم الحركة على طائراتها التى تلقى جاذبية سوقية ، ولكن نظرا لأن هذا النوع من الطائرات قد انضم حديثا للاسطول الجوى للشركة فان الامر يستلزم القيام بحملة اعلانية لتعريف المستهلك بهذا التطوير، وقد حددت ادارة التسويق وتنشيط المبيعات بالشركة ان ميزانية الاعلان المخصصة للحملة الاعلانية لهذا الطراز ٥ر مليون جنيه في السنة الاولى لانضمامها للتشغيل ،وكان الشركة عادة تعلن عن خدماتها باستخدام ثلاثة وسائل اعلانية ، تكلفة الاعلان فى المرة الواحدة لكل منها كالآتي :

الاعلان للمرة الواحدة بالمجلات الشهرية ٢٠٠٠٠ جنيه
،، ،، ،، ببرامج الاذاعة الشهرية ٣٠٠٠٠ ،،
،، ،، ،،بالبرامج التلفزيونية ٥٠٠٠٠ ،،

ومن خلال تحليل الحملات الاعلانية السابقة التي قامت بها الشركة في فترات سابقة ، استخلصت الشركة ان فاعلية الاعلان لكل وسيلة من الوسائل الثلاث كانت وفق تقييم الشركة كالآتي :

الوسيلة الاعلانية	درجة الفاعلية
المجلات الشهرية	٢٠
برامج الاذاعة الشهرية	٢٥
البرامج التليفزيونية	٣٠

فاذا علمت ان سياسة الاعلان بالشركة تسير على عدم تخصيص اكثر من نصف ميزانية الاعلان للبرامج التلفزيونية ، كذلك فان الحد الاقصى للاعلان فى كل من المجلات الشهرية وبرامج الاذاعة الشهرية هو عدد ١٢ مرة لكل منها حيث انها شهرية الاصدار.

والمطلوب فى ضوء المعلومات السابقة ايجاد أفضل توزيع لميزانية الاعلان على الوسائل الاعلانية الثلاث والتى تعمل على تحقيق القيود السابقة وتوليد اكبر فاعلية اجمالية للاعلان .

١١- تقوم احدى الشركات بانتاج ثلاثة أنواع من السلع يبلغ هامش ربح كل منها على الترتيب : ٦٠، ٥٠، ٤٠ جنيها . ويتطلب انتاج هذه الانواع القيام بعمليات انتاجية هى التصنيع و التفتيش والتجميع، كذلك تحتاج كل سلعة منها الى نوعية معينة من المواد الخام وبعض الاجزاء الجاهزة ، وقد تم تحديد احتياجات كل نوعية منها كالآتي :

النوع الاول يتطلب : ٣ ساعات تصنيع ، ٢ساعة تجميع ، ساعة تفتيش واحدة ، ٢ كيلوجرام مادة خام ،

عدد واحد موتور كهربائي ،قاعدة صلب بسمك ١٠ ملليمتر.

النوع الثاني يتطلب : ٢ ساعة تصنيع ،٢ساعة تفتيش ، ٣ كيلوجرام مادة خام ،قاعدة صلب بسمك ٨ ملليمتر.

النوع الثالث يتطلب : ٢ ساعة تصنيع ،ساعة تجميع واحدة ، نصف ساعة تفتيش ،٥كيلوجرام مادة خام ، قاعدة صلب بسمك ١٠ ملليمتر.

فالمطلوب اعداد الصياغة الرياضية لهذه المشكلة اذا علمت أن :

ا) ساعات التصنيع المتاحة ١٢٠ساعة ،ساعات التجميع المتاحة ٨٠ ساعة ،ساعات التفتيش المتاحة ٥٠ ساعة .

ب) المواد الخام التى يمكن تدبيرها حاليا لاتزيد عن ١٤٠ كيلوجرام.

ج) عدد الموتورات الكهربائية المتوافرة تبلغ ٢٠ موتورا ، كذلك يتوافر بالمخازن قواعد صلب عددها ٦٠ قاعدة منها ٤٠ وحدة ذات سمك ١٠ ملليمتر والباقى بسمك ٨ ملليمتر.

د) تشير توقعات السوق ان الحد الاقصى المتوقع لمبيعات كل وحدة من نوعيات المنتجات الثلاثة هى على الترتيب ٣٠ ، ٤٠ ، ٣٠ .

هـ) المساحة المخزنية المتاحة بالشركة لاتسمح بتخزين اكثر من ٦٠٠ وحدة من وحدات المنتجات الثلاث .

١٢- تحتاج احدى الشركات الى انتاج ١٠٠٠كيلوجرام من خليط معين،ويتطلب ذلك خلط ثلاثة أصناف من المواد الخام هى صنف ١٠١،١٠٢،١٠٣ ،وتبلغ تكلفة الكيلوجرام من هذه الاصناف ٥ جنيه ،٦ جنيه ،٧ جنيه على التوالى،

ولايمكن استخدام اكثر من ٣٠٠ كيلوجرام من الصنف ١٠١، كما يجب استخدام ١٥٠ كيلوجرام على الاقل من الصنف ١٠٢، كما يجب استخدام ٢٠٠ كيلوجرام على الاقل من الصنف ١٠٣ ، والمطلوب تحديد الكمية اللازمة من كل صنف لتخفيض التكلفة الى آدنى حد ممكن .

١٣- فيما يلى الصياغة الرياضية لاحدى مشاكل البرمجة الخطية :

تعظيم ٤$س_{١}$ + ٨$س_{٢}$ + ١٠$س_{٣}$ ← اقصى ربح ممكن

بشرط أن :

$س_{١}$ + $س_{٢}$ + $س_{٣}$ ≥ ١٠٠٠

٥$س_{١}$ + ٥$س_{٢}$ + ٥$س_{٣}$ ≥ ١٥٠٠

٥$س_{١}$ + $س_{٢}$ + $س_{٣}$ ≥ ٢٠٠٠

$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ≤ صفر

والمطلوب :

- تكوين اول حل ممكن .
- تحسين الحل المبدئي باستخدام طريقة السمبلكس
- تفسير وضع المشكلة بعد انتهاء الخطوة السابقة .

١٤- يقوم تليفزيون جمهورية مصر العربية (القناة الاولى) باستكمال اختيار البرامج للدورة الجديدة . وقد حدد منفذى البرامج ثلاثة أنواع من برامج الوقت الاساسي يمكن ان يتم بها استكمال البرامج. وبعد المناقشة مع معدى البرامج الثلاثة ، استطاعت الادارة ان تقدر الايراد المتوقع لكل ساعة من كل برنامج كحصيلة اعلانات كالآتي :

نوع البرنامج	الايراد في الساعة
حلقات كوميدى	٢٠٠ر٠٠٠ جنيه

حلقات بوليسية	٣٠٠٫٠٠٠ جنيه
افلام تليفزيونية	٢٥٠٫٠٠٠ جنيه

وقد اتضح ان الوقت المتاح كل ليلة لعرض هذه البرامج هى ثلاث ساعات يوميا أي ٢١ ساعة اسبوعيا ، وتضع الادارة فى اعتبارها محاولة تخفيض عدد الساعات التى ستخصص لبرامج العنف ، فمثلا الحلقات البوليسية بها من العنف ضعف الافلام التليفزيونية ،فى حين ان الحلقات الكوميدية يفترض انها خالية تماما من مواقف العنف .

وقد وافق مخطط البرامج على تحديد عدد ساعات العنف بحيث لايزيد عن مايعادل ١٢ ساعة من الحلقات البوليسية ، وهذا التحديد من ساعات العنف يوزع بين نوعى برامج العنف (الحلقات البوليسية والافلام التليفزيونية) . أي ان الاثنى عشر ساعة المخصصة لبرامج العنف يمكن أن تستخدم كلها كحلقات بوليسية ، او على سبيل المثال يمكن تخصيص عشر ساعات منها للحلقات البوليسية و ٤ ساعات من الافلام التليفزيونية (وهي تعادل ساعتين من الحلقات البوليسية) . وعلى ضوء تلك القيود المطلوب توزيع الساعات المتاحة على الانواع الثلاثة من البرامج المقترحة بغرض تعظيم الايراد .

١٥- يريد أحد المنتجين ان ينتج ١٠٠ طن من مادة ما تتكون على الاقل من ٥٠٪ من العنصر (أ) ، و ٢٠٪ من العنصر (ب). ويمكنه ان يستخدم لصنع هذه المادة مزيج من نوعين من الخامات النوع الأول من الخامات (س) تكلفة الطن منه ٢٠ جنيه ويعطى ٦٠٪ من العنصر (أ)، و٢٠٪ من (ب) والنوع الثاني من الخامات (ص) تكلفة الطن

منه ٤٠ جنيه ويعطى ٤٠٪ من العنصر (أ)،و٥٠٪ من العنصر (ب)٠

والمطلوب :

- تحديد المزيج بين نوعى الخامات (س ،ص) الذى يمكن من تخفيض تكلفة انتاج المادة الى أقل حد ممكن وذلك باستخدام الرسم البياني ٠
- ناقش ميزة استخدام الطريقة البيانية بالمقارنة بطريقة السمبلكس فى حل هذا النوع من المشاكل ٠

١٦- تقوم احدى الشركات بانتاج غذاء للحيوانات ، ونظرا لحدوث تغيير فى تكاليف المواد الخام الداخلة فى تركيب هذا الغذاء فانها قررت اعادة النظر فى محتويات كيس الغذاء الذى تنتجه كغذاء للخيول ٠ وهذا الغذاء يتكون من ثلاثة مواد خام تكلفة كل كيلوجرام منها كالآتي :

المادة (أ)	تكلفة الكيلوجرام	١٠٠ قرش
المادة (ب)	،، ،، ،،	١٢٠ قرش
المادة (ج)	،، ،، ،،	١٥٠ قرش

وتنتج الشركة كيس الغذاء بوزن نمطى مقداره عشرة كيلوجرامات ويحتوى على خليط من المواد الخام السابقة ٠ وهناك بعض الاشتراطات المفروضة على نسب خلط تلك المواد :

- كل عبوة ينبغى الا تحتوى على اكثر من نصف وزنها من المادة الخام (أ)٠
- ينبغى ان يكون مقدار المادة الخام (ب) الموجودة بالعبوة لاتزيد عن ضعف مقدار المستخدم من المادة (ج)٠
- كل عبوة يتعين ان تحتوى على الاقل على مقدار ٦٠٪ من وزنه بروتينات علما بأن

النسبة المئوية للبروتين فى كل مادة من المواد الخام المستعملة يوضحها البيان التالي :

المادة الخام	النسبة المئوية للبروتين
أ	٥٠٪
ب	٨٠٪
ج	٦٠٪

والمطلوب : استخدام طريقة السمبلكس فى تحديد اقل تكلفة خلط لهذه المواد الخام لكل عبوة تزن ١٠ كيلو جرامات مع مراعاة الاشتراطات السابق ذكرها .

١٧- شركة تنتج ثلاث سلع ويوضح البيان التالى التكاليف والامكانيات اللازمة لانتاجها :

السلع	التكلفة للوحدة	ساعات عمل للوحدة
ثلاجات	٧٠٠	٢
غسالات كهربائية	١٠٠٠	٣
مطابخ	٥٠٠	١

والحد الاقصى للطلب على كل سلعة كالتالي :

ثلاجات	٢٠٠٠
غسالات كهربائية	٣٠٠٠
مطابخ	١٥٠٠

وتبلغ ميزانية الانتاج اليومية ٢٠٠ ألف جنيه ، وتتطلب ٦٠٠ ساعة عمل ، والمساحة التخزينية المتوفرة لكل سلعة ٥٠٠ وحدة ،فاذا علمتان سعر البيع للوحدة كالتالي :

الثلاجات	١٤٠٠ جنيه
الغسالات الكهربائية	٢٠٠٠ جنيه
المطابخ	١٠٠٠ جنيه

ماهو المزيج السلعى الذى يحقق اقصى ربح فى ضوء القيود ؟

١٨- استخدم اسلوب السمبلكس لتوضيح أن المشكلة التالية ليس لها حلا ممكنا :

دالة الهدف تعظيم $٢س_{١} + ٣س_{٢} + ٥س_{٣}$

بشرط أن :

$$٣س_{١} + ١٠س_{٢} + ٥س_{٣} \leq ١٥$$
$$٣٣س_{١} - ١٠س_{٢} + ٩س_{٣} \leq ٣٣$$
$$س_{١} + ٢س_{٢} + س_{٣} \geq ٤$$
$$س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} \geq صفر$$

١٩- استخدم اسلوب السمبلكس لبيان ان المشكلة التالية لها حلا أمثلا غير محددا .

دالة الهدف . تعظيم $٤س_{١} + س_{٢} + ٣س_{٣} + ٥س_{٤}$

بشرط أن :

$$-٤س_{١} + ٦س_{٢} + ٥س_{٣} - ٤س_{٤} \leq ٢٠$$
$$٣س_{١} - ٢س_{٢} + ٤س_{٣} + س_{٤} \leq ١٠$$
$$٨س_{١} - ٣س_{٢} + ٣س_{٣} + ٢س_{٤} \leq ٢٠$$
$$س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} ، س_{٤} \geq صفر$$

٢٠- حدد الحل المبدئي للمشكلة التالية باستخدام اسلوب السمبلكس .

دالة الهدف تخفيض $- س_{١} - ٢س_{٢} + ٣س_{٣} - ٤س_{٤}$

بشرط أن :

$$- س_{١} + س_{٢} + س_{٣} - ٣س_{٤} = ٥$$
$$٦ س_{١} + ٧س_{٢} - ٣س_{٣} - ٥س_{٤} \geq ٨$$
$$١٢ س_{١} - ٩س_{٢} + ٩س_{٣} + ٩س_{٤} \leq ٢٠$$
$$س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} \geq صفر$$

$س_{٤}$ غير مقيدة الاشارة .

الفصل الثالث

تحليل الحساسية والثنائية للبرامج الخطية

* مقدمـــــــة
* تحليل الحساسية
* الثنائيـــــة

الفصل الثالث

تحليل الحساسية والثنائية للبرامج الخطية

مقدمة :

تناولنا فى الفصلين السابقين الكيفية التى يمكن بها صياغة نماذج البرمجة الخطية ، والصورة النهائية التى تكون عليها تلك الصياغة ، لتعبر بصدق عن محتوى المشكلة موضوع البحث ، ولتأخذ الصورة التى يمكن معها استخدام الاسلوب الرياضى الذى يصلح للتعامل معها ، وكذلك فقد غطى هذين الفصلين الكيفية التى يمكن بها حل هذه المشاكل والتوصل الى نتائج محددة تمثل الحل الامثل، والحقيقة انه على الرغم من الاهمية الكبيرة لتلك النتائج فى التوصل الى قرار محدد ، الا انه من وجهة النظر الادارية وخاصة لدى متخذى القرار ، تعتبر نتائج حل المشكلة اقل اهمية اذا ما قورنت بأهمية تحليل وتفسير تلك النتائج .

وسنقف جليا على هذه الحقيقة عندما يتبين لنا مدى اتساع وعمق وضخامة المعلومات التى يمكن الحصول عليها واستنتاجها واستقراؤها واستخلاصها من خلال تحليل نتائج البرامج الخطية ، ولعله قد يكون مثيرا للدهشة هذا الكم الهائل من المعلومات التى سنرى كيف يمكن الوقوف عليها وكيف انها تعطى صورة كاملة لامور كثيرة لدرجة انه سيكون من المقنع التسليم بأهمية تحليل وتفسير نتائج حل المشكلة ، بدلا من التوقف عند مجرد التوصل الى ذلك الحل الامثل .

ونظرا للاهمية الكبرى لتحليل وتفسير نتائج الحل فقد خصصنا هذا الفصل لنتناول فيه هذا الموضوع ، او

ما يمكن ان نطلق عليه تحليل الحساسية ، أو تحليل ما بعد الامثلية Sensitivity Or Postoptimality Analysis ويعتبر هذا الموضوع بمثابة اسلوب التحليل الذى يمكن عن طريقه تحليل وتفسير نتائج الحل بالعمق الكافى الذى يخدم وجهة النظر الادارية . ان هذا التحليل (تحليل الحساسية) يعمل على توفير قدر من المعلومات الضرورية لمتخذ القرار الذى يواجه دائما بسؤال مضمونه . وماذا يحدث اذا .... ؟ ان السؤال على هذا الشكل هو المقدمة الى تحليل الحساسية ، اذ انه يعكس ان نتائج الحل ليست هى كل شىء يبغيه ولكنه يحتاج الى معرفة المزيد عن التفسيرات والتحليلات فيما اذا حدث تغيير او تعديل فى معاملات النموذج الذى افرز هذه النتائج .

من ناحية اخرى فاذا كانت المعلومات الواردة بجدول السمبلكس النهائى تمثل مصدرا غزيرا وعميقا لتفسيرات ادارية متعددة ، فانه يمكن ان نحصل على المزيد من تلك المعلومات عن طريق تحويل المشكلة الاصلية للبرمجة الخطية (او الصياغة الاصلية للمشكلة) الى نموذج آخر مرافق او مقابل يطلق عليه اصطلاح المشكلة المقابلة او المشكلة الثنائية Dual Problem وعن طريق تحليل نتائج حل المشكلة الثنائية يتوافر لدينا المزيد من المعرفة بحل المشكلة الاصلية .

بناء على ما تقدم فان هذا الفصل سيعالج فى جزئه الاول تطبيقا لتحليل الحساسية لمشاكل البرامج الخطية ، وذلك بهدف الوقوف على كيفية دراسة تأثير التغيرات التى يمكن ان تحدث فى معاملات دالة الهدف ، والتغيرات فى الطاقات المحددة لكل قيد ، وذلك كله دون الحاجة الى اعادة حل المشكلة من بدايتها .

اما الجزء الثانى من هذا الفصل فانه سيتناول توضيح مفهوم المشكلة الثنائية ، وكيف يمكن صياغتها وحلها ، وعلاقتها بالمشكلة الاصلية ، وكيف يمكن استخدامها للاجابة على مزيد من الاسئلة المتعلقة بتحليل الحساسية ، لتحديد اثر التغيرات التى يمكن ان تحدث من ثوابت القيود ، واثر اضافة متغيرات قرارية جديدة ، وتأثيرات التغيرات من معدل استخدام المتغيرات القرارية للموارد المتاحة .

ولعل القارىء يكون قد وقف على المغزى من ان يضم هذا الفصل المشكلة الثنائية الى جانب تحليل الحساسية ، اذ ان تحليل الحساسية بكافة مشتملاته وبمختلف ابعاد التغيرات فى معالم النموذج الخطى يفرض تناول هذه المشكلة بالشرح والتحليل للحصول على مزيد من المعلومات التى تخدم موضوع الحساسية وهذا ما سوف نراه ونقف عليه من خلال استعراض اجزاء هذا الفصل .

تحليل الحساسيـــة

Sensitivity Analysis

تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

يسعى تحليل الحساسية الى تحقيق هدف رئيسي يخدم متخذ القرار ، وهو تحديد حساسية الحل الأمثل للتغيرات التى قد تحدث في عناصر أو معالم المشكلة ، وتتضمن عناصر أو معالم مشكلة البرمجة الخطيه هامش ربح الوحدة (أو التكلفة) وهي معاملات دالة الهدف ، مقدار الموارد المتاحة (ثوابت القيود) ،معدلات استخدام الطاقة (معاملات القيد) ، وقيم أي عناصر أخرى تكون قد استخدمت في صياغة المشكلة . وبطبيعة الحال فان التحليل الذى يستخدم هذه العناصر أو المعالم ،يكون على درجة عالية من الأهمية لأنه يعنى بالوقوف على مدى صحة الحل الأمثل فى ضوء مايحدث من تغيرات على هذه المعالم والعناصر .

ويستطيع تحليل الحساسية بلوغ هذا الهدف من خلال دراسة وبحث مدى حدود التغير فى عنصر معين قبل أن يفقد الحل او القرار الأمثل أمثليته ،فهذه العناصر لاتتسم بالثبات ولكن يعتريها التغير ، وهذا التغير قد يكون بسبب مرور الزمن ،أو أنه يعكس عدم التأكد فى القيم الحقيقية ، حيث أن كثيرا من قيم تلك العناصر تكون بمثابة قيم تقديرية وليست فعلية ومن ثم فهى خاضعة لاحتمالات الخطأ أو التغير .

ويصلح اختبار الحساسية للتطبيق على نتائج أي نموذج من نماذج بحوث العمليات ، الا أننا سنقصر دراستنا في هذا الجزء على تحليل حساسية نماذج البرمجة الخطية .

من ناحية أخرى فانه لاينبغى ان يفهم من العرض السابق ان أي تغيرات فى قيم عناصر مشكلة البرمجة الخطية قد تؤدى بالضرورة الى ان يفقد الحل الأمثل امثليته ،اذ نجد فى أحوال كثيرة ومتكررة أن بعض

التغيرات الطفيفة فى قيم تلك العناصر قد لاتؤدى الى تغير الحل الأمثل ، لذلك نجد أن تحليل الحساسية في مشاكل البرمجة الخطية يهتم بتحديد حجم التغير في قيمة العنصر والذى يؤدى الى ان يفقد الحل أمثليته .

فاذا تبين ان الحل الأمثل لن يتغير الا اذا كانت هناك تغيرات كبيرة ومحسوسة في قيم العنصر المعين، فى هذه الحالة فان المدير أو متخذ القرار أيا كان مستواه الادارى سيكون أكثر ثقة فى ان الحل صحيح ولمدى كبير ، اما اذا كان الحل الأمثل له حساسية كبيرة للتغير لأى تغيرات ولو طفيفة فى قيم عناصر المشكلة ،فانْ متخذ القرار سيفضل ان يدعم النتائج الخاصة بالحل بالمزيد والمزيد من التحليل والدراسة والفحص والتقص في سبيل التحديد الدقيق لهذه العناصر ومراقبة قيمها حتى يقلل من احتمال ان يكون القرار الذى اتخذه سيصبح غير أمثل .

من الاستعراض السابق لمفهوم تحليل الحساسية يمكن ان نقدم التعريف التالي ليعكس طبيعة تحليل الحساسية " تحليل الحساسية هو اختبار مدي صلاحية الحل الامثل في ظل التغيرات التى قد تطرأ على عناصر المشكلة ،أما التغيرات التى قد تظهر من خارج النموذج" . ومغزى تحليل الحساسية وفق هذا التعريف ،أنه قد تطرأ بعد ايجاد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية ،بعض التغيرات في معاملات دالة الهدف ، وثوابت القيود ، ومعاملات القيود ، أو متغيرات أخرى تفرض نفسها لتدخل كعنصر عن عناصر النموذج ، ويراد معرفة أثر هذه التغيرات على الحل الأمثل للنموذج ،دون الحاجة الى حل النموذج مرة أخرى ،بل يمكن الاكتفاء باختبار مدى صلاحية الحل الأمثل فى ظل الظروف الجديدة وذلك باستخدام أسلوب تحليل الحساسية أو تحديد مابعد الأمثلية .

مما سبق يتبين أن التغيرات التى يمكن أن تحدث في حالة مشاكل البرامج الخطيةوالتي يتناولها تحليل الحساسية تتلخص في :

١- التغير فى معاملات دالة الهدف (سواء كانت هامش ربح ، أم تكلفة) .

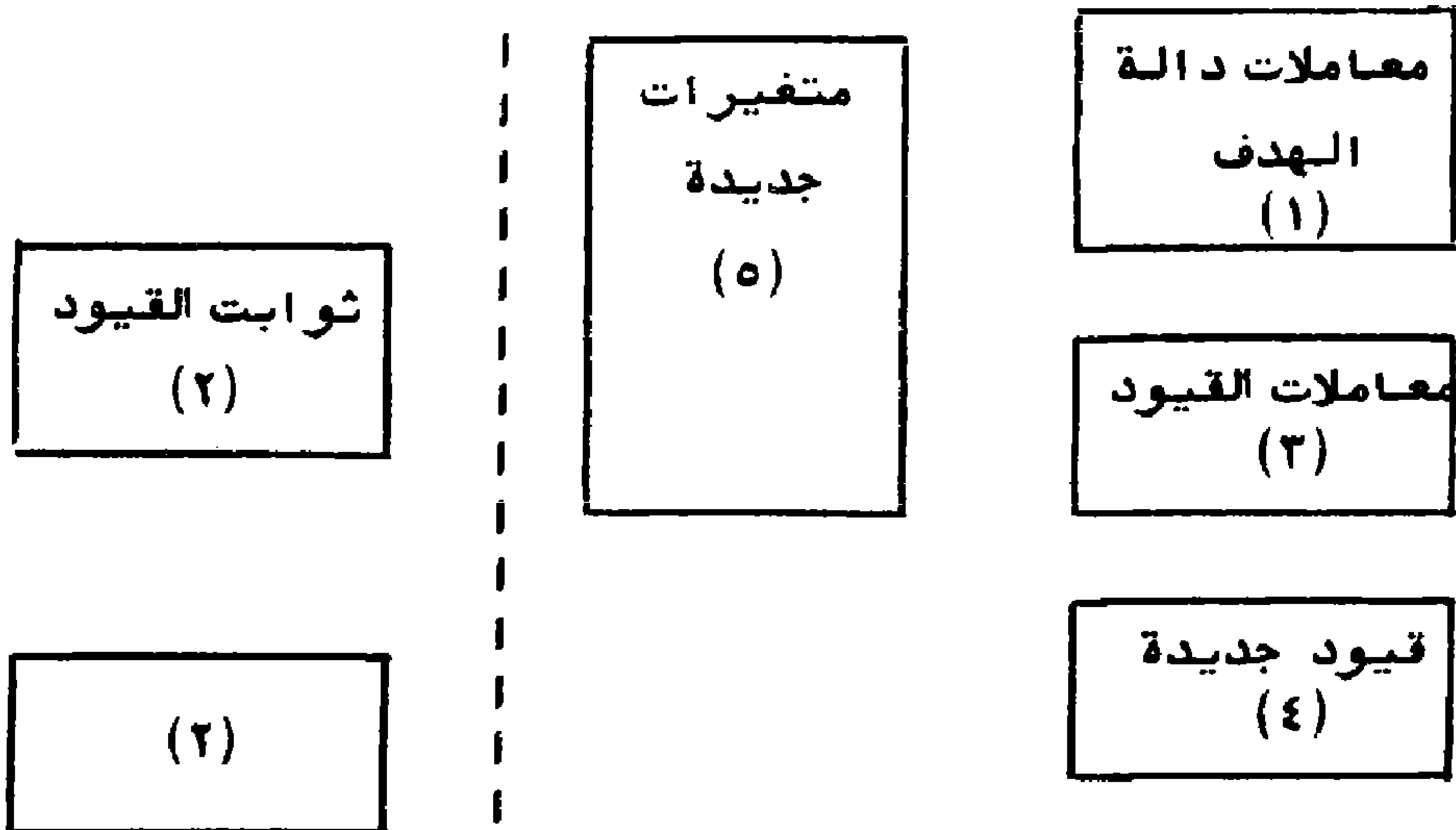
٢- التغير فى ثوابت القيود أو قيم الجانب الأيسر من القيود .

٣- التغير فى معاملات القيود (معدلات استخدام الموارد)

٤- اضافة قيود جديدة .

٥- اضافة متغيرات قرارية جديدة .

ويمكن تصوير هذه الحالات الخمس فى الشكل التالي والذى يمثل فى مجمله معالم أو عناصر نموذج البرمجة الخطية .



وفيما يلى نتناول بالشرح والتحليل كيف يمكن اجراء تحليل الحساسية للتغيرات التى يمكن أن تحدث فى هذه العناصر ويمكن ان نجرى هذا التحليل على المدخل البياني للحل ، الا انه من الأفيد والاكثر استخداما أن نجرى هذا التحليل على جدول السمبلكس الأخير .

ويمكن أن يكون المثال السابق الذى تناولناه في الفصل السابق مجالا لهذا التحليل، الا اننا نرى حتى

يكون تحليلنا بالعمق الكافي ويغطي كافة ماتريد توضيحه فى هذا الخصوص ان نستخدم مثالا آخر يعكس مشكلة أكبر من التى عالجناها سابقا .

مثال : احدى الشركات الصناعية تتخصص فى انتاج أربعة نوعيات من المنتجات يرمز اليها على الترتيب $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$. والجدول التالي يمثل هامش ربح الوحدة والعمليات الصناعية اللازمة لأنتاج تلك النوعيات ومعدل احتياج كل سلعة من هذه العمليات الصناعية وكذلك الطاقة القصوى للاقسام الصناعية :

المنتجات	الاقسام الانتاجية		هامش ربح الوحدة
	تصنيع	تجميع	
$س_١$	٢٠ ساعة	٢٠ ساعة	٢٠٠٠ جنيه
$س_٢$	٢٥ ،،	٢٠ ،،	٥٠٠٠ جنيه
$س_٣$	٣٠ ،،	١٢ ،،	٤٠٠٠ جنيه
$س_٤$	١٥ ،،	١٠ ،،	٢٠٠٠ جنيه
الطاقة المتاحة اسبوعيا	٩٠٠ ساعة	٩٠٠ ساعة	

ولقد تبين ان الشركة متعاقدة مع بعض العملاء على ضرورة توريد على الاقل ٥٠٠٠ وحدة من $س_١$ ، ٣٠٠٠ وحدة من $س_٣$ اسبوعيا . والشركة ترغب في تحديد مزيج الانتاج الامثل الذى يعمل على تعظيم الارباح .

الحل :

يتم اعداد الصياغة الرياضية لتلك المشكلة كالآتي :

١- دالة الهدف تعظيم ٢٠٠٠$س_١$ + ٥٠٠٠$س_٢$ + ٤٠٠٠$س_٣$ + ٢٠٠٠$س_٤$

٢- القيود :

$$٢٠س_{١} + ٢٥س_{٢} + ٣٠س_{٣} + ١٥س_{٤} \geqq ٩٠٠$$

$$٢٠س_{١} + ٢٠س_{٢} + ١٢س_{٣} + ١٠س_{٤} \geqq ٩٠٠$$

$$س_{١} \leqq ٥٠٠٠$$

$$س_{٣} \leqq ٣٠٠٠$$

$$س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} ، س_{٤} \leqq \text{صفر}$$

وبعد تحويل متباينات القيود باضافة المتغيرات الراكدة والاصطناعية واعداد جدول الحل المبدئي ثم السير فى خطوات تحسين الحل ، سنجد اننا وصلنا الى جدول الحل النهائي الامثل التالي :

جدول السمبلكس الاخير (الحل الأمثل)

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٢٠٠٠	٥٠٠٠	٤٠٠٠	٣٠٠٠	صفر	صفر	صفر	صفر
		القيم	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	س٨
٥٠٠٠	س٢	٢٨ ٢/٥	صفر	١	صفر	٣/٥	١/٢٥	صفر	٤/٥	٦/٥
صفر	س٦	١٩٦	صفر	صفر	صفر	-٢	-٤/٥	١	٤	-١٢
٢٠٠٠	س١	٥	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	-١	صفر
٤٠٠٠	س٣	٣	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	-١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٢٠٠٠	٥٠٠٠	٤٠٠٠	٣٠٠٠	٢٠٠	صفر	٢٠٠٠	٢٠٠٠
	١٦٤٠٠٠	صافي التغير	صفر	صفر	صفر	-١٠٠٠	-٢٠٠	صفر	-٢٠٠٠	-٢٠٠٠

ومن هذا الجدول يتضح ان الحل الأمثل هو :

انتاج عدد ٥ وحدات من	$س_1$	تعطي	١٠ر٠٠٠ جنيه	ارباح
،، ،، $٢٨\frac{٢}{٥}$ وحدة من	$س_2$	تعطي	١٤٢ر٠٠٠ ،،	،،
،، ،، ٣ وحدات من	$س_3$	تعطي	١٢ر٠٠٠ ،،	،،

اجمالي الارباح للاسبوع القادم ١٦٤ر٠٠٠ جنيه

ولغرض تحليل حساسية الحل الأمثل والذى يظهر في جدول السمبلكس السابق فاننا سنتناول فيما يلى تغطية لتحليل الحساسية بشكل واضح وتحليلي متناولين النواحي التالية :

١- التغيرات في معاملات دالة الهدف .

٢- تحليل التغيرات في طاقة الموارد.

أما باقى عناصر نموذج البرمجة الخطية فسيتم تناولها بعد استعراض مفهوم المشكلة الثنائية .

أولا: التغيرات في معاملات دالة الهدف

Objective Cofficent Changes

سنبدأ تحليل الحساسية بأول عنصر من عناصر الصياغة الرياضية لنموذج البرمجة الخطية وهو معاملات دالة الهدف للمتغيرات القرارية الواردة بهذه الدالة . الا أنه حتى يكون تحليلنا واقعيا ومنطقيا وعلميا فان تناول هذا التحليل يتعين أن يكون في ضوء الحقيقة التي نقتنع بها وهي ان مدى تأثير التغير يختلف عما اذا كانت هذه التغيرات تتعلق بمتغير غير اساسي أو بمتغير أساسي أو بمتغير اساسي فى الحل الأمثل . الا أنه قد يتبادر الى الذهن تساؤل ، يتعين ازالة الغموض عنه وتوضيحه وهو، ولماذا نفرق بين تلك المتغيرات طالما انها جميعا ترد بدالة الهدف ؟ ولماذا لايشملها التحليل بصورة جماعية وبقواعد واحدة تطبق على أي متغير قرارى تضمه دالة الهدف ؟ الحقيقة ان هذا التساؤل قد يبدو منطقيا في ظاهره ، الا ان قليلا من التفسير سيضع الأمور فى نصابها

وسيجلى هذا الموقف وسيكون هذا التساؤل غير ذى موضوع ، فانه وان كانت المتغيرات القرارية جميعها قد ضمتها دالة الهدف ، الا آن صفتها اختلفت فى جدول الحل الامثل، فمنها من آخذ مكانه في الانتاج ومنها ماتقرر وقف انتاجه حاليا من مزيج الانتاج الأمثل ، أي هناك منها ما آخذت صفة المتغيرات الاساسية (وهى المتغيرات القرارية ذات القيم الموجبة) ، ومنها مايوصف بأنه متغير غير اساسي (أي انه متغير قراري ولكن ذات قيمة صفرية). واختلاف الصفة ينعكس على طبيعة تحليل الحساسية .وآبسط تلك الامور السريعة التي يمكن للقارئ ان يقف عليها بسرعة وبمجرد النظر هي أن المتغيرات الاساسية ستظهر في عمود المتغيرات الاساسية وعلى يمينها معاملها بدالة الهدف والذى يؤثر على قيمة دالة الهدف وعلى قيم التكاليف الداخلة لكافة متغيرات النموذج وفى نفس الوقت فان هذا المتغير ايضا له قيمة تظهر آمام صف الارباح الداخلة أي آن آي تغيير فى معاملات المتغيرات الاساسية سيكون لها آثارها المزدوجة على مقدار صافي التغير الذى يتم اختبار حساسية الحل من خلاله .

أما المتغير غير الاساسي فانه معامله لايظهر فقط الا فى صف الارباح الداخلة ومن ثم فان تأثيره على صف صافى التغير تأثير مباشر وليس له تأثيرات جانبية آخرى وطالما اختلف الاثر بين المتغير الاساسي والمتغير غير الاساسي ،اذن ليس من المقبول ان يتم تحليل حساسية كل منها بنفس المدخل وبذات الاسلوب . وهذا هو السبب في اننا سنفرق فى الجزء التالى بين المتغيرات غير الاساسية ، والمتغيرات الاساسية .

(١) التغيرات في معاملات دالة الهدف للمتغيرات غير الأساسية :

سنبدآ تحليلنا للمتغيرات القرارية بتلك المتغيرات غير الاساسية لأنها اسهل وآيسر وآبسط فى تحليلها ،ومن ثم سنفرغ منها على عجل وفى نفس الوقت تعتبر مقدمة

لتوضيح بعض المفاهيم التى يمكن تجنيدها لخدمة التحليل عند التعرض للنوع الآخر من المتغيرات •

وبالرجوع الى جدول السمبلكس السابق والذى يمثل الجدول الأخير والحل الأمثل لمشكلة المثال الذى طرحناه ، سنجد أن المتغير القراري الوحيد غير الاساسي فى ذلك الجدول هو المتغير ($س_٤$) ، مع ملاحظة اننا استبعدنا من تحليلنا المتغيرات غير الاساسية الأخرى والتى تمثل المتغيرات الراكدة ($س_٥$ ،$س_٦$ ،$س_٧$ ،$س_٨$) أو المتغيرات الاصطناعية ($ص_١$ ، $ص_٢$) ، حيث ان الاولى ليس لها معاملات بدالة الهدف ، والثانية اسقطت من جدول لآخر أثناء جولات الحل •

والسؤال الآن ، كيف سيؤثر التغير فى معامل دالة الهدف للمتغير القراري غير الاساسي ($س_٤$) على أمثلية الحل الأخير ؟ •

ان التغير فى معامل دالة الهدف نقصد به التغير فى الاتجاهين بمعنى انخفاض هذا المعامل أو ارتفاعه • لذلك يتعين ان نتناول هاتين الحالتين :

أ) ـ <u>أثر النقص أو الانخفاض فى معامل دالة الهدف للمتغير غير الأساسي :</u>

ان السبب وراء عدم دخول المتغير القراري فى المزيج الانتاجى الأمثل ومن ثم اصبح متغير غير أساسي هو أن مساهمة هذا المتغير ليست من الكبر بحيث تسمح بالاستبدال المربح مع احد المتغيرات الاساسية الحالية ، لأنه لو كان مربحا بما فيه الكفاية لتمكن من ازاحة احدى تلك المتغيرات الاساسية وحل محلها وبذلك يكتسب صفة المتغير الاساسي ويدخل المزيج الانتاجى الامثل• أي أنه بهامش ربحه الحالى (معامل دالة الهدف له) •لايستطيع أن يحل محل متغير اساسي آخر، فاذا كان الأمر كذلك فما بالنا لو حدث نقص أو انخفاض في ذلك المعامل للمتغير

غير الاساس، ان ذلك سيجعله بالتأكيد غير مربح أكثر مما كان عليه ومن ثم سيستمر على حالته التى هو عليها حاليا، أي أن انخفاض معامل دالة الهدف للمتغير غير الاساسى بأي مقدار لن يؤثر على المزيج الانتاجي الأمثل لأنه حاليا غير مربح بما فيه الكفاية فكيف يكون الامر مع هذا الانخفاض، ان هذا التحليل يقودنا ان نقرر القاعدة التالية :

قاعدة :

ان النقص أو الانخفاض فى معامل دالة الهدف لأي متغير قراري غير أساسي (فى مشاكل التعظيم) لن يؤدى الى تغير الحل الأمثل ،وأن الأمر الوحيد الذى سينتج عن هذا النقص او الانخفاض انه سيجعل هذا المتغير غير مربح عما كان عليه .

وقد يكون من المفيد أن ننتقل بهذه القاعدة الى واقع التطبيق العملي ،اذ بالنظر الى صف صافى التغير بجدول السمبلكس الاخير ، نجد أن قيمة صافى التغير للمتغير غير الاساسى ($س_ع$) هى (– ١٠٠٠) ،وهذه القيمة هي نتيجة طرح التكاليف الداخلة لهذا المتغير (٣٠٠٠) من الارباح الداخلة له (٢٠٠٠) أي :

قيمة صافى التغير للمتغير غير الاساسي =٢٠٠٠–٣٠٠٠=–١٠٠٠

ولايمكن للمتغير غير الاساسي $س_ع$ أن يكون مرشحا كمتغير داخل الا اذا انتقل صافى التغير من حالته السالبة الى حالة موجبة (عندئذ يفقد الحل امثليته) ،فهل يتم هذا اذا حدث انخفاض لمعامل دالة الهدف عما هو عليه ؟ ان معاملة الحالى ينتج عنه قيمة صافى تغير سالبة ، فاذا ما انخفض هذا المعامل عما هو عليه فان قيمة صافي التغير ستكون اكبر باشارة سالبة ، أي سيكون غير مربح عما كان عليه . أي أن الانخفاض ولو بأي مقدار لن يترتب عليه أي تغيير فى أمثلية الحل .

ب)- أثر الزيادة فى معامل دالة الهدف للمتغير غير الاساسي :

من ناحية أخرى ، فانه اذا اردنا ان نقف على مقدار الزيادة فى معامل دالة الهدف للمتغير غير الاساسي ليفقد الحل أمثليته ، ويتحول هذا المتغير الى متغير اساسي ،فانه من المنطقي آن تكون هذه الزيادة من الكبر بحيث تكفى لتحويل ربحية المتغير من متغير غير آساسي الى متغير أساسي • ولكن ماهو مقدار تلك الزيادة التى تكفى لهذا التحويل ؟

للاجابة على هذا التساؤل ، نقول انه قد تبين لنا عند حل مشاكل التعظيم بطريقة السمبلكس ،ان منهج طريقة السمبلكس يختار المتغير غير الاساسي ذات آكبر قيمة موجبة فى صف صافى التغير ليصبح متغيرا آساسيا (متغير داخل)• وقد ذكرنا أنه طالما وجد ولو متغير واحد له قيمة صافى تغير موجبه ، فان الحل يعتبر غير أمثل ويحتاج الى تحسين ، وتستمر جولات الحل وصولا الى الحل الأمثل ، مثلما حدث فى المشكلة التى نعالجها الآن والتى يعبر جدول السمبلكس الأخير السابق عن الحل الأمثل لها • وتأسيسا على ذلك فان قيمة صافى التغير للمتغير غير الاساسي ($س_٤$) يتعين آن تصبح قيمة موجبة حتى يفقد الجدول الأخير امثليته ويصبح من المحتم اختيار ($س_٤$) متغير داخل ، ومن ثم ينضم الى المتغيرات الاساسية • ولن تصبح قيمة صافى التغير للمتغير $س_٤$ موجبة الا اذا زاد معامل دالة الهدف لهذا المتغير بمقدار يكفى ليكون سببا فى جعل قيمة صافى التغير لهذا المتغير غير الاساسي قيمة موجبة•

آي انه يمكن ان نضع القاعدة التالية :"الحد الاقصى للزيادة فى معامل دالة الهدف للمتغير غير الأساسي،والتي لاتؤدى الى تغيير امثلية الحل ،لابد آن تكون زيادة كافية

تماما وبالضبط لجعل قيمة صافى التغير لهذا المتغير مساوية للصفر ".

وبتطبيق هذه القاعدة على حالة المتغير غير الاساسي (س ٤) ، فاننا نجد أن قيمة صافى التغير لهذا المتغير في جدول الحل الأمثل (- ١٠٠٠) ،ومعنى ذلك أن اكبر زيادة لمعامل دالة الهدف لهذا المتغير هي (+ ١٠٠٠) ، حيث أن هذه الزيادة ستجعل قيمة صافي التغير له مساوية للصفر ومن ثم لايفقد الحل أمثليته ، أي انه اذا اصبح هامش ربح الوحدة من س ٤ مبلغ ٣٠٠٠ جنيه بدلا من ٢٠٠٠ جنيه فان قيمة صافى التغير عندئذ تساوى صفر كالآتي :

قيمة صافى التغير للمتغير س ٤

= معامل دالة الهدف - التكاليف الداخلة

= ٣٠٠٠ - ٣٠٠٠ = صفر

أما اذا زاد معامل دالة الهدف للمتغير غير الاساسي (س ٤) بقيمة تزيد عن ١٠٠٠ جنيه ،فان ذلك يجعله مربح ، ويجعل له قيمة صافي متغير موجبة ،ومن ثم يفقد الحل أمثليته .

والمنطق نفسه صحيح بالنسبة لمشاكل البرمجة الخطية ذات هدف التخفيض ، مع عكس الاتجاه حسب الهدف ، اذ في مشاكل التخفيض يكون المتغير القراري غير أساسي لأنه من الأرخص والأقل تكلفة استخدام وحدات من المتغيرات الاساسية . لذلك يمكن ان نضع القاعدة التالية بالنسبة لمشاكل التخفيض :

قاعدة :

" أي زيادة فى معامل دالة الهدف للمتغير القراري غير الاساسي في حالة مشاكل التخفيض ، لن يؤثر على امثلية الحل ،والأثر الوحيد الذي سينتج عن هذه الزيادة ، انه سيجعل هذا المتغير أكثر تكلفة عما كان عليه ،وكذلك فان أي انخفاض فى المعامل

أكبر من قيمة صافى التغير فى الجدول النهائي لهذا المتغير سيؤدى الى أن يفقد الحل أمثليته ، وان التخفيض الذى لايفقد الحل امثليته أن يكون كافيا فقط لأن يجعل قيمة صافى التغير له صفرا".

مما سبق يمكن أن نضع قاعدة الحساسية التالية بالنسبة للتغيرات فى معاملات دالة الهدف للمتغيرات القرارية غير الاساسية فى مشاكل التعظيم (أو التخفيض):

قاعدة :

" يمكن تخفيض (زيادة) معامل دالة الهدف للمتغير القراري غير الاساسي بأي مقدار ، أو زيادته (تخفيضه) بمقدار يكفي بالكاد لأن يجعل قيمة صافي التغير له مساوية للصفر ، دون أن يتغير الحل الأمثل " .

ومن القاعدة السابقة يمكن استنتاج انه لكى تكون الزيادة فى معامل دالة الهدف للمتغير الاساسى كافية بالكاد لجعل قيمة صافى التغير له مساوية للصفر ، فان ذلك يعنى ان هذه الزيادة هى نفسها مقدار صافى التغير مع تغيير الاشارة ، فمثلا قيمة صافى التغير للمتغير غير الاساسى ($س_٤$) فى الجدول الاخير هى (– ١٠٠٠) اذن أقصى زيادة تجعل قيمة صافى التغير مساوية للصفر هى نفس هذه القيمة مع تغيير الاشارة أي (+١٠٠٠) . ومن هنا يمكن استنتاج القاعدة التالية :

قاعدة :

" الحد الأقصى للزيادة فى معامل دالة الهدف للمتغير القرارى غير الاساسي فى مشاكل التعظيم ، دون أن يفقد الحل أمثليته ، هو عبارة عن قيمة صافى التغير لهذا المتغير فى الجدول الأمثل مع اختلاف الاشارة ".

ولكن ماذا يحدث اذا زاد معامل المتغير غير الاساسي ($س_٤$) بدالة الهدف عن ١٠٠٠ جنيه ، أي بدلا من ان يكون هامش ربح هذا المتغير ٢٠٠٠ جنيه أصبح مثلا ٣٠٠١ جنيه ، في هذه الحالة ستكون قيمة صافى التغير لهذا المتغير (١) ، وبظهور هذه القيمة الموجبة فى صف صافي التغير ، يفقد الحل أمثليته حيث سيتم فى هذه الحالة اختياره كمتغير داخل أي تحويله الى متغير آساسي .

وتلخيصا لما تقدم يمكن القول ان الحد الأقصى للنقص في معامل دالة الهدف للمتغير غير الاساسي $س_٤$ يعادل − ∞ اي (ناقص مالانهاية) أي يمكن تخفيضه الى مالانهاية دون ان يؤثر على امثلية الحل ، والحد الاقص للزيادة تعادل مقدار قيمة صافى التغير له مع تغيير الاشارة .ويمكن كتابة الحدين السابقين للتغير في معامل الهدف للمتغير غير الاساسي ($س_٤$) كالآتي :

$$-\infty \quad \text{معامل دالة الهدف للمتغير } س_٤ = ٣٠٠٠$$

أي انه طالما ان هامش ربح المنتج س ٤ تنحصر بين ناقص مالانهاية وثلاثة آلاف جنيه فان الحل الأمثل الحالى سيظل كما هو ولن يتحول $س_٤$ الى متغير آساسي ، وهذا يعنى انه لو حتى اخطأت الشركة فى تقدير هامش ربح هذا المنتج ، فانه طالما ان هذا الخطأ فى التقدير في الحدود السابقة فلا تأثير له على آمثلية الحل .

(٢) التغيرات فى معاملات دالة الهدف للمتغيرات الأساسية :

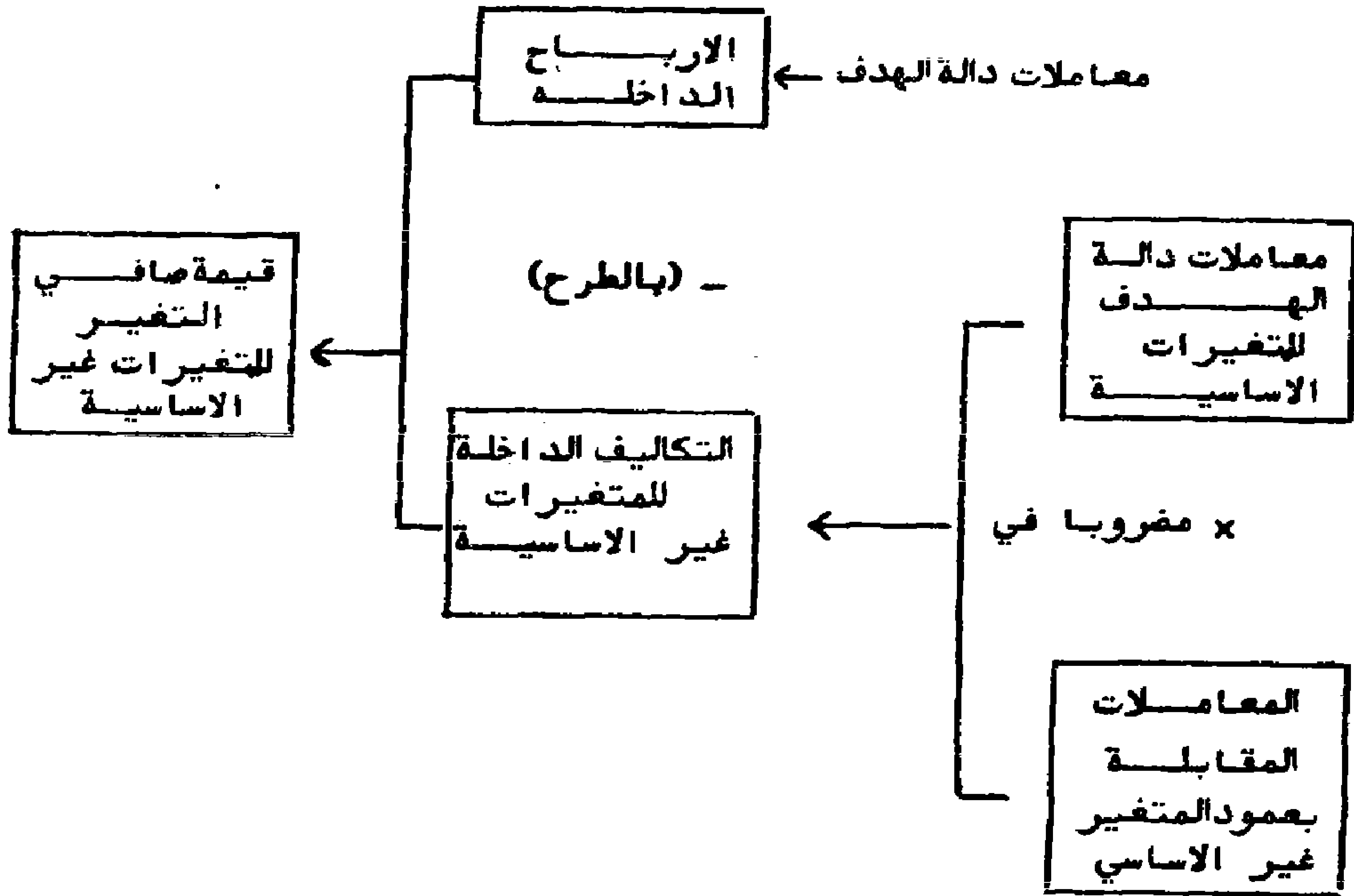
ان اسلوب التحليل الذى سيستخدم لقياس آثر التغيرات فى معاملات دالة الهدف للمتغيرات الأساسية ، سيختلف الى حد كبير عن الاسلوب الذى اتبعناه فى حالة المتغيرات غير الاساسية ، ويرجع ذلك بسبب ان التغير في أحد الاتجاهين (ارتفاعا أو انخفاضا) قد يؤدى الى تغير الحل الأمثل ، ففى حالة نموذج البرمجة الخطيه

ذات هدف التعظيم ،فان الانخفاض فى معامل دالة الهدف للمتغير الاساسى قد يؤدى الى آن يكون من المربح انيحل آحد المتغيرات غير الاساسية محل ذلك المتغير ،ومن ثم يفقد الحل امثليته ، وفى الاتجاه الآخر،فان زيادة معامل دالة الهدف للمتغير الاساسي ،قد يجعل ذلك المتغير مربح جدا ، الى الدرجة التى يتم فيها تحويل الطاقة المستخدمة في انتاج احد المتغيرات الاساسية الاخرى الية • كذلك بالنسبة لمشاكل البرمجة الخطيه ذات هدف التخفيض ولكن فى الاتجاه العكسى •

نخلص مما سبق ان تحليل التغيرات فى معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية ليست بالسهولة التى كانت عليها للمتغيرات غير الاساسية ، وفى رآينا ان السبب الرئيسى لذلك ان صف التكاليف الداخلة يتآثر بصفة مباشرة بآي تغير فى معاملات دالة الهدف للمتغيرات الاساسية • وفى نفس الوقت فان صف التكاليف الداخلة ذات تآثير مباشر على قيمة صف صافى التغير الذى يحدد امثلية الحل •

وحتى يمكن ان نتفهم كيف يمكن حساب القيمالدقيقة للتغير الذى يمكن السماح به في معاملات المتغيرات الاساسية فى دالة الهدف ؟ فاننا اولا نذكر القارئ آن جدول الحل الامثل لمشاكل البرمجة الخطية ذات هدف التعظيم يتسم بآن جميع قيم صف صافي التغير تكون سالبة و/آو صفرية • كما نسترجع مع القارئ آن هذه القيم يتم الحصول عليها من خلال طرح التكاليف الداخلة من معاملات دالة الهدف الاصلية وذلك لكل متغير من المتغيرات الواردة بصياغة المشكلة ، كما نذكر القارئ آن التكلفة الداخلة كان يتم حسابها عن طريق مجموع حواصل ضرب معاملات كل عمود فى معاملات دالة الهدف المقابلة للمتغيرات الاساسية ، وعلى ذلك فاذا حدث تغيير فى معاملات دالة الهدف للمتغيرات الاساسية ، فان

الاثر المباشر لذلك هو حدوث تغييرات فى قيم التكاليف الداخلة للمتغيرات غير الاساسية (فقط ولا يحدث ذلك للمتغيرات الاساسية) ، ومن ثم فان هذا التغير سينعكس ايضا على قيم صافى التغير لتلك المتغيرات غير الاساسية ، وقد يؤدى هذا الى ان يفقد الحل أمثليته ، والشكل التالى يوضح هذه الآثار :



وطالما ان قيم صافى التغير للمتغيرات غير الاساسية تظل سالبة أو صفرية يظل الحل آمثل دون تغيير، وطالما ان هذه هى القاعدة ، اذن من خلالها واستنادا اليها يمكننا ايجاد حدود التغيرات فى معاملات دالة الهدف للمتغيرات الاساسية عن طريق الحد الاقصى للتغيرات في كلا الاتجاهين والتى تبقى قيم صافى التغير لكل المتغيرات الاساسية سالبة أو صفرية .

ويجدر ان ننوه هنا ان حساب الحد الاقصى للتغير لايتم حسابه للمتغير غير الاساسي المعين فقط ولكنه

يتحدد من خلال تأثير ذلك التغير على كافة المتغيرات غير الاساسية ، ثم بناء على ذلك يتم تحديد الحد الاقصى للتغير فى الاتجاهين كما سيتبين فيما يلي :

ولنأخذ مثلا المتغير الأساسى ($س_٢$) والوارد بجدول السمبلكس الأخير فى المشكلة السابقة ،فبالنظر الى هذا الجدول وبتخيل ماهو اثر احداث تغيير على معامل دالة الهدف لهذا المتغير الاساسي ($س_٢$) على سبيل المثال ، وليكن هذا التغير بالزيادة ، ان التكاليف الداخلة بالاعمدة $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ،$س_٦$ لن تتأثر بهذه الزيادة لأنها متغيرات اساسية ، أما التكاليف الداخلة للاعمدة $س_٤$ ، $س_٥$ ،$س_٧$ ، $س_٨$ فستتأثر بهذه الزيادة وترتفع قيمتها ، ومن هذا يؤثر على صافي التغير ، الأمر الذى قد يجعل احد هذه القيم تأخذ قيمة موجبة فيفقد الحل أمثليته .

وما دمنا نقوم بتحليل التغير فى معامل دالة الهدف للمتغير الاساسي ($س_٢$) ، فلنواصل التحليل حتى نعرف حدود التغير فى معامل هذا المتغير دون تغير الحل الأمثل.

فيما يلى المتغير الأساسي ($س_٢$) ومعاملات القيد المقابلة له بأعمدة المتغيرات غير الأساسية.

	$س_٤$	$س_٥$	$س_٧$	$س_٨$
$س_٢$	$\frac{٣}{٥}$	$\frac{١}{٢٥}$	$\frac{٤}{٥}$	$\frac{٦}{٥}$

فاذا فرضنا ان معامل دالة الهدف للمتغير الاساسي (س) قد زاد بمقدار معين وليكن (Δ) . فان التكاليف الداخلة لكل متغير غير آساسي سوف تزيد بمقدار يعادل (Δ x معامل القيد لكل منها)،ولايجاد قيمة (Δ) التى تدفع بقيمة صافى التغير الى صفر

لأحد المتغيرات غير الاساسية ، فاننا ببساطة نضع قيمة التغير تعادل قيمة صافى التغير الحالية لذلك المتغير، ثم يتم حل المعادلات لايجاد قيمة التغير (Δ)،ومن جدول السمبلكس الاخير ، كانت قيم صافي التغير للمتغيرات غير الاساسية هي :

	$س_٤$	$س_٥$	$س_٧$	$س_٨$
صافي التغير	-١٠٠٠	-٢٠٠	-٢٠٠٠	-٢٠٠٠

أذن لايجاد قيمة (Δ) نجعل قيمة حاصل ضرب (Δ) × معامل التغير غير الاساس ($س_٤$) تعادل قيمة صافى التغير الحالية لذات المتغير ($س_٤$) أي تساوي (-١٠٠٠) أى تكون المعادلة كالآتي :

$$\text{قيمة التغهر عند } س_٤ = \Delta \times \frac{٣}{٥} = -١٠٠٠$$

$$\therefore \Delta = -١٠٠٠ \times \frac{٥}{٣} = -\frac{٥٠٠٠}{٣}$$

وهذه النتيجة تعنى انه اذا انخفض معامل دالة الهدف للمتغير الاساسي ($س_٢$) بمقدار ($\frac{٥٠٠٠}{٣}$) ،فان قيمة صافى التغير للمتغير غير الاساسي ($س_٤$) ستكون صفرا ، وأي انخفاض أكبر من هذا فى معامل الهدف للمتغير $س_٢$ سيكون سببا في أن يكون للمتغير ($س_٤$) قيمة صافي تغير موجبة مما يؤدى الىان يفقد الحل والجدول الأخير أمثليته .

ولكن هل يمكن ان نعتبر ان النتيجة التي وصلنا اليها فىالفقرة السابقة هى حدود التغير لمعامل دالة الهدف للمتغير الاساس ($س_٢$)؟ لقد سبق القول انه لحساب هذه الحدود يتعين ان نختبر كل متغير من المتغيرات غير الاساسية ، فلربما يكون هناك متغير غير أساسي اكثر تحفزا للتغير، اذن هذه الحدود لايتم

تحديدها الا بعد حسابها لجميع المتغيرات غير الاساسية .

ويمكن لتسهيل العمليات الحسابية المطلوبة لاستخراج قيمة (Δ) ان نطبق المعادلة التالية :

Δ للمتغير الاساسي (س) = قيمة صافي التغير الحالي للمتغير غير الاساسي / معامل القيد المقابل بعمود ذلك المتغير غير الاساسي امام المتغير الاساسي (س)

Δ $س_{٢}$ مع المتغير غير الاساسي $س_{٥}$ $= \frac{-١٠٠٠}{\frac{٣}{٥}} = -١٠٠٠ \times \frac{٥}{٣} = -\frac{٥٠٠٠}{٣}$

Δ $س_{٢}$ مع المتغير غير الاساسي $س_{٥}$ $= \frac{-٢٠٠}{\frac{١}{٢٥}} = -٢٠٠ \times \frac{٢٥}{١} = -٥٠٠٠$

Δ $س_{٢}$ مع المتغير غير الاساسي $س_{٧}$ $= \frac{-٢٠٠٠}{\frac{٤}{٥}} = -٢٠٠٠ \times \frac{٥}{٤} = -٢٥٠٠$

Δ $س_{٢}$ مع المتغير غير الاساسي $س_{٨}$ $= \frac{-٢٠٠٠}{\frac{٦}{٥}} = -٢٠٠٠ \times \frac{٥}{٦} = -\frac{٥٠٠٠}{٣}$

وهذه النتائج الاربعة السابقة تمثل حدود أو قيود على تغيرات معامل دالة الهدف للمتغير الاساسي $س_{٢}$ ، لذلك فانه لايجاد الحد الاقصى للتغير في المعامل والذى لايفقد معه الجدول النهائي للحل امثليته ، هو ذلك الحد أو القيد الذى يعتبر اكثر تحديدا أو اكثر احكاما ،ويتم تحديد ذلك بتعيين أصغر القيم للحدود السابقة بالموجب وبالسالب لأنهما سيمثلان حدود هذا التغير . وبالنظر الى القيم الاربعة السابقة وهي ($-\frac{٥٠٠٠}{٣}$ ، -٥٠٠٠ ، -٢٥٠٠ ، $-\frac{٥٠٠٠}{٣}$) : نجدها جميعا قيما سالبة وهذا يعني انه لايوجد حد على مقدار زيادة معامل دالة الهدف للمتغير الاساسي ($س_{٢}$) ، وبمعنى آخر يمكن زيادة معامل دالة الهدف لهذا المتغير دون أن يفقد الحل الحالي أمثليته بل يستمر أمثل .

أما الحد الأقصى للتخفيض فهو أحد هذه القيم الأربعة ، ويتعين بطبيعة الحال أن تكون أصغر قيمة

باشارة سالبة للتغير (Δ) وهي ($-\frac{5000}{3}$) هى ذلك الحد الاقصى للتخفيض . وأي تخفيض اكثر من ذلك سيكون سببا فى جعل قيمة صافى التغير لكل من المتغيرين غير الاساسيين س $_{4}$ ، س $_{8}$ موجبا ، وهذا يعنى فى حالة حدوثه ان الحل غير أمثل ويمكن تحسينه باختيار أي من س $_{4}$ ، أو س $_{8}$ كمتغير داخل فى جولة تالية للحل.

ويمكننا اجراء نفس العمليات الحسابية السابقة على كل من المتغير الاساسي (س $_{1}$) ،والمتغير الاساسي (س $_{3}$) . وفيما يلى معاملات القيود للمتغيرات غير الاساسية فى كل من صف القيد المقابل للمتغير الاساسى (س $_{1}$) وكذلك (س $_{3}$) -

	س $_{4}$	س $_{5}$	س $_{7}$	س $_{8}$
س $_{1}$	صفر	صفر	-١	صفر
س $_{3}$	صفر	صفر	صفر	-١

كذلك كانت قيم صافى التغير المقابلة هي :

	س $_{4}$	س $_{5}$	س $_{7}$	س $_{8}$
صافي التغير	-١٠٠٠	-٢٠٠	-٢٠٠٠	-٢٠٠٠

وفيما نستخرج قيمة (Δ) لكل من معامل دالة الهدف للمتغير س $_{1}$ ، ثم للمتغير س $_{3}$.

المتغير الاساسي س $_{1}$:

ونظرا لأن معاملات القيد للمتغيرات غير الاساسية س $_{4}$ ، س $_{5}$ ، س $_{8}$ صفرية ،فان هذا يعنى ان قيمة معامل الهدف للمتغير الاساسي (س $_{1}$) ليس له تأثير مطلقا على قيمة صافى التغير لتلك المتغيرات غير

الاساسية ، لذلك نكتفى بحساب (Δ) للمتغير غير الاساسي $س_٧$ فقط كالآتي :

Δ $س_١$ مع المتغير غير الاساسي $س_٧$ = $\frac{-٢٠٠٠}{-١}$ = ٢٠٠٠

وهذا يعنى انه لكى يبقى الحل الوارد بالجدول الاخير كما هو أمثل فينبغى الا يزيد معامل دالة الهدف للمتغير الاساسى $س_١$ بأكثر من ٢٠٠٠ جنيه (اشارة موجبة) ، وليس هناك حدود على حجم انخفاض مساهمة ذلك المتغير ، وذلك لأنه لا أهمية لانخفاض مساهمة تلك السلعة ، والسبب فى ذلك ان القيمة المثلى لانتاج هذه السلعة فى الحل الأمثل هى٥٠٠٠ وحدة ولايمكن ان تقل عن هذا الحد لأن هناك قيد بأن يكون الحد الأدنى للانتاج من $س_١$ هو ٥٠٠٠ وحدة .

المتغير الاساسي $س_٣$:

نظرا لأن معاملات القيد للمتغيرات غير الأساسية $س_٤$ ، $س_٥$ ، $س_٧$ صفرية ، فان هذا يعنى انه لاتأثير مطلقا عليها من تغير معامل الهدف للمتغير الاساسي $س_٣$ لذلك نكتفى بحساب (Δ) للمتغير غير الاساسي $س_٨$ فقط كالآتي :

Δ $س_٣$ مع المتغير غير الاساسي $س_٨$ = $\frac{-٢٠٠٠}{-١}$ = ٢٠٠٠

وهذا يعنى ان حدود الزيادة القصوى ٢٠٠٠ ولاتوجد حدود قصوى للانخفاض .

والجدول التالي يقدم ملخصا لحدود التغير فى معاملات دالة الهدف لكافة المتغيرات القرارية للمثال الذى نتناوله بالتحليل .

رمز المنتج	اقصى نسبة تخفيض	أقل معامل	المعامل الحالي	اكبر معامل	اقصى نسبة زيادة
س ١	بلا حدود	بلا حدود	٢٠٠٠	٤٠٠٠	١٠٠٪
س ٢	٣ر٣٣٪	٣ر٣٣٣٣	٥٠٠٠	بلا حدود	بلا حدود
س ٣	بلا حدود	بلا حدود	٤٠٠٠	٦٠٠٠	٥٠٪
س ٤	بلا حدود	بلا حدود	٢٠٠٠	٣٠٠٠	٥٠٪

وبالنظر الى بيانات هذا الجدول يمكن القول انه برغم ان النسب المئوية متفاوتة بعض الشئ الا انها جميعا مرتفعة نسبيا ، وهذا الوضع يعطى متخذ القرار درجة عالية من الثقة فى الحل الأمثل الذى تم التوصل اليه .

ثانيا : تحليل التغيرات فى طاقة الموارد:

Analyzing Changes In the Resource Capacities

الجزء الثاني من تحليل الحساسية هو الذى يتناول تأثير التغيرات في طاقة الموارد ، أو قيم الجانب الايسر لقيود المشكلة ، وهو مانطلق عليه في كثير من الأحيان ثوابت القيود ، بمعنى تحليل حساسية الحل الأمثل للتغيرات في مقدار الموارد المتاحة لسبب أو لآخر ، كوجود نقص مؤقت وغير متوقع في الطاقة الآلية لانقطاع التيار الكهربائي او لاحتياج الآلات الى قطع غيار ، أو لاعطال غير متوقعة . أو لأى سبب يترتب عليه تغير فى تلك الطاقات . والادارة تريد ان تقف تماما على تأثير هذا النقص فى الطاقة على الحل الامثل ، أو تأثير الزيادة المؤقتة فى الطاقة والتي يمكن احداثها عن طريق التشغيل لاوقات اضافية أو ورديات عمل اضافية .

وفيما يلى نوضح كيف يمكن استخدام جدول السمبلكس الاخير (الحل الأمثل) في تحليل آثر التغيرات في طاقة

الموارد المتاحة • ولهذا الغرض فاننا سوف نعود ثانيا الى تصوير جدول السمبلكس الاخير للمشكلة التى كنا نعالجها في بداية هذا الفصل والذى كان يأخذ الشكل التالى :

جدول السمبلكس الاخير (الحل الأمثل)

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٢٠٠٠	٥٠٠٠	٤٠٠٠	٢٠٠٠	صفر	صفر	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦	س ٧	س ٨
٥٠٠٠	س ٢	٢٨ $\frac{٢}{٥}$	صفر	١	صفر	$\frac{٣}{٥}$	$\frac{١}{٢٥}$	صفر	$\frac{٤}{٥}$	$\frac{٦}{٥}$
صفر	س ٦	١٩٦	صفر	صفر	صفر	−٢	−$\frac{٤}{٥}$	١	٤	−١٢
٢٠٠٠	س ١	٥	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	−١	صفر
٤٠٠٠	س ٣	٣	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	−١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٢٠٠٠	٥٠٠٠	٤٠٠٠	٣٠٠٠	٢٠٠	صفر	٢٠٠٠	٢٠٠٠
	١٦٤٠٠٠	صافى التغير	صفر	صفر	صفر	−١٠٠٠	−٢٠٠	صفر	−٢٠٠٠	−٢٠٠٠

وبطبيعة الحال فان تحليل التغيرات في طاقة الموارد تتعامل بصفة أساسية مع كل من المتغيرات التي تمثل الطاقات العاطلة (المتغيرات الراكدة) ،وكذلك المتغيرات التى تمثل الزيادة في طاقات الموارد (المتغيرات المضافة) لمقابلة الاحتياجات ، أي ان تحليل حساسية طاقة الموارد تتم من خلال المتغيرات الراكدة Slack Variables والمتغيرات المضافة Surplus Variables والتى يتضمنها كل قيد من قيود المشكلة . وفيما يلى تناول تحليلنا لهذين النوعين من المتغيرات مبتدئين بالمتغيرات الراكدة ثم نتبعها بتحليل المتغيرات المضافة .

(١) المتغيرات الراكدة Slack Variables

سبق أن تناولنا ماذا تعنى المتغيرات الراكدة وذلك عند التعرض لخطوات حل نماذج البرمجة الخطية ، وذكرنا ان المتغير الراكد هو ذلك المتغير الذى يتم اضافته الى الجانب الايمن للقيد ($\geq$) وذلك لتحويل القيد من متباينة الى معادلة ،وان المتغير الراكد يمثل الطاقة غير المستغلة فى ذلك القيد .

وفي المثال الذى نحن بصدده الآن نتذكر اننا قمنا بتحويل المتباينتين الاولى والثانية واللتان كانت اشارتهما ($\geq$) باضافة متغير راكد لكل منهما لتحويلهما الى معادلتين ، فلقد اضفنا الى المتباينة الاولى المتغير الراكد س ٥ ، وهو المتغير الذى تضمنته معادلة قسم التصنيع (٢٠س١ + ٢٥س٢ + ٣٠س٣ + ١٥س ٤ + س ٥ = ٩٠٠) .

وكذلك أضفنا الى المتباينة الثانية المتغير الراكد س ٦ ، وهو المتغير الذى تضمنته معادلة التجميع (٢٠س١ + ٢٠س ٢ + ١٢س ٣ + ١٠س٤ + س ٦ =٩٠٠) .

ويمكننا اختبار حساسية الحل الأمثل للتغيرات في طاقات قسم التصنيع ، وقسم التجميع بتحليل وضع المتغير الراكد بكل قيد من القيود الممثلة لتلك الطاقات .

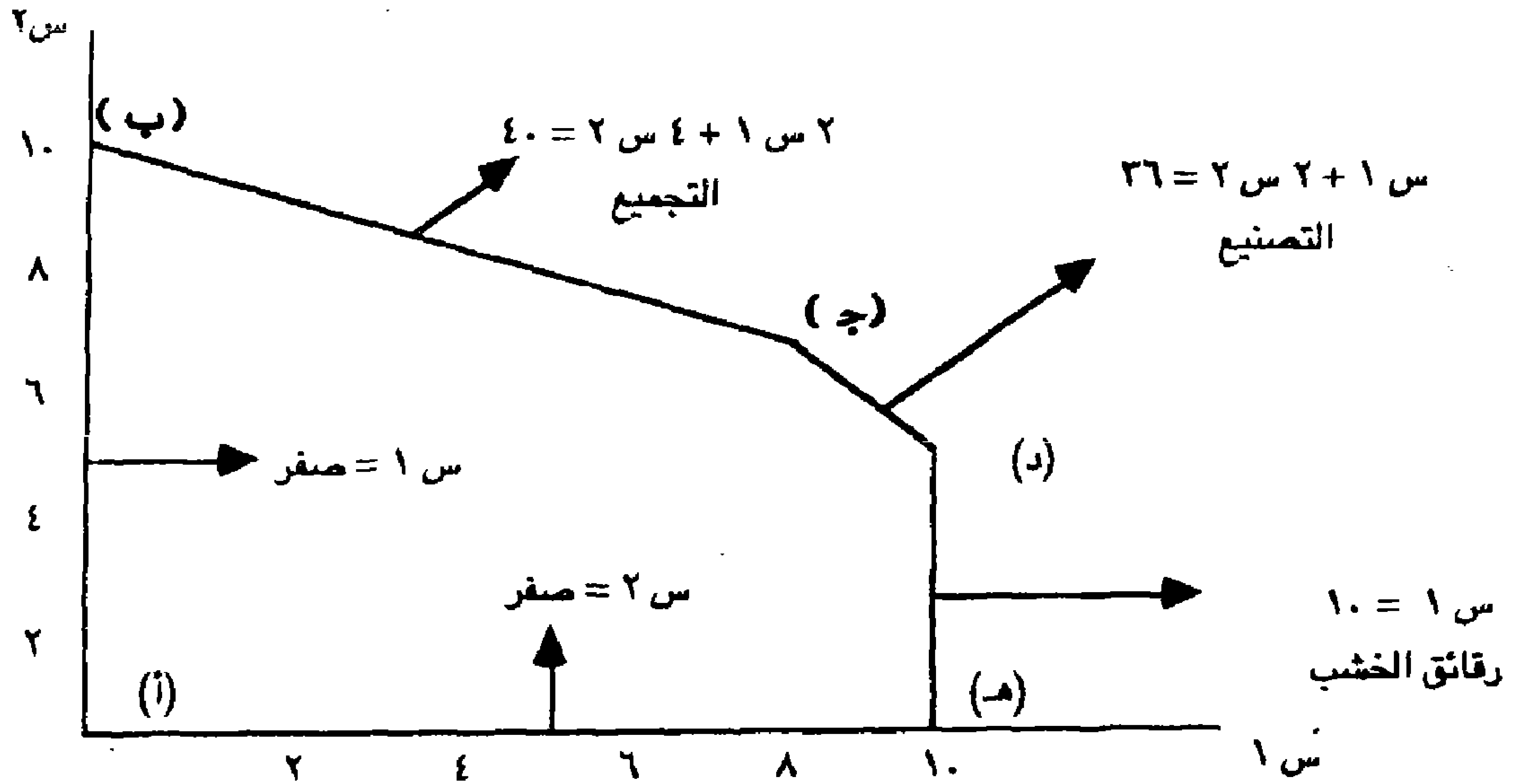
الا انه يتبين من جدول الحل الأمثل السابق أن وضع كل من المتغيرين الراكدين س٥ ، س٦ يختلف عن بعضها البعض ، ففى حين ظهر المتغير الراكد س٦ كمتغير اساسي ، ظهر المتغير س٥ كمتغير غير اساسي . ولهذا ولأغراض التحليل يتعين تناول كل منهما على حدة بسبب الصفة التى يتسم بها كل منهما ، ونتناول أولا حالة المتغير الراكد الاساسى (س٦) .

أ - المتغيرات الراكدة الاساسية Basic Slack Variables

حيث ان المتغيرات الراكدة بصفة عامة تمثل مقدار الزيادة في الطاقة ، او الطاقة غير المستغلة بذلك القيد ، وظهور المتغير الراكد كمتغير أساسى بالحل الامثل يعنى بالفعل وجود طاقة عاطلة وغير مستغلة في القيد الذى أضيف اليه هذا المتغير الراكد ،وحيث أن المتغير الراكد (س٦) ظهر كمتغير اساسى بجدول الحل الامثل وبقيمة مقدارها ١٩٦ ساعة فان ذلك يعني ان هناك طاقة غير مستغلة في طاقة التجميع التى يمثلها هذا المتغير ، اذن المنطق يحتم ان نعترف بحقيقة انه طالما ان طاقة التجميع يوجد بها حاليا طاقة عاطلة غير مستغلة مقدارها ١٩٦ ساعة يمثلها المتغير الراكد الاساسى (س٦) ، فان أي اضافة لطاقة قسم التجميع لن تؤدى الى ان يفقد الحل امثليته ، ولكن الأثر الذي ستتركه هذه الزيادة هو زيادة مقدار الطاقة العاطلة عما هي عليه حاليا ، أي زيادة قيمة المتغير الراكد (س٦) بذلك المقدار الاضافي للطاقة ،فاذا اضفنا ١٠ ساعات مثلا زيادة الى طاقة قسم التجميع فأصبحت ٩١٠ساعة بدلا من ٩٠٠ ساعة ،فان الحل الأمثل لن يتغير ، ولكننا

سنجد ان قيمة المتغير الراكد الاساسي (س ٦) سترتفع من ١٩٦ ساعة الى ٢٠٦ ساعة ، وهذه الزيادة تمثل الساعات الاضافية التى زيدت بها الطاقة الاصلية لقسم التجميع •

ويمكن ان نقرب هذا المفهوم ونوضحه أكثر اذا ما قمنا بتصوير ذلك الأمر بيانيا • يذكر القارئ عندما تناولنا الاسلوب البياني لحل مشاكل البرمجة الخطية، وقمنا بحل مثال بسيط يتناسب مع هذا الاسلوب ، وكان يمثل مشكلة شركة القاهرة للصناعات الهندسية ، وكانت تنتج منتجين هما : س ١ ، س ٢ ولديها ثلاث قيود على الانتاج هي قيد تصنيع ، قيد تجميع ، قيد رقائق الخشب ، وكانت صورة المشكلة بعد تمثيلها بيانيا كالآتي :



ووجدنا ان نقطة الحل الأمثل هى النقطة (ج) وفيها يتم انتاج ٨ وحدات من س ١ ، ٦ وحدات من س ٢ ، وتوجد وحدتين فائضتين من رقائق الخشب ، أي أن هناك زيادة فى عدد رقائق الخشب أكثر مما يتطلبه الانتاج ، اي هناك

طاقة فائضة أو عاطلة . وهذا معناه ان طاقة القيد لم تستنفذ بالكامل ، فماذا يكون عليه الوضع فرضا لو قمنا بشراء المزيد من رقائق الخشب وأصبح لدينا المزيد المتوافر منها ، هل هذا يجعل الحل الأمثل ينتقل من النقطة (ج) الى نقطة طرفية اخرى ، لو قمنا بتخيل ذلك بيانيا وزدنا عدد الوحدات المتاحة من رقائق الخشب الى ١٢ وحدة مثلا ، عندئذ فان الخط المستقيم الممثل لرقائق الخشب سيتحرك يميناً الى مستوى ١٢ وحدة ، سنجد ان نقطة الحل الامثل لم تتأثر بسبب انها نقطة تقاطع قيد التصنيع وقيد التجميع ومن ثم تتأثر بأي زيادة في أي منهما ولكنها لاتتأثر بزيادة رقائق الخشب . أي انه يمكن ان نصل الى القاعدة التالية :

قاعدة :

" اذا كانت طاقة القيد المتاحة لم تستنفذ بكاملها في الحل الامثل فإن أي زيادة في طاقة ذلك القيد لن تؤثر على امثلية الحل." .

وحيث ان المتغير الراكد الاساسي ($س_{٦}$) يمثل وجود طاقة غير مستغلة فى مثالنا هذا مقدارها ١٩٦ساعة فى قسم التجميع فان هذا يعنى ان طاقة قسم التجميع لم تستنفذ بكاملها وبناء على القاعدة السابقة فان أي زيادة فى طاقة ذلك القيد لن تؤثر على امثلية الحل .

هذا بالنسبة لحدود الزيادة ،أما مايتعلق بحدود التخفيض في طاقة القسم الذى يوجد به فائض في الطاقة هل يمكن ايضا ان تنخفض بلا حدود دون أن يتغير الحل الأمثل ؟ للاجابة على ذلك فلنلق نظرة على الرسم البياني السابق ، ولنرى ماهو آثر تخفيض وحدات رقائق الخشب عما هي عليه (١٠ وحدات حاليا) ،ان تخفيض عدد وحدات رقائق الخشب بمثابة انتقال خط رقائق الخشب فى اتجاه نقطة الحل الامثل ، اذ يمكن تخفيضه ليصل الى ٩ وحدات

دون تأثير ، والى ٨ وحدات • وفى هذه الحالة سيمر بنقطة الحل الأمثل ، ولكن ماذا لو زدنا التخفيض عن وحدتين • فمثلا أصبحت عدد وحدات رقائق الخشب سبعة فقط ، ان ذلك معناه خروج النقطة ج من منطقة الحلول الممكنة أي انها فقدت أمثليتها وستظهر نقطة حل أمثل آخرى • وهذا يعنى ان الحد الاقصى للانخفاض فى طاقة رقائق الخشب هو عدد ٢ وحدة فقط ، أما اذا انخفضت بما يزيد عن ذلك فان الحل الأمثل سيتغير حتما ، وهذا يدعونا أن نضع القاعدة التالية :

قاعدة :

" اذا لم تستنفذ طاقة القيد بكاملها فى الحل الامثل ،فان عدد الوحدات التى لم تستغل تمثل الحد الاقصى الذي يمكن أن تنخفض به طاقة ذلك القيد دون أن يفقد الحل أمثليته•" •

وبالانتقال الى جدول السمبلكس الاخير الحالي فان التساؤل هو : ماهو ذلك القدر الذى يمكن ان تنخفض به طاقة التجميع دون أن يتغير الحل الأمثل ؟ للاجابة على ذلك نقول انه قد اتضح ان طاقة هذا القسم لم تستنفذ بالكامل فى الحل الأمثل ، ولهذا ظهر المتغير الراكد المتعلق بهذا القيد ($س_٦$) كمتغير أساسي بقيمة مقدارها ١٩٦ ساعة ، أي أن الطاقة العاطلة غير المستغلة بقسم التجميع ١٩٦ ساعة ، وعليه يمكن تخفيض طاقة هذا القسم بهذا العدد من الساعات دون ان يتغير الحل الأمثل ولن نتمكن من اجراء تخفيض أكثر من ذلك ، لأنه لو حدث سيجعل المتغير $س_٦$ وهو متغير أساسي يأخذ قيمة سالبة ، وهذا بطبيعة الحال وضع غير ممكن لأن المتغيرات الراكدة السالبة القيمة تمثل استخدام قدر يزيد عن طاقة المورد المتاح ، وهذه حالة تخيلية وغير ممكنة واقعيا •

وتلخيصاً لما تقدم يمكن وضع القاعدة التالية :

" اذا كان المتغير الراكد متغيرا أساسيا في جدول الحل الأخير ، فان طاقة القيد الذى يتضمن هذا المتغير يمكن ان تزيد بأي مقدار ،أو تنخفض بمقدار يعادل قيمته فى جدول الحل الأخير دون ان تتغير أمثلية الحل بذلك الجدول."

وتطبيقا لتلك القاعدة على حالة المتغير الراكد الاساسي ($س_٦$) ، يمكن القول بأن الحل الذى يمثله الجدول الاخير يظل أمثلا مهما زادت طاقة التجميع المتاحة ،أو انخفضت بحيث لاتقل عن ٧٠٤ ساعة ، وهي تعادل الطاقة المتاحة حاليا بهذا القسم وهى ٩٠٠ ساعة مخصوما منها الحد الاقصى للتخفيض وقدره ١٩٦ ساعة (٩٠٠ – ١٩٦ = ٧٠٤ ساعة).

ب) المتغيرات الراكدة غير الاساسية

Non Basic Slack Variables

يظهر من جدول السمبلكس الاخير السابق ان المتغير الراكد ($س_٥$) وهو المتغير المتمم لقيد طاقة التصنيع انه متغير راكد غير أساسي ، حيث أنه لم يظهر تحت عمود المتغيرات الاساسية ،وعليه فانه غير أساسي ذات قيمة صفرية ، وهذا يعنى ان كامل طاقة التصنيع قد استغلت فى انتاج المتغيرات القرارية الأساسية ($س_٢$ ، $س_١$ ، $س_٣$) ، ولاتوجد طاقة عاطلة فى هذا القسم ،وبناء على ذلك فان أي زيادة أو انخفاض في طاقة التصنيع سوف تؤدى الى تغيير قيم تلك المتغيرات الاساسية وهذا معناه ان الحل بالجدول الأخير سيفقد امثليته ويحتاج الى الدخول فى جولة تالية للحل بغرض الوصول مرة أخرى الى حل آمثل جديد .

وقبل الدخول فى تفاصيل التحليل من واقع جدول السمبلكس ،فقد يكون من المفيد آن نلقى نظرة سريعة

على مغزى مقدمة هذا الجزء بالتطبيق على الشكل البياني السابق لنقف فعلا على هذه الحقيقة التى أظهرتها السطور السابقة .

اذ بمراجعة الرسم البياني السابق والذى اتضح منه قبل ذلك انه يمكن لخط قيد رقائق الخشب أن يتحرك يمينا (فتزاد قيمته) بلا تأثير ، وان تنخفض قيمته أي يتحرك الى اليسار ولكن بحد اقصى وحدتين، والسؤال الآن وماهو الوضع بالنسبة لقيد التصنيع أو قيد التجميع؟ لقد تبين ان الحل الامثل فى النقطة (جـ) وهي نقطة تقاطع خطي التصنيع والتجميع وطاقتهما عند هذه النقطة مستغلة بكاملها ، فاذا حدث ان زادت أو انخفضت طاقة التصنيع بأي مقدار فان نقطة التقاطع ستتغير اي أن الحل الأمثل سيتغير ، كذلك الامر بالنسبة لطاقة التجميع فأى زيادة أو أي انخفاض سيترتب عليه وعلى الفور أن يفقد الحل الحالى امثليته . وهذا بلاشك واضح تماما من الرسم البياني ويؤكد ماقلناه في بداية هذا الجزء .

وعودة مرة اخرى الى جدول السمبلكس الأخير لنواصل تحليلنا ، اذ انه من المفيد بعد أن تيقنا بأن أي زيادة أو انخفاض فى طاقة قسم التصنيع (المستغلة بكاملها) سيترتب عليها ان يفقد الحل الحالى امثليته ، ان يمتد بنا التحليل لنحدد الحد الاقصى والحد الأدنى لزيادة أو انخفاض تلك الطاقة والتى لن تؤثر على المزيج الانتاجى (بصرف النظر عن كمية كل منها فى هذا المزيج) ، وبمعنى آخر فاننا نتساءل بأى مقدار يمكن ان تتغير طاقة التصنيع (صعودا أو هبوطا) قبل أن يحل أحد المتغيرات غير الاساسية ، محل بعض المتغيرات الاساسية الحالية ؟

ان الاجابة على هذا التساؤل الهام والضروري لمتخذ القرار ، تتطلب أولا تمهيدا لتوضيح وتفسير معنى

معاملات القيد فى عمود المتغير الراكد غير الأساسي ($س_٥$) ، وعلاقاتها بقيم الحل للمتغيرات الأساسية المقابلة لكل منها . فمن الجدول الأخير للحل يمكن نقل الاعمدة الثلاثة التالية بغرض هذا التوضيح .

المتغيرات الاساسية	القيم
$س_٢$	$\frac{٢}{٥}$ ٢٨
$س_٦$	١٩٦
$س_١$	٥
$س_٣$	٣

$س_٥$
$\frac{١}{٢٥}$
$-\frac{٤}{٥}$
صفر
صفر

ان كل معامل فى عمود ($س_٥$) يمثل مقدار ماسيتم التخلى عنه من المتغير الاساسي المقابل لهذا المعامل وذلك مقابل زيادة مقدارها وحده واحدة للمتغير الراكد غير الاساسي ($س_٥$) ، مع ملاحظة ان العامل الموجب يشير الى مقدار التخفيض الذى يحدث فى المتغير الاساسى اذا ماتم زيادة المتغير غير الأساسي ($س_٥$) ، بمقدار وحدة واحدة ، أما المعامل السالب فانه يمثل العكس ، ولتوضيح ذلك بصورة أبسط ، نقول ان زيادة المتغير $س_٥$ بمقدار وحدة واحدة معناه زيادة الطاقة العاطلة للقسم الذى يمثله ذلك المتغير ،وزيادة الساعات العاطلة بمقدار وحدة واحدة ، نجد أنه يتسبب فى تخفيض كمية انتاج المتغير القراري الاساسي ($س_٢$) بمقدار $\frac{١}{٢٥}$ وحدة ، كما يؤدى الى زيادة الطاقة العاطلة والتي يمثلها المتغير الاساسى ($س_٦$) بمقدار $\frac{٤}{٥}$ وحدة ، اذن الاشارة الموجبة تعنى تخفيض المتغير الاساسى ،والاشارة السالبة تعنى الزيادة للمتغير الاساسي .

وعلى ذلك يمكن ان ننظر الى التغيرات في طاقة التصنيع كزيادة او نقص في قيمة المتغير الراكد (س ٥)، فمثلا ماذا يحدث لو انخفضت طاقة التصنيع الى ٨٠٠ ساعة بدلا من ٩٠٠ كما هي الآن ؟ ان ذلك معناه ان المتغير الاساسي (س ٢) سينخفض بمقدار ٤ وحدات عما هو عليه في الجدول الأخير (١٠٠ × $\frac{١}{٢٥}$ = ٤ وحدة) أي تصبح س٢ ٢٤ $\frac{٢}{٥}$ وحدة (٢٨ $\frac{٢}{٥}$ − ٤ = ٢٤ $\frac{٢}{٥}$) ، وبالمثل اذا زادت طاقة التصنيع بمقدار ١٠٠ ساعة عما هي عليه ، أي كانت ١٠٠٠ ساعة ، فان القيمة الاخيرة للمتغير الأساسي س ٦ ستنخفض بمقدار ٨٠ وحدة (− ١٠٠ × − $\frac{٤}{٥}$ = ٨٠ وحدة) أي ستصبح ١١٦ بدلا من ١٩٦.

استطعنا الآن بعد التوضيح السابق ان نقف على الأثر الذى يتسبب عن زيادة أو تخفيض المتغير الراكد غير الاساسى بوحدة واحدة على المتغيرات الاساسية وكيف يكن حساب هذا الاثر ، ولذلك واستنادا الى هذا الفهم سنمضى فى التحليل الذى نريد ان نقف منه على الحد الاقصى للتغيرات فى طاقة التصنيع، والتى لن تؤدى الى تغير وضع المتغيرات الاساسية، وان كانت ستتغير قيمة كل منها نتيجة هذا التغيير، ولكن نريد الا يصل هذا التغيير الى الحد الذى تتغير فيه صفة هذه المتغيرات الاساسية، بل ان ينقلب احدها مثلا ليصبح غير اساسي هذا طبعا اذا وصلت قيمته الى الصفر .

كما رأينا قبل ذلك فان تخفيض طاقة التصنيع بساعة واحدة سيتسبب فى تخفيض المتغير الاساسى (س ٢) بمقدار $\frac{١}{٢٥}$ وحدة ، ويمكن تخفيض طاقة التصنيع الى الحد الذى لاتصبح معه قيمة (س ٢) سالبة حتى لايتغير المزيج الانتاجي من المتغيرات القرارية الاساسية الحالية ،وعلى ذلك يمكن حساب الحد الاقصى الممكن ان يتم به تخفيض ساعات التصنيع ، عن طريق تحديد الحجم الذى يمكن أن تنخفض به طاقة التصنيع والتى تجعل قيمة المتغير س ٢ صفرية ، ومن ثم فان اى تخفيض زيادة عن ذلك الحد

سيدفع بقيمة $س_{٢}$ ان تأخذ قيمة سالبة .

فاذا افترضنا ان (ب) تمثل الحد الاقصى للتغير في طاقة التصنيع الاصلية ، اذن يمكننا ان نحصل على قيمة (ب) طبقا للمعادلة التالية :

$$ب = - \frac{٢٨ \frac{٢}{٥}}{\frac{١}{٢٥}} = - \frac{١٤٢}{٥} \times \frac{٢٥}{١} = - ٧١٠$$

ويلاحظ انه من الضرورى وضع الاشارة السالبة في المعادلة حتى يمكن ان تشير القيمة النهائية الناتجة من تطبيق المعادلة الى الاتجاه الصحيح للتغير الممكن، ولذلك فانه وفقا للنتيجة السابقة ،فان طاقة التصنيع لايمكن ان تنخفض أكثر من ٧١٠ ساعة حتى تظل المتغيرات الاساسية مثالية .

وحيث اننا مازلنا لدينا اربعة متغيرات اساسية ($س_{٦}$،$س_{٩}$،$س_{٢}$،$س_{٣}$) ، ولقد سبق حساب اثر التغير في الطاقة على المتغير الاساسي ($س_{٢}$) ،فيتبقي اذن ثلاثة منها ، الا أننا نلاحظ ان اثنتين منها لها قيم صفرية بعمود ($س_{٥}$) وهذا يشير الى انهما لايتأثران اطلاقا بطاقة التصنيع ارتفاعا أو انخفاضا ولهذا فلاداعي لاجراء اي عمليات حسابية لهما ، لذلك يستلزم الامر حساب هذا التغير للمتغير الاساسي ($س_{٦}$) وفقا للمعادلة التالية :

= قيمة الحل الاخير للمتغير الاساسي / معامل قيد ذلك المتغير الاساس بعمود التغير غير الأساسي

$$= - \left(\frac{١٩٦}{- \frac{٤}{٥}}\right) = - ١٩٦ \times - \frac{٥}{٤} = ٢٤٥$$

ومعنى ذلك ان الحد الاقصى للزيادة في طاقة قسم التصنيع (لاحظ الاشارة الموجبة) هي ٢٤٥ ساعة دون ان يتغير وضع المتغيرات الاساسية .

خلاصة ماتقدم ان النتائج التى تم التوصل اليهـا تبين بوضوح انه يمكن ان تنخفض طاقة التصنيع الى ١٩٠ ساعة (٩٠٠ – ٧١٠) ، أو تزيد الى ١١٤٥ ساعة (٩٠٠+ ٢٤٥) دون ان يتغير وضع المتغيرات الاساسية بالجدول الأخير وان كانت قيمها ستتغير .

ولكن ماهو الموقف اذا وجدنا اكثر من قيمةللمعامل (ب) باشارة سالبة ، واكثر قيمة لها باشارة موجبة، أي اكثر من حد سالب و / أو اكثر من حد موجب في طاقة التصنيع ؟ اذا واجهنا هذا الموقف وكنا نريد آن نحدد حدا اقصى للزيادة وكذلك للانخفاض ، فانه ينبغيان نختار أصغر تغير موجب وأصغر تغير باشارة سالبة واعتبارهما كقيود على تغيرات الطاقة وذلك باعتبارهما قيودا اكثر تحديدا ، فمثلا اذا وجدنا ان قيم (ب) للمتغيرات الاساسية كالآتي :

– ٧١٠ ، + ٢٤٥ ، – ١٤٠ ، + ٥٠

عندئذ يمكن القول ان طاقة التصنيع يمكن ان تزيد بما لايتجاوز ٥٠ ساعة ، أو تنخفض بما لايزيد عن ١٤٠ ساعة ، وذلك اذا كان المطلوب هو ان تبقى الاوضاع النهائية للمتغيرات الاساسية كما هي فى الجدول الاخير ولا تتغير بأن تصبح غير آساسية .

من ناحية آخرى ، نود آن نؤكد هنا مرة آخرى ،ان الحدود السابقة وان كانت تبقى الاوضاع النهائيةللمتغيرات الاساسية كما هى مثلى (نفس نوعية المزيج الانتاجي) ، الا أن ذلك لايعنى ان تظل قيمة الهدف علىماهي عليه في الجدول الأخير ، لأنه سبق القول أن آي تغيير بالزيادة أو الانخفاض سوف يؤدى الى تغيير قيم تلك المتغيرات الاساسية والحدود التي ذكرناها تبقى فقط على نوعية المزيج الانتاجي الاخير ولكن لاتبقى على قيم المتغيرات القرارية المثلى لذلك المزيج ، لذلك فان قيمة دالة

الهدف لابد وان تتغير .

مثال تطبيقي :

بفرض ان طاقة التصنيع قد زادت الى ١١٤٥ساعة بدلا من ٩٠٠ ساعة وذلك عن طريق تشغيل قسم التصنيع وقتا اضافيا ، فما هي القيم المثلى الأخيرة التى ستأخذها المتغيرات الاساسية ؟ وماهو الحد الاقصى الذى تقبل أن تدفعه المنشأة نظير ذلك الوقت الاضافي . ؟

الحل :

حيث ان طاقة التصنيع ستزداد من ٩٠٠ ساعة الى ١١٤٥ ساعة ، اذن مقدار الزيادة في الطاقة= ١١٤٥ – ٩٠٠ = ٢٤٥ ساعة .

ولايجاد قيم المتغيرات الاساسية بعد هذه الزيادة يتم ضرب مقدار هذه الزيادة فى كل معامل من معاملات المتغيرات الاساسية بعمود (س$_{٥}$) وهو المتغير الراكد المتمم لقيد التصنيع ، ويضاف حاصل الضرب الى قيمة المتغير الاساسي الحالية.

∴ قيمة س$_{٢}$ بعد هذا التعديل = ٢٨ $\frac{٢}{٥}$ + (٢٤٥x $\frac{١}{٢٥}$)= ٣٨ $\frac{١}{٥}$

وبالمثل فان قيمة س$_{٦}$ بعد هذا التعديل =١٩٦ +(٢٤٥x – $\frac{٤}{٥}$)
= صفر

أما قيمة س$_{١}$ ،س$_{٢}$ فلا تتغير لأن معاملها بعمود(س) = صفر

ومن ثم فان قيمة دالة الهدف ايضا ستصبح بعد هذا التعديل:
= ١٦٤٠٠٠ + ٢٤٥ ($\frac{١}{٥}$ x ١٠٠٠) = ٢١٣٠٠٠ جنيه

ومعنى ذلك ان زيادة طاقة التصنيع بما مقداره ٢٤٥ ساعة سيؤدى الى زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار٤٩٠٠٠جنيه (٢١٣٠٠٠ – ١٦٤٠٠٠) ، وبناء على ذلك فان الحد الاقصى الذى تقبل الشركة دفعه مقابل وقت اضافي مقداره٢٤٥ ساعة هو ٤٩٠٠٠ جنيه أي ٢٠٠ جنيه للساعةالواحدة ($\frac{٤٩٠٠٠}{٢٤٥}$ = ٢٠٠ جنيه).

(٢) المتغيرات المضافة Surplus Variables

بعد ان استعرضنا فى السطور السابقة المتغيرات الراكدة ، سنتناول فيما يلى المتغيرات المضافة ،ونود آن نؤكد من البداية ان طريقة معالجة المتغيرات المضافة لاتختلف عن الطريقة التى عالجنا بها المتغيرات الراكدة ، وكل الاختلاف هو تفسير تلك التغيرات ، اذ يتم اضافة المتغير المضاف الى كل قيد أكبر من أو يساوى ($\geq$) ، وذلك ليمثل الحد الادنى للزيادة عن المطلوب (طاقة القيد) وحيث أننا نتناول اختبار حساسية طاقة القيود ، لذلك لابد من تناول تحديد تأثيرات التغيرات فى تلك الحدود الدنيا ، من ناحية اخرى فقد يظهر من الجدول الأخير أن المتغير المضاف قد اخذ صفة المتغير الاساسي، أو صفة المتغير غير الاساسي ، لذلك يختلف التحليل باختلاف الصفة التي أكتسبها المتغير المضاف ، وفيما يلى نتناول كلا النوعين من المتغيرات المضافة .

١) المتغيرات المضافة الأساسية

Basic Surplus Variables

اذا تبين ان المتغير المضاف قد ظهر في جدول الحل الاخير كمتغير اساسي ،فان هذا يعنى ان القيمة التي اخذها ذلك المتغير في جدول الحل الاخير تعادل الزيادة أو الفائض الناتج من ذلك الحل عن الحد الادنى للاحتياجات المطلوبة ،لذلك فان اي تخفيض فى مستوى هذا الحد الادنى للاحتياجات لن يؤثر على الحل الاخير،وسيظهر أثر التخفيض في طاقة القيد على قيمة المتغير المضاف الاساسي القابل لهذا القيد وبمقدار ذلك التخفيض .

فمثلا اذا كان هناك قيد بأن يكون حجم انتاج المنتج ($س_1$) لايقل عن ٥ وحدات ، ثم تبين ان الحل الأمثل قد تخطى هذا الحجم بانتاج ٧ وحدات ، عندئذ سنجد أن المتغير المضاف المقابل لهذا القيد ستكون قيمته ٢ وحدة ، بمعنى ان هناك زيادة أو فائض عن الحد الادنى المطلوب ،

في هذه الحالة نقول ان أي تخفيض في طاقة القيد الممثل لهذا الحد الادنى لن يؤثر على الحل الأخير، لأن هذا التخفيض لن يعمل الا على زيادة المتغير المضاف الاساسي عما هو عليه وهذا لن يؤثر على امثلة الحل .

ومن ناحية اخرى فان زيادة الحد الادنى للاحتياجات (طاقة القيد) ، ستؤدى بلا شك الى انخفاض في قيمة المتغير المضاف الاساسي ، ومن ثم فان الحد الاقصى لزيادة طاقة هذا القيد (الحد الادنى للاحتياجات) لايتعين أن تزيد عن قيمة المتغير المضاف في الجدول الاخير، اذ انها لو زادت بأكثر من ذلك ، أي بأكثر من قيمة المتغير المضاف الاساسي فان هذا يؤدى الى ان تصبح قيمة المتغير المضاف الاساسي بالسالب لأن مقدار الانخفاض كان أكبر من قيمته الحالية ، وهذا غير جائز .

وتأسيسا على ماتقدم يمكن وضع القاعدة التالية :

<u>قاعدة</u> :

" <u>يمكن تخفيض مستوى الحد الادنى للاحتياجات بأحد القيود (طاقة القيد) بأي مقدار، او زيادته بحد أقصى بمقدار قيمة المتغير المضاف الاساسي المقابل لهذا القيد بجدول الحل الاخير ، دون أن يؤثر ذلك على أمثلية هذا الحل</u> " .

وبالنظر الى الجدول الاخير يتبين انه لم يظهر به اي متغير مضاف اساسي، ولهذا سنكتفي بالتحليل والقاعدة السابقة فى التعامل مع هذه النوعية من المتغيرات حينما تظهر في جدول السمبلكس الأخير ، ومن ثم ننتقل في تحليلنا التالى الى المتغيرات المضافة غير الاساسية .

<u>ب) المتغيرات المضافة غير الاساسية</u>

Nonbasic Surplus Variables

تتشابه طريقة تحليل المتغيرات المضافة غير الاساسية مع الطريقة التى سبق ان اتبعناها فى تحليل المتغيرات

الراكدة غير الاساسية . اذ أن المتغير عندما يكون متغيرا غير أساسيا فى جدول الحل الامثل فان ذلك يعنى ان قيمته صفر ، وهذا يعنى بطبيعة الحال ان الحد الادنى المطلوب للقيد الذى يوجد به هذا المتغير المضاف قد تم تحقيقه تماما دون زيادة أو نقصان ، ونتيجة لذلك فان أي زيادة أو أي انخفاض للحد الادنى المطلوب لهذا القيد حتما سيؤدى الى حدوث تغييرات فى الحل الأخير. وسيكون اهتمامنا فيما يلي منصب على تحديد حدود التغيرات التى بعدها يترتب عليه تغير وضع المتغيرات الاساسية ، أو بمعنى آخر .... ماهي حدود التخفيض مثلا فى الحد الادنى للقيد دون أن يصبح أيا من المتغيرات غير الاساسية متغيرات أساسية ؟ وماهى حدود الزيادة كذلك التى تتسبب في ظهور هذه الحالة ؟

للاجابة على هذا التساؤل وبغرض تحديد الحد الأقصى للتغيرات (زيادة أو انخفاضا) المسموح بها للحد الادنى (لطاقة القيد) المقابل لكل متغير مضاف غير آساسي، نحتاج لاختبار تأثير مثل تلك التغيرات فى قيمة المتغيرات الاساسية .

على سبيل المثال ، المتغير المضاف غير الأساسي ($س_٧$) ، والمقابل لقيد تحديد أقل مستوى انتاج من المتغير القراري ($س_١$) بعدد ٥ وحدات ، سنجد أن معاملات القيد الخاصة به ، وكذلك القيم الحالية للمتغيرات الاساسية والمستخرجة من الجدول الاخير هي كالآتي :

المتغيرات الاساسية	القيم	$س_٧$
$س_٢$	$\frac{٢}{٥}$ ٢٨	$\frac{٤}{٥}$
$س_٦$	١٩٦	٤
$س_١$	٥	١-
$س_٣$	٣	صفر

ويتبين من هذه المعلومات وجود علاقة بين المتغيرات

الاساسية $س_٢$ ، $س_٦$ ، $س_١$ مع المتغير المضاف غير الاساسي ($س_٧$) ، ولاتوجد علاقة بين $س_٣$،$س_٧$ ، لذلك سيتركز تحليلنا على اقصى تغيير يمكن أن يحدث في الطاقة الاصلية للقيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي ($س_٧$) على وضع المتغيرات الاساسية جميعها فيما عدا $س_٣$ لعدم وجود علاقة بينهما .

كما سبق القول عند تحليل المتغيرات الراكدة غير الاساسية ، انه يتم حساب قيمة (ع) والتى سنجعلها هنا ترمز للحد الاقصى للتغير فى الحد الادنى للقيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي ($س_٧$) ، ويتم حسابها بنفس الطريقة التى اتبعت من قبل مع اختلاف بسيط هو عدم وضع الاشارة السالبة فى المعادلة وذلك لأن المتغيرات المضافة تمثل المقدار الذى يزيد به القيد بعكس الحال فى المتغيرات الراكدة التي كانت تمثل المقدار غير المحقق للقيد او الطاقة العاطلة او غير المستغلة.

وباستخدام نفس المعادلة التى نستخرج بها قيم (ع) عند كل متغير آساسي سنقوم فيما يلى بحساب قيمة (ع) عند كل متغير اساسى وذلك لاستخلاص حدود التغير للمتغير المضاف غير الاساسي ($س_٧$) .

$$ع \text{ عند } س_٢ = \frac{٢٨ \frac{٢}{٥}}{\frac{٤}{٥}} = \frac{١٤٢}{٥} \times \frac{٥}{٤} = ٣٥ \frac{١}{٢}$$

$$ع \text{ عند } س_٦ = \frac{١٩٦}{٤} = ٤٩$$

$$ع \text{ عند } س_١ = \frac{٥}{-١} = -٥$$

ومن هذه النتائج نستخلص مايلي :

- ان حدود الزيادة فى الحد الادنى للقيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي ($س_٧$) هي $\frac{١}{٢}$ ٣٥ (أصغر قيمة موجبة) ، وبعد هذا الحد يتغير الوضع الأمثل للمتغيرات الاساسية .

- ان حدود التخفيض في الحد الادنى للقيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي (س $_{٧}$) وهي ٥ (الرقم الوحيد السالب) ، وبعد هذا الحد يتغير الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية .

خلاصة ماتقدم انه طالما ان احتياجات القيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي (س $_{٧}$) ليست أقل من صفر (٥ – ٥) ، وليست اكبر من $\frac{١}{٢}$ ٤٠ ($\frac{١}{٢}$ ٣٥ + ٥) وحدة من س $_{١}$ مطلوب انتاجها ، فان الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية سيظل على ماهو عليه دون تغير ، أما المتغيرات التى تتعدى نطاق تلك الحدود فانها ستكون وبالقطع سببا فى تغيير الوضع الأمثل للمتغيرات الاساسية .

وبنفس الاسلوب يمكن حساب حدود المتغيرات في متطلبات القيد الذى يتضمن المتغير المضاف غير الاساسي (س $_{٨}$) ، استنادا على المعلومات التاليةوالمستخرجة من جدول السمبلكس الأخير .

المتغيرات الاساسية	القيم
س $_{٢}$	$\frac{٢}{٥}$ ٢٨
س $_{٦}$	١٩٦
س $_{١}$	٥
س $_{٣}$	٣

س $_{٨}$
$\frac{٦}{٥}$
– ١٢
صفر
– ١

وبذلك تكون قيمة (ع) عند كل متغير أساسي كالآتي :

$$ع \quad \text{عند } س_{٢} = \frac{\frac{٢}{٥}\ ٢٨}{\frac{٦}{٥}} = \frac{١٤٢}{٥} \times \frac{٥}{٦} = \frac{٢}{٣}\ ٢٣$$

$$ع \quad \text{عند } س_{٦} = \frac{١٩٦}{١٢-} = -\frac{١}{٣}\ ١٦$$

$$ع \quad \text{عند } س_{٣} = \frac{٣}{١-} = -\ ٣$$

ومن هذه النتائج نستخلص مايلي :

- ان حدود الزيادة فى الحد الادنى للقيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي ($س_{٨}$) هي $\frac{٢}{٣}$ ٢٣ (الرقم الوحيد الموجب) ، وبعد هذا الحد يتغير الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية .

- ان حدود التخفيض في الحد الادنى للقيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي ($س_{٨}$) هى -٣ (أقل رقم باشارة سالبة) ، وبعد هذا الحد يتغير الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية .

خلاصة ماتقدم انه طالما ان احتياجات القيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي ($س_{٨}$) ليست أقل من صفر (٣ - ٣) ، وليست اكبر من $\frac{٢}{٣}$ ٢٦ ($\frac{٢}{٣}$ ٢٣ + ٣) وحدة من $س_{٣}$ مطلوب انتاجها ، فان الوضع الأمثل للمتغيرات الاساسية سيظل على ماهو عليه دون تغير ، أما المتغيرات التى تتعدى نطاق تلك الحدود فانها ستكون وبالقطع سببا فى تغيير الوضع الامثل للمتغيرات الأساسية .

وفيما يلى جدولا يلخص ويوضح جميع النتائج التي تم التوصل اليها من تحليل حساسية كل من معاملات دالة الهدف ، وطاقة القيود .

معاملات دالة الهدف وقيود النموذج	القيمة الاصلية	اطار التغيير: اقصى تخفيض ممكن	اقصى زيادة ممكنة	الحد الادنى للعنصر	الحد الاقصى للعنصر
دالة الهدف :					
س١	٢٠٠٠	بلا حدود	٢٠٠٠	بلا حدود	٤٠٠٠
س٢	٥٠٠٠	٥٠٠٠/٣	بلا حدود	١٠٠٠٠/٣	بلا حدود
س٣	٤٠٠٠	بلا حدود	٢٠٠٠	بلا حدود	٦٠٠٠
س٤	٢٠٠٠	بلا حدود	١٠٠٠	بلا حدود	٣٠٠٠
طاقة القيود :					
قيد التصنيع	٩٠٠	٧١٠	٢٤٥	١٩٠	١١٤٥
قيد التجميع	٩٠٠	١٩٦	بلا حدود	٧٠٤	بلا حدود
قيد الحد الأدنى للمتغير س١	٥	٥	٣٥ ١/٢	صفر	٤٠ ١/٢
قيد الحد الأدنى للمتغير س٣	٣	٣	٢٣ ٢/٣	صفر	٢٦ ٢/٣

أما مايتعلق باستكمال تحليل حساسية باقى عناصر نموذج البرمجة الخطية ، فانه سيتم تأجيلها قليلا، انتظارا لما يسفر عنه موضوع الثنائية في البرمجة الخطية ، والذى سيكون موضوع الجزء التالي ، ويرجع السبب فى ذلك ان لتحليل ولنتائج المشكلة الثنائية دورا هاما وأساسيا فى تفهم تحليل حساسية باقى العناصر التى لم يشملها التحليل السابق .

* *

الثنائية فى البرامج الخطية

الثنائية في البرامج الخطية

The Dual in Linear Programming

تتعدد المسميات التى تطلق على مضمون هذا الموضوع فقد أمكن حصر هذه المسميات في الآتي :

- الثنائية في البرامج الخطية
- الازدواج فى البرامج الخطية
- المقابل فى البرامج الخطيـة
- المبدول فى البرامج الخطية

وهذا التعدد فى المسميات لايعكس اختلافا فـي المضمون ، ولكنه اجتهاد من الكتاب فى محاولة الوصول الى تسمية تمثل ترجمة للمصطلح الاجنبي Dual وتعكس فى ذات الوقت مفهوم ومضمون المقصود بهذا المصطلح .

وأيا كانت التسمية التى يستخدمها الكتاب في مجال بحوث العمليات ، فان مفهوم الثنائية ، أو الازدواجية أو المقابل ، أو المبدول ، تشير جميعها الى أنه يمكن معالجة اية مشكلة تندرج تحت البرمجة الخطية بطريقتان، الاولى هى النموذج الاصلى للبرمجة الخطية ،والثانية هي تحويل ذلك النموذج الاصلى الى نموذج آخر ثنائي أو مقابل ، أو مبدول ، وبمعنى آخر فان كل مشكلة يمكن أن تأخذ الشكل النمطى لنماذج البرامج الخطية ،تقترن بها مشكلة اخرى مرتبطة بها تماما ، يطلق على المشكلة الاصلية اصطلاح المشكلة الاولية Primal Problem ، أما المشكلة المقترنة بها فيطلق عليها المشكلة الثنائية Dual Problem - وكلا المشكلتين يعتبران مشكلة ثنائية او مقابلة لبعضهما البعض . ويرجع السبب فى ذلك لانهما يتضمنان نفس البيانات ، ويعتبران مرآة عاكسة لبعضهما البعض .

ففي البرمجة الخطية عندما تكون المشكلة الأصلية أو الاولية مشكلة تعظيم أي مشكلة الوصول الى اقصى قيمة لدالة الهدف Maximization ، فان المشكلة الثنائية

لها والمناظرة تماما تكون مشكلة تخفيض ، اي الوصول الى ادنى قيمة Minimization ، وبالعكس كل مشكلة تخفيض لها ازدواج مناظر ينطوى على مشكلة تعظيم ، ويلاحظ أنه اذا كان هناك حلا امثلا ممكنا للمشكلة الأصلية ، فانه بحل المشكلة الثنائية سوف نصل الى نفس الحل الممكن الأمثل .

وهنا قد يتبادر الى ذهن القارئ سؤال منطقي وهو لماذا نحتاج الى التعامل مع المشكلة الثنائية ، طالما ان فى الامكان التوصل الى حل المشكلة التي تواجهنا باستخدام الصياغة الاولية او الأصلية للمشكلة ؟ أو بمعنى آخر انه فى الامكان حل المشكلة الأولية فما الذى يدعو الى التعامل مع وجهها الآخر كمشكلة مقابلة ؟. الحقيقة ان الثنائية في البرمجة الخطية تعتبر مدخلا اقتصاديا هاما ، وبواسطته تستطيع الادارة أن تحصل على حلول للمشاكل متعددة الحلول البديلة . اضافة الى المزايا الهامة التالية :

١- انه يمكن الحصول على معلومات غاية فى الأهمية من خلال نتائج حل المشكلة الثنائية ،خاصة مايمكن ان نطلق عليها معلومات أسعار الظل التى تبنى عليها عملية تحليل الحساسية .

٢- في كثير من الاحيان يكون من الاسهل حل المشكلة الثنائية بدلا من التعامل مع صياغتها الأصلية ، فاذا كانت المشكلة الاصلية بها عدد قليل من المتغيرات ولكنها تحتوى على الكثير من القيود ، فان حل المشكلة الثنائية يقلل كثيرا جدا من العمليات الحسابية المطلوبة حتى الوصول الى الحل الأمثل .

وقد يستطيع القارئ ان يقف على مغزى المشكلة الثنائية ، اذا فسرنا الامور بشكل مبسط وان كان يحتوى على الكثير من الفروض ، فالهدف هو توضيح الفكرة دون

الدخول فى تفصيلاتها . فاذا كانت مثلا شركة أو مؤسسة تعمل فى مجال النقل الجوى الدولي على بعض خطوط الشبكه الجوية العالمية فان هناك تساوى فى اسعار تذاكر السفر بين تلك الشركات على نفس الخط الجوي ، وهذه الاسعار محددة ومعلنة من قبل الاتحاد الدولى للنقل الجوى وهى ملزمة لكل الشركات المنضمة لهذا الاتحاد ، وعلى ذلك فان المنافسة السعرية بمفهومها المجرد تكاد تكون مختفية ، ان مثل هذه الشركات يمكنها أن تضخم أرباحها (بفرض ثبات عدد من العوامل) عن طريق تخفيض تكاليف تشغيل رحلاتها الجوية ،أي أن الهدف هو تعظيم الارباح ، ولكنه سيتم عن طريق تخفيض التكاليف .

من ناحية أخرى فان الصياغة الثنائية تنظر الى المشكلة من منظور مختلف عن الصياغة الأولية أو الاصلية ، فاذا كانت المشكلة الاصلية تتضمن تحقيق أعلى أرباح ممكنة من مزيج الانتاج الذى يتكون من مجموعة من المنتجات ، في حدود مجموعة من الكميات المحدودة من موارد الانتاج (طاقات القيود) ،فان المشكلة الثنائية تحاول أن توجد القيم الدنيا لتلك الموارد والتي تجعل المنتج فى حالة تعادل ،أي في الحالة التى يشعر فيها أنه سيان لديه ان يبيع تلك الموارد عند تلك الاسعار، أو أن يستخدمها في انتاج مزيج الانتاج الامثل .

صياغة وحل المشكلة الثنائية :

وحتى يمكن فهم الطريقتين الاولية والثنائية وفهم العلاقة بينهما ، فاننا سنعود الى المثال الذى سبق استخدامه لشرح وتفسير طريقة الرسم البياني في البرمجة الخطية والخاص بشركة القاهرة للصناعات الهندسية ، ولغرض التسهيل فاننا سنستبعد من هذه المشكلة القيد الخاص برقائق الخشب ، وهذا الاستبعاد لن يؤثر على الحل الامثل لأنه قيد غير محدد فى الحل الأمثل، كما تبين ذلك

عند تحليل حساسية التغير في طاقة القيود، وعلى ذلك فان الصياغة الاولية لتلك المشكلة بعد هذا الاستبعاد ستأخذ الصورة التالية :

دالة الهدف = تعظيم ٧ $س_١$ + ١٠$س_٢$ ـــــ اقصى ارباح

بشرط أن :

٣$س_١$ + ٢$س_٢$ $\geqslant$ ٣٦ (قيد التصنيع)

٢$س_١$ + ٤$س_٢$ $\geqslant$ ٤٠ (قيد التجميع)

$س_١$ ، $س_٢$ $\leqslant$ صفر

وعموما فان صياغة المشكلة الاولية (أو الاصلية) يمكن أن تأخذ أحد اشكال التعظيم (كما في هذا المثال) مثل تعظيم الربح ،أو المساهمة في السوق ،أو تعظيم الحجم ، أو تعظيم الكفاءة أو الفاعلية ،أو قد تأخذ أحد نواحى التخفيض مثل تخفيض التكاليف ، تخفيض التغيب عن العمل ، تخفيض المسافات ، تخفيض الزمن ، تخفيض الاسراف وعند صياغة المشكلة المقابلة فاننا سنستخدم متغيرات جديدة ترتبط بقيود المشكلة الاصلية ، وتكون دالة الهدف في الصياغة الثنائية هى تخفيض اذا كانت المشكلة الأولية احدى صور التعظيم ، والعكس بالعكس .

وتحويل صورة الهدف من تعظيم الى تخفيض أو العكس مهم جدا ،بسبب المنظور الذى تأخذ به المشكلة الثنائية ، فمثلا اذا كانت المشكلة الأولية تتمثل في التوصل الى المزيج الانتاجي الأمثل الذى يصل بالارباح الى حدها الاقصى تحت مجموعة من القيود أو الشروط التي تمثل مجموعة الموارد المتاحة ، فان المشكلة المقابله أو الثنائية تحاول ان تدنى أو تخفض قيمة الموارد المتاحة ولكن أيضا بشروط تتمثل فى أن تكون قيم تلك الموارد المستخدمة هى على الاقل تعادل مساهمة الوحدة من كل منتج ، وهذا ماسبق ذكره في ان المنتج سيرى انه سيان لديه ان يبيع تلك الموارد عند تلك الاسعار ،أو أن

يستخدمها في هذا المزيج الانتاجي .

وبناء على ماتقدم فان خطوات تحويل المشكلة الأولية الى صياغة تمثل النموذج الثنائي هي على الوجه التالي :

١- اذا كانت المشكلة الاصلية أو الأولية هى من النوع الذى يراد جعل دالة الهدف فيها اكبر مايمكن (أي مشاكل تعظيم) ، فان المشكلة الثنائية المقابلة لها تكون من النوع العكسى أي الذى يراد جعل دالة الهدف فيها ادنى مايمكن (أي مشاكل التخفيض) . وتطبيقا لهذه الخطوة على المثال المطروح ذات هدف التعظيم فان الصياغة الثنائية ستكون ذات دالة هدف عكسية بمعى هدف تخفيض ولكن ستتغير المتغيرات المستخدمة فى المشكلة الثنائية وكذلك معاملاتها وهذا سيتضح مع المرور بالخطوات التالية .

٢- عدد المتغيرات في دالة الهدف فى المشكلة الثنائية يساوى عدد القيود (بصرف النظر عن قيود عدم السلبية) في المشكلة الأولية أو الاصلية . وهذا يعنى ان اتجاه دالة الهدف سيتيغر من تخفيض الى تعظيم أو العكس ، كذلك لن تكون عدد متغيرات الدالة هو نفس عددها فى المشكلة الاصلية ولكن عددها سيكون بعدد القيود المفروضة بالمشكلة الاصلية . وحيث انه يوجد بالمثال قيدان، أحدهما يمثل قسم التصنيع ، والآخر يمثل قسم التجميع ، لذلك ستكون عدد المتغيرات بدالة الهدف للمشكلة الثنائية اثنين فقط ،(لاحظ انه قد تم استبعاد قيد رقائق الخشب واذا لم يتم استبعاده ، ستكون دالة الهدف مكونة من ثلاثة متغيرات) . احدهما يمثل القيد الأول ، والثاني يمثل القيد الثاني . حتى هذه الخطوة نكون قد وقفنا على اتجاه دالة

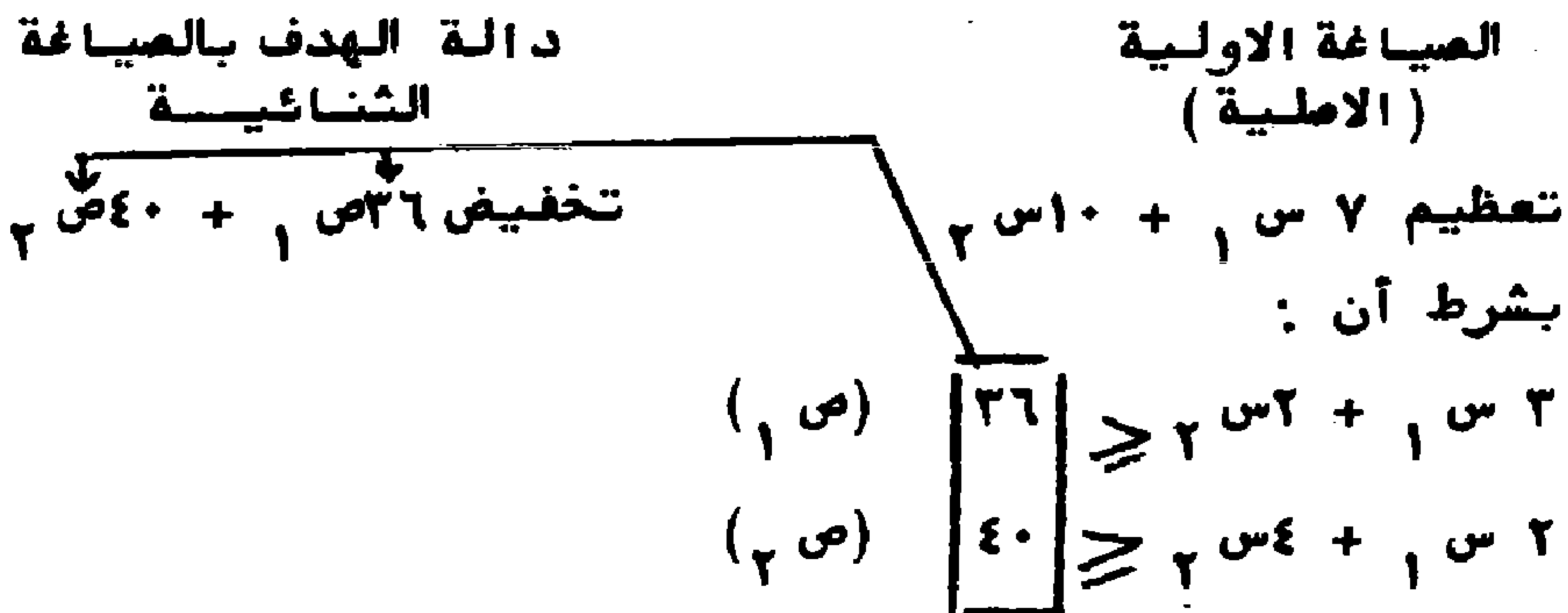
الهدف (تعظيم أو تخفيض) ، وكذلك عدد متغيراتها ولكننا لم نحدد بعد رموز تلك المتغيرات ولا معاملاتها بدالة الهدف وهذا ماسيرد ذكره على التوالي ٠

٣- يتم وضع متغير يمثل كل قيد ،فاذا فرض ان($ص_{١}$) تمثل المتغير المقابل لقيمة طاقة التصنيع ، وان $ص_{٢}$ تمثل المتغير المقابل لقيمة طاقة التجميع ، اذن يكون من المنطقي ان معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمشكلة الثنائية ($ص_{١}$ ،$ص_{٢}$) هي الثوابت الموجودة بالطرف الأيسر للقيود بالمشكلة الاصلية ، أي ان معاملات دالة الهدف فى المشكلة الثنائية فى مثالنا هذا تمثل عدد الساعات المتاحة بكل قسم انتاجي ،فمثلا ($ص_{١}$) معاملة يمثل ساعات التصنيع (٣٦ ساعة)،و($ص_{٢}$) معاملة يمثل ساعات التجميع (٤٠ ساعة) ٠ وعلى ذلك يكون مفهوم ضمنها ان المتغيرات الواردة بدالة الهدف تكلفة الساعة الواحدة فى القسم الانتاجي المعين ٠

واستنادا الى الخطوات الثلاثة السابقة تكون دالة الهدف للنموذج الثنائي للمثال الذى نتعامل معه على الصورة التالية :

$$\text{دالة الهدف} = \text{تخفيض } ٣٦\ ص_{١} + ٤٠\ ص_{٢}$$

والشكل التالي يوضح كيف تم التوصل اليها وصياغتها :



وقبل أن نترك هذا الاجراء يتعين ان نوضح معناه ان دالة الهدف بالصياغة الثنائية بعد هذا الاجراء اصبحت تعمل على تخفيض قيمة طاقة التصنيع وكذلك تخفيض طاقة التجميع ووفقا لهذا المعنى يمكن كتابة دالة الهدف الثنائية بطريقة وصفية كالآتي :

مطلوب الوصول بحاصل الجمع الآتى الى أدنى حد ممكن = (قيمة كل ساعة تصنيع) x (عدد ساعات التصنيع المتاحة) + (قيمة كل ساعة تجميع) x (عدد ساعات التجميع المتاحة) .

٤- بعد الانتهاء من صياغة دالة الهدف ،ننتقل الى قيود المشكلة ، تتطلب المشكلة الثنائية أن يكون هناك قيد واحد مقابل لكل متغير قراري في المشكلة الأولية (بصرف النظر عن المتغيرات الراكدة أو المتغيرات الاصطناعية) ، وحيث انه يوجد بهذا المثال متغيرات ، هما النموذج الاول ($س_1$) ، والنموذج الثاني ($س_2$) ، اذن ستتضمن المشكلة الثنائية قيدين فقط،كل واحد منهما يقابل متغيرا قراريا بالمشكلة الأصلية ،ومعاملات قيود المشكلة الثنائية يتم اخذها من معاملات قيود المشكلة الأصلية . وسيكون الجانب الأيسر للقيدين الجديدين معادلين لمعاملات دالة الهدف للمتغيرات القرارية الاصلية ، بمعنى أن القيد الأول في الصياغة الثنائية سيكون هو القيد المقابل للمتغير القراري $س_1$ في المشكلة الاولية ، اذن ثابت هذا القيد أو جانبه الأيسر سيكون هو معامل ذلك المتغير القراري ($س_1$) في دالة الهدف الاصلية أي (٧) . وبالمثل فان القيد الثاني في الصياغة الثنائية سيكون هو القيد المقابل للمتغير القرارى ($س_2$) في المشكلة الأصلية ، ولذلك سيكون ثابت هذا القيد أو جانبه الأيسر،

هو معامل ذلك المتغير القراري في دالة الهدف الاولية أي (١٠). أما اشارة القيد فستكون عكس اشارة القيد فى الصياغة الأولية .

أي انه يلاحظ ان كل قيد فى الصياغةالثنائية يماثل المتغير القرارى في الصياغة الأولية ، فمعاملات القيد فى الصياغة الثنائية تطابق معدلات الاستخدام لذلك المتغير فى الصياغة الأولية كذلك فان طاقة القيد أو جانبه الأيسر يمثل معامل ذلك المتغير بدالة الهدف .

وتطبيقا لهذه الخطوة على قيود الموارد في الصياغة الثنائية بشكل يمكن من فهم محتوى هذه الخطوة سنقوم باعداد الشكل التالي الذى يهدف الى كيفية اعداد قيود المشكلة الثنائية استخلاصا من الصياغة الأولية :

القيود الثنائية	الصياغة الاولية
	تعظيم ٧ س$_{١}$ + ١٠ س$_{٢}$ بشرط
٣ص$_{١}$ + ٢ص$_{٢}$ $\geq$ ٧	ان : ٣ س$_{١}$ + ٢ س$_{٢}$ $\leq$ ٣٦
٢ص$_{١}$ + ٤ص$_{٢}$ $\geq$ ١٠	٢ س$_{١}$ + ٤ س$_{٢}$ $\leq$ ٤٠

وبشكل آخر، اذا كانت المصفوفة (أ) التالية هي مصفوفة معاملات قيود المشكلة الأصلية ،فان المصفوفة (أ) هي مصفوفة معاملات قيود المشكلة الثنائية :

أ =

٢	١
١	١
١	صفر
صفر	١

، أ=

٢	١	١	صفر
١	١	صفر	١

فمن الواضح ان العمود الاول من المصفوفة (أ) ، سيصبح الصف الاول للمصفوفة (أ) ،كما أن العمود

الثاني من المصفوفة أ ،سيصبح الصف الثاني من آ ، أما الثوابت الموجودة بالطرف الأيسر من قيود المشكلة الثنائية تؤخذ من دالة الهدف للمشكلة الاصلية . ويلاحظ ان معاملات العمود الأول من المصفوفة أ خاصة بالمتغير $س_1$ ،وان معامل الربح للمتغير $س_1$ فى المشكلة الاصلية هو ٧ . كما أن معاملات العمود الثاني من المصفوفة (أ) خاصة بالمتغير ($س_2$) ، ومعامل ربح ($س_2$) في المشكلة الاصلية هو ١٠ ، اذن ثوابت قيود المشكلة الثنائية هما على الترتيب ٧ ، ١٠ .

ولكن مامعنى أو مغزى القيود الثنائية ؟ لو أمعنا النظر فى صياغة القيود الثنائية سنجد أنها تكفل أو تضمن ان قيمة الموارد المستهلكة والمستخدمة فى تصنيع كل منتج تكون مساوية على الاقل لعائد المساهمة . ولمزيد من التوضيح،فالقيد الثنائي الاول والخاص بالمتغير القرارى ($س_1$) ، بالمشكلة الاولية يمكن اثباته بالصوة الوصفية التالية :

(ساعات تصنيع الوحدة من $س_1$)×(قيمة ساعة التصنيع)
+ (ساعات تجميع الوحدة من $س_2$)×(قيمة ساعة التجميع)
$\geqslant$ (العائد المتولد من كل وحدة من $س_1$)

٥- بعد الانتهاء من اجراءات الخطوات الأربعة السالفة ، وبعد اضافة شرط عدم السلبية ،ستكون الصياغة الكاملة الاولية والثنائية كالآتي :

الصياغة الأولية (الاصلية)	الصياغة الثنائية (المقابلة)
تعظيم بشرط $٧س_1 + ١٠س_2$ ان :	تعظيم بشرط $٣٦ص_1 + ٤٠ص_2$ ان :
$٣س_1 + ٢س_2 \geqq ٣٦$	$٣ص_1 + ٢ص_2 \leqslant ٧$
$٢س_1 + ٤س_2 \geqq ٤٠$	$٢ص_1 + ٤ص_2 \leqslant ١٠$
$س_1$ ، $س_2 \leqslant$ صفر	$ص_1$ ، $ص_2 \leqslant$ صفر

وبدراسة الصياغة الثنائية على الصورة السابقة يتضح جليا ان المتغيرات ص ١ ،ص ٢ تشير الى قيمة وسعر الساعة في قسمي التصنيع والتجميع على الترتيب ،أو مايطلق عليه سعر الظل ، وان القيد الأول مثلا يتضمن في جانبه الايمن مقدار ماتحتاجه وحدة المنتج الأول من ساعات في قسمي التصنيع والتجميع ، وفى جانبه الأيسر مقدار هامش ربح الوحدة من ذلك المنتج ، ولذلك فان تفسير هذا القيد يوضح ان مقدار الموارد اللازمة لانتاج وحدة واحدة من المنتج الاول مقومة بأسعار ظل تلك الموارد يجب ان تزيد او على الاقل تكون مساوية لهامش ربح الوحدة من هذا المنتج . أي أن الشركة المنتجة تكون في حالة تعادل أو سيان لديها أن تستخدم الموارد في المزيج الانتاجي أو بيع تلك الموارد بهذا السعر، وهذا ماسبق ذكره فى موضع سابق .

والجدول التالي يقدم تلخيصا كاملا للعلاقة بين عناصر صياغة المشكلة الاولية وعناصر صياغة المشكلة الثنائية والتي وردت في تحليلاتنا السابقة .

عناصر صياغة المشكلة الاولية	عناصر صياغة المشكلة الثنائية
دالة الهدف تعظيم	القيود اكبر من أو يساوى
القيود أقل من أو تساوى	دالة الهدف تخفيض
معاملات دالة الهدف	ثوابت القيود
ثوابت القيود	معاملات دالة الهدف
المتغيرات القرارية	القيود
القيود	المتغيرات القرارية
معاملات القيد	معاملات المتغير القابل لذلك القيد .

مثال :

المطلوب ايجاد الصياغة الثنائية لمشكلة شركة القاهرة للمنتجات الغذائية والتي كانت تأخذ الصياغة

الاولية (الاصلية) التالية :

دالة الهدف : تخفيض $٠٫٠٠٨ س_{١} + ٠٫٠١٢ س_{٢}$

بشرط أن:

$$٠٫٢ س_{١} + ٠٫٥ س_{٢} \geq ١$$

$$٠٫٤ س_{١} + ٠٫٢ س_{٢} \geq ١$$

$$س_{١} ، س_{٢} \geq صفر$$

الحل :

ستأخذ الصياغة الثنائية للمشكلة السابقة الصورة التالية :

دالة الهدف = تعظيم $ص_{١} + ص_{٢}$

بشرط أن =

$$٠٫٢ ص_{١} + ٠٫٤ ص_{٢} \leq ٠٫٠٠٨$$

$$٠٫٥ ص_{١} + ٠٫٢ ص_{٢} \leq ٠٫٠١٢$$

$$ص_{١} ، ص_{٢} \geq صفر$$

ويلاحظ اننا لو قمنا بحلتلك المشكلة الثنائية باستخدام طريقة السمبلكس فسنلمس وبسرعة احد مزايا المشكلة الثنائية في انها اسهل فى حلها من المشكلة الاولية ،فحيث ان المشكلة الاولية لهذا المثال هى مشكلة تخفيض مع قيود اكبر من أو يساوى ($\geq$) ،لهذا نحتاج لحل هذه المشكلة ان نضيف الى القيود متغيرات راكدة سالبة ومتغيرات اصطناعية ، أما عندما نقوم بحلها في صورتها الثناثية كمشكلة تعظيم ذات قيود أقل من أو يساوي ($\leq$) فليست هناك حاجة الى تلك المتغيرات الاصطناعية ومن ثم ستكون أسهل في حلها ،ويمكن للقارىء ان يقوم بتجربة ذلك .

العلاقة بين حل المشكلة الاولية والمشكلة الثنائية :

لعله من المفيد ان نقوم بحل المشكلة الثنائية

ثم نقارن بين النتائج التي يسفر عنها جدول الحل الأمثل الناتج من المشكلة الاولية ،للوقوف على العلاقة بينهما ولاستخدام نتائج الحل الأمثل للمشكلة الثنائية في استمرارية تحليل الحساسية الذى بدأناه فى الجزء الاول من هذا الفصل .

وفيما يلى خطوات الحل المعتادة للبرمجة الخطية بالتطبيق على مثال شركة القاهرة للصناعات الهندسية فى صياغتها الثنائية التى تم التوصل اليها في نهاية الخطوات السابقة دون استبعاد قيد رقائق الخشب .

(يلاحظ اننا سنضيف المتغيرات الراكدة ص$_4$ ،ض$_5$ والمتغيرات الاصطناعية ل$_1$ ، ل$_2$ ،وستكون معاملات ل$_1$ ،ل$_2$ قيمة كبيرة جدا مقدارها م).

الجدول المبدئي

معاملات الهدف	التغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٣٦	٤٠	١٠	صفر	صفر	م	م
		القيم	ص$_1$	ص$_2$	ص$_3$	ص$_4$	ص$_5$	ل$_1$	ل$_2$
م	ل$_1$	٧	٣	٢	١	١-	صفر	١	صفر
م	ل$_2$	١٠	٢	٤	صفر	صفر	١-	صفر	١ ←
دالة الهدف	التكاليف الداخلة		٥م	٦م	م	- م	- م	م	م
	١٧م	صافي التغير	٣٦-٥م	٤٠-٦م	١٠-م	م	م	صفر	صفر

↑ المتغير الداخل

الجدول الثاني (بعد استبعاد عمود ل ٢)

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٣٦	٤٠	١٠	صفر	صفر	م
		القيم	ص ١	ص ٢	ص ٣	ص ٤	ص ٥	ل ١
م	ل ١	٢	٢	صفر	١	١−	$\frac{١}{٢}$	١
٤٠	ص ٢	$\frac{٥}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	١	صفر	صفر	$-\frac{١}{٤}$	صفر
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٢٠+٢م	٤٠	م	− م	−١٠+ $\frac{١}{٢}$ م	م
	١٠٠+م	صافي التغير	−١٦−٢م	صفر	−١٠−م	م	−١٠− $\frac{١}{٢}$ م	صفر

المتغير الداخل ↑ (عمود ص ١)

الجدول الثالث (بعد استبعاد عمود ل ١)

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٣٦	٤٠	١٠	صفر	صفر
		القيم	ص ١	ص ٢	ص ٣	ص ٤	ص ٥
٣٦	ص ١	١	١	صفر	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$
٤٠	ص ٢	٢	صفر	١	$-\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	$-\frac{٢}{٨}$
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٣٦	٤٠	٨	− ٨	− ٦
	١١٦	صافي التغير	صفر	صفر	٢	٨	٦

وبمقارنة ذلك الجدول الامثل بما سبق التوصل اليه من الحل الامثل باستخدام الصياغة الاولية والذى قد ظهر على الشكل التالي ، يمكن ان نلحظ العديد من النتائج.

جدول الحل الامثل للمشكلة الاولية

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٧	١٠	صفر	صفر	صفر
		القيم	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	$س_{٥}$
٧	$س_{١}$	٨	١	صفر	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٤}$	صفر
١٠	$س_{٢}$	٦	صفر	١	$-\frac{١}{٤}$	$\frac{٣}{٨}$	صفر
صفر	$س_{٥}$	٢	صفر	صفر	$-\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٧	١٠	١	٢	صفر
	١١٦	صافي التغير	صفر	صفر	١-	٢-	صفر

في البداية يتعين ان نوضح اولا مغزى النتائج التي يقدمها جدول الحل الامثل للمشكلة الثنائية ،فحيث ان $ص_{١}$ تمثل سعر ظل الساعة من قسم التصنيع ،و $ص_{٢}$ تمثل سعر ظل الساعة من قسم التجميع ،اذن يمكن ان نقول أن المنتج سيرى انه سيان لديه ان يقوم بانتاج المزيج الانتاجي من $س_{١}$ ،$س_{٢}$ ، أو أن يبيع تلك الموارد (ساعات التصنيع ، وساعات التجميع)وذلك عند مستوى سعر ١ جنيه للساعة من قسم التصنيع ، و ٢ جنيه للساعة من قسم التجميع وسنعود الى تحليل كامل لهذا الموضوع عند تحليل حساسية القيمة الحدية للموارد الاضافية.

ونعود مرة آخري لنقول انه بمقارنة نتائج الحل للنموذج الاولى ونتائج الحل بالنموذج الثنائي يتضح آن هناك عددا من نقاط الاتفاق بين نتائجها كالآتي :

١- نقطة الاتفاق الاولى اننا يمكن ان نحصل على الحل الامثل للمشكلة الثنائية من جدول الحل الامثل للمشكلة الاولية ، ومن ناحية آخرى ،فحيث ان العلاقة عكسية بين المشكلة الثنائية والمشكلة الاولية ،لذلك

ايضا لايمكن ان نحصل على الحل الامثل للمشكلة الاولية من تحليل جدول السمبلكس الاخير لحل المشكلة المقابلة او الثنائية ،ولذلك فاننا سنقارن فيما يلي عناصر الجدولين السابقين لتوضيح العلاقة الوثيقة بين الحل الاولي أو الأصلي والحل المقابل او الثنائي ٠

لقد سبق القول ،ان لكل متغير قراري في المشكلة الاولية قيد يقابله فى المشكلة الثنائية ، كذلك تتضمن المشكلة الثنائية متغير قراري لكل قيد في المشكلة الاولية ،لذلك سنلاحظ ان قيم الحل الامثل للمشكلة الاولية تتطابق مع صافى التغير للمتغيرات المضافة بالمشكلة الثنائية وهي ($ص_٤$ ، $ص_٥$) ، كذلك تتعادل قيم الحل للمتغيرات الراكدة بالمشكلة الاولية مع قيم صافى التغير للمتغيرات القرارية المقابلة بالمشكلة الثنائية ، ويتضح ذلك من المقارنة التالية المستخرجة من الجدولين السابقين :

المتغيرات الاولية	قيم الحل
$س_١$	٨
$س_٢$	٦
$س_٣$	صفر
$س_٤$	صفر
$س_٥$	٢

المتغيرات الثنائية	صافي التغير
$ص_٤$	٨
$ص_٥$	٦
$ص_١$	صفر
$ص_٢$	صفر
$ص_٣$	٢

كذلك سنجد علاقة مشابهة بين قيم الحل للمتغيرات الثنائية وقيم صافى التغير للمتغيرات الاولية مع تغير الاشارة كما يلي :

المتغيرات الثنائية	قيم الحل
$ص_1$	١
$ص_2$	٢
$ص_3$	صفر
$ص_4$	صفر
$ص_5$	صفر

المتغيرات الاولية	صافي التغير
$س_3$	١ -
$س_4$	٢ -
$س_5$	صفر
$س_1$	صفر
$س_2$	صفر

وتأسيسا على هذه العلاقات فانه يمكن ان نستخرج الحل الامثل للمشكلة الثنائية من قيم صافي التغير المرتبطة بها من جدول الحل الامثل للمشكلة الاولية . كذلك اذا كان متاح لدينا جدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية ،فانه يمكن ايضا ان نحصل على القيم المثلي لمتغيرات المشكلة الاولية من صف صافي التغير بجدول الحل الاخير للمشكلة الثنائية .

٢- كذلك اذا ماقارنا الجدولين السابقين لحل كل من المشكلة الاولية ،والمشكلة الثنائية ،سنجد أن هناك نقطة اتفاق اخرى وهي قيمة دالة الهدف فى الحل الامثل، اذ سنجد أنها تبلغ ١١٦ جنيه فى كلا الجدولين - ولكن معناها ومغزاها مختلف ، فقيمة دالة الهدف بالنسبة للمشكلة الاولية تعني اجمالى المساهمة في الارباح المحققة بانتاج المزيج الانتاجي الامثل لكل من المنتجين $س_1$ ،$س_2$ (٧x٨ + ١٠x٦ = ١١٦ جنيه) ، ولكن هذه القيمة نفسها بالنسبة للمشكلة الثنائية فهى تمثل القيمة المثلى من الموارد المتاحة لانتاج $س_1$ ، $س_2$، ولذلك اذا ماقمنا بحساب قيمة اجمالى الموارد المستغلة في حجم الانتاج الامثل سنجدها ١١٦جنيه (٣٦ ساعة تصنيع x ١ جنيه + ٤٠ ساعة تجميع x ٢ جنيه = ١١٦)، لذلك

نجد ان القيمة الاجمالية للموارد تعادل تماما اجمالي المساهمة التي يمكن توليدها عن طريق توجيهها لانتاج المزيج الانتاجي الامثل من المتغيرات القرارية $س_1$ ، $س_2$.

٣- ونقطة مشتركة اخرى تتعلق بمعاملات القيود، فحيث ان المتغير $ص_1$ والوارد بالمشكلة الثنائية هو المتغير المناظر للمتغير $س_3$ بالمشكلة الاولية ، لذلك نجد أن معاملات القيد للمتغير $ص_1$ عند المتغيرات غير الاساسية بجدول الحل الأخير للنموذج الثنائي ،متطابقة (بعد تغيير الاشارات) مع معاملات القيد للمتغير $س_3$ عند المتغيرات الاساسية بجدول الحل الاخير للمشكلة الاولية ، كما هو مبين من المقارنة التالية :

المتغيرات غير الاساسية بالمشكلة الثنائية	معاملات القيد المرتبط بالمتغير $ص_1$
$ص_3$	$\frac{1}{2}$
$ص_4$	$-\frac{1}{2}$
$ص_5$	$\frac{1}{4}$

المتغيرات الاساسية بالمشكلة الاولية	معاملات القيد المرتبط بالمتغير $س_3$
$س_5$	$-\frac{1}{2}$
$س_1$	$\frac{1}{2}$
$س_2$	$-\frac{1}{4}$

كيفية التعامل مع المشاكل ذات المتباينات المختلطة :

من المهم جدا ان نتعرض هنا لكيفية التصرف والتعامل مع مشاكل البرمجة الخطية ذات القيود مختلفة الاشارة ،فقبل ان نستمر في تحليلنا لكيفية استخدام معلومات المشكلة الثنائية في استكمال تحليل الحساسية لباقي عناصر نموذج البرمجة الخطية ،لابد آن نوضح كيفية التصرف في مثل هذا الموقف آولا ،ففي مناقشتنا السابقة

للمشكلة الثنائية كانت الامثلة التى أوردناها على قيود المشكلة الاولية كلها من نفس النوع أي كانت كلها أقل من أو يساوي ($\geqslant$) بالنسبة لمشاكل التعظيم، أو كلها كانت اكبر من أو يساوى ($\leqslant$) بالنسبة لمشاكل التخفيض ، ولكن هذه الافتراضات عملية مجردة وبعيدة عن الواقع العملي ، اذ ليس من الضروري أن نجد دائما أن كافة قيود المشكلة الاولية للتعظيم كلها أقل من أو يساوي، وكذلك الحال بالنسبة لمشاكل التخفيض ، اذ ليس من الضروري ان تكون كلها اكبر من أو يساوى .

ولذلك اذا لم تكن جميع القيود المفروضة على المشكلة متحدة الاتجاه الذى تتفق مع طبيعة اتجاه دالة الهدف ، فيستلزم الامر اجراء تدخل بسيط وهام جدا قبل صياغة المشكلة الثنائية . ولكن ما الداعي لهذا الاجراء أساسا ؟ .

للاجابة على هذا التساؤل نقول انه عندما تكون كل القيود الموجودة بمشكلة التعظيم هى أقل أو يساوى أو عندما تكون كل القيود الموجودة بمشكلة التخفيض هي اكبر من أو يساوى ، فانه يصبح من السهل جدا صياغة المشكلة الثنائية متبعين نفس الخطوات التى ذكرناها في اعداد هذه الصياغة ، اما اذا اتضح ان هناك بعض القيود تأخذ اتجاها مغايرا ومخالطا بالنسبة لنوعية المشكلة التى تعبر عنها دالة الهدف من حيث التعظيم أو التخفيض . فيتعين اجراء التعديل على قيود المشكلة الأولية ، حتى يكون من السهل اتباع الخطوات العامة لصياغة المشكلة الثنائية .

وتأسيسا على ماتقدم سنوضح فيمايلي كيف يمكن اجراء التعديل المطلوب على متباينات القيود لتصبح جميعها متحدة الاتجاه حسب طبيعة هدف المشكلة .

فاذا كانت المشكلة الاولية أو الاصلية هى احدى صور مشاكل تعظيم دالة الهدف ، وتحتوى على قيود من

بينها قيد اكبر من أو يساوي ($\geq$) ،فانه يتم ضرب طرفي ذلك القيد في القيمة (−١) ، حيث ان هذا الاجراء يعمل على تحويل اتجاه المتباينة ليصبح قيد أقل من أو يساوي ($\leq$) • ونفس هذا الاجراء يكون من الضروري اجراؤه اذا كانت المشكلة الاولية أو الاصلية هى احدى صور مشاكل تخفيض دالة الهدف وتحتوى على قيود من بينها قيد اقل من أو يساوي ($\leq$) •

ولتوضيح كيف ان هذا الاجراء يعمل على تغيير اتجاه القيد من الحالة التى هو عليها الى الحالة العكسية ، نفرض مثلا انه توجد لدينا المتباينة التالية :

$$2 س_1 \leq 10$$

فاذا كانت قيمة $س_1 = 4$ فان هذا القيد يتحقق ($2 \times 4 < 10$) ، ولكن اذا كانت قيمة $س_1 = 6$ ،فان القيد لن يتحقق ($2 \times 6 \nleq 10$) ، اما اذا تم ضرب طرفى القيد في (−١) فاننا بذلك نغير اتجاه المتباين، أي سيكون القيد بعد عملية الضرب على الصورة التالية :

$$-2 س_1 \geq -10$$

وبالتعويض بقيم $س_1 = 4$ ، $س_1 = 6$ ،سوف نجد أن القيد يتحقق عندما تكون $س_1 = 6$ ، ولايتحقق عند $س_1 = 4$ ، وهذا يؤكد ان ضرب طرفى القيد في القيمة (−١) يغير اتجاه التباين •

<u>مثال :</u>

فيما يلى الصياغة الرياضية التى تمثل مشكلة احدى الشركات الانتاجية :

دالة الهدف = تعظيم $2000 س_1 + 5000 س_2 + 4000 س_3 + 4000 س_4$

القيود : بشرط أن :

$$20 س_1 + 25 س_2 + 30 س_3 + 15 س_4 \leq 900$$

$$٢٠س_{١} + ٢٠س_{٢} + ١٢س_{٣} + ١٠س_{٤} \leq ٩٠٠$$

$$س_{١} \geq ٥$$

$$س_{٣} \geq ٣$$

$$س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} ، س_{٤} \geq صفر$$

والمطلوب : اعداد الصياغة الثنائية الممثلة و المقابلة لتلك الصياغة الاولية ٠

الحل :

يتضح من الصياغة الاولية الواردة بالمثال السابق ان المتباينات الواردة بها مختلفة الاتجاه ،فهناك قيود متمشية مع الاتجاه ومتفقة مع اتجاه دالة الهدف ،وهما القيدين الاول والثاني ،أما القيدين الثالث والرابع فهما عكس الاتجاه الصحيح ، ويتطلب الامر قبل اعداد الصياغة الثنائية ان نضرب طرفي كل قيد منهما في القيمة (‎-١) ، وبعد اجراء هذا التعديل ستظهر الصياغة الاولية على الوجه التالي :

دالة الهدف : تعظيم $٢٠٠٠س_{١} + ٥٠٠٠س_{٢} + ٤٠٠٠س_{٣} + ٢٠٠٠س_{٤}$

القيود : بشرط أن :

$$٢٠س_{١} + ٢٥س_{٢} + ٣٠س_{٣} + ١٥س_{٤} \leq ٩٠٠$$

$$٢٠س_{١} + ٢٠س_{٢} + ١٢س_{٣} + ١٠س_{٤} \leq ٩٠٠$$

$$-س_{١} \leq -٥$$

$$-س_{٣} \leq -٣$$

$$س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} ، س_{٤} \geq صفر$$

وعلى ذلك يمكن صياغة النموذج الثنائي على الوجه الصحيح التالي :

دالة الهدف : تخفيض ٩٠٠ص$_{١}$ + ٩٠٠ص$_{٢}$ – ٥ص$_{٣}$ – ٣ص$_{٤}$

القيود : بشرط أن :

٢٠ص$_{١}$ + ٢٠ص$_{٢}$ – ص$_{٣}$ ≤ ٢٠٠٠

٢٥ص$_{١}$ + ٢٠ص$_{٢}$ ≤ ٤٠٠٠

٣٠ص$_{١}$ + ١٢ص$_{٢}$ – ص$_{٤}$ ≤ ٤٠٠٠

١٥ص$_{١}$ + ١٠ص$_{٢}$ ≤ ٢٠٠٠

ص$_{١}$ ، ص$_{٢}$ ، ص$_{٣}$ ، ص$_{٤}$ ≤ صفر

تبين مما سبق الاجراء الذى يتم عمله لتعديل اتجاه القيد ليصبح في اتجاه دالة الهدف ،ولكن ماهو الوضع اذا كان القيد يمثل معادلة ،أي أنه قيد متساوى الجانبين ؟ ان القيود المتساوية الجانبين (معادلة) تتطلب تعديلا معقدا بعض الشىء وذلك قبل اعداد صياغة المشكلة الثنائية ،فالقيد المتعادل في المشكلة الاولية يجب أولا ان يحل محله متباينين احداهما اكبر من أو يساوى (≤) ، والاخرى اقل من أو يساوى(≥)٠وعلى سبيل المثال اذا كانت الصياغة الاولية بها القيد المتساوى الآتي :

٣س$_{١}$ + ٤س$_{٢}$ + ٢س$_{٣}$ = ١٠٠

فانه يتم الغاء هذا القيد واحلال قيدين آخرين محلهفي صورة متباينين اولهما اكبر من أو يساوى والآخر أقل من أو يساوى كالآتي :

٣س$_{١}$ + ٤س$_{٢}$ + ٢س$_{٣}$ ≤ ١٠٠

٣س$_{١}$ + ٤س$_{٢}$ + ٢س$_{٣}$ ≥ ١٠٠

وبعد اجراء هذا التعديل سنجد أن احد القيدين يأخذ الاتجاه غير الصحيح،اذ انها مشكلة تعظيم،ويتطلب الامر ان تكون القيود اقل من أو يساوى ،لذلك يتعين تعديل

هذا القيد مرة أخرى عن طريق ضرب طرفي ذلك القيد في القيمة (-١) ، ومن ثم فان المتباينتين اللتين ستحلان محل القيد المتساوى السابق هما :

$$٣س_١ + ٤س_٢ + ٢س_٣ \geqslant ١٠٠$$

$$-٣س_١ - ٤س_٢ - ٢س_٣ \geqslant -١٠٠$$

مثال :

بفرض ان الصياغة التالية تمثل مشكلة اولية من مشاكل البرمجة الخطية ، والمطلوب اعداد الصياغة الثنائية لها .

دالة الهدف : تعظيم $١٢س_١ + ١٦س_٢ + ٨س_٣$

القيود : بشرط أن :

$$٤س_١ + ٤س_٢ + ٤س_٣ = ٤٠٠$$

$$٨س_١ + ١٢س_٢ + ٨س_٣ \geqslant ١٤٠٠$$

$$١٢س_١ + ٨س_٢ + ٤س_٣ \leqslant ١٢٠٠$$

$$س_١ ، س_٢ ، س_٣ \leqslant صفر$$

الحل :

حيث ان هذه المشكلة ذات هدف تعظيم ، اذن ينبغي أن تكون القيود التي تتضمنها الصياغة الرياضية في اتجاهها الصحيح بالنسبة لهذا النوع من المشاكل ، أي أن تكون جميعها متباينات اقل من أو يساوى ($\geqslant$)وذلك قبل اعداد الصياغة الثنائية لها حتى يكون من السهل واليسير اتباع الخطوات المعتادة والعامة لصياغة المشكلة الثنائية .

ومن خلال تفحص اتجاه المتباينات السابقة سنجد أنها متباينات مختلطة وتحتوى على الانواع الثلاثة من المتباينات (=) ، ($\geqslant$) ، ($\leqslant$) . لذلك يتطلب الامر جعلها جميعا في الاتجاه الصحيح اى تكون جميعها ($\geqslant$).وهذا يتطلب

تعديل المتباينيتين المغايرتين للاتجاه الصحيح (الاولى، والثالثة) .

تعديل المتباينة الاولى :

المتباينة الاولى كانت على الصورة التالية :

$$٤س_{١} + ٤س_{٢} + ٤س_{٣} = ٤٠٠$$

وهذا كما هو واضح قيد متعادل الجانبين (أي معادلة) ، وكما سبق القول فانه لكي يمكن جعله في الاتجاه الصحيح بالنسبة لطبيعة مشكلة التعظيم ($\geq$) ينبغى أن يحل محله متباينتين ، احداهما اكبر من أو يساوى ، والأخرى اقل من أو يساوى كالآتي :

$$٤س_{١} + ٤س_{٢} + ٤س_{٣} \geq ٤٠٠$$

$$٤س_{١} + ٤س_{٢} + ٤س_{٣} \leq ٤٠٠$$

وبعد اجراء هذا التعديل سنجد أن المعادلةالثانية أصبحت في عكس الاتجاه الصحيح لأنها ($\leq$)،وهذا لايتفق مع مشكلة التعظيم،لذلك ينبغى تعديلها لتأخذ الاتجاه الصحيح وذلك بضرب طرفيها في القيمة (-١) ومن ثم تصبح المتباينة كالآتي :

$$-٤س_{١} - ٤س_{٢} - ٤س_{٣} \geq -٤٠٠$$

وباجراء هذا التعديل يصبح لدينا قيدين سيحلان محل القيد المتساوى الاول وهما :

$$٤س_{١} + ٤س_{٢} + ٤س_{٣} \geq ٤٠٠$$

$$-٤س_{١} - ٤س_{٢} - ٤س_{٣} \geq -٤٠٠$$

من ناحية اخرى سنجد ان القيد الثالث فى الصياغة الاولية ($١٢س_{١} + ٨س_{٢} + ٤س_{٣} \leq ١٢٠٠$) في غير الاتجاه الصحيح لأنه ($\leq$) وهذا لايتفق مع مشكلة

التعظيم ، والاجراء التعديلي المطلوب هو ضرب طرفي هذا القيد في القيمة (-١) ليأخذ الاتجاه الصحيح،ويكون هذا القيد بعد هذا الاجراء كالآتي :

− ١٢س$_1$ − ٨س$_2$ − ٤س$_3$ $\leq$ − ١٢٠٠

وبعد اجراء التعديلات السابقة سنعيد فيما يلى الصياغة الاولية الاصلية :

دالة الهدف = تعظيم ١٢س$_1$ + ١٦س$_2$ + ٨س$_3$

القيود : بشرط أن :

٤س$_1$ + ٤س$_2$ + ٤س$_3$ $\leq$ ٤٠٠

− ٤س$_1$ − ٤س$_2$ − ٤س$_3$ $\leq$ − ٤٠٠

٨س$_1$ + ١٢س$_2$ + ٨س$_3$ $\leq$ ١٤٠٠

− ١٢س$_1$ − ٨س$_2$ − ٤س$_3$ $\leq$ − ١٢٠٠

س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ $\geq$ صفر

وحيث ان المطلوب هو ايجاد الصياغة الثنائيةلهذه الصياغة الاولية ،لذلك سيتم السير فى خطوات تحويل المشكلة من صياغتها الاولية الى صياغتها الثنائية وهذه الخطوات هي :

١- بموجب قواعد ايجاد الصياغة الثنائية ،يتم تخصيص متغير ثنائي لكل قيد من قيود المشكلة الأولية ، وحيث ان عدد القيود السابقة عددها أربعة ،لذلك سيتم تخصيص المتغيرات التالية كمتغيرات ثنائية تقابل تلك القيود على الترتيب (ص$_1$ ، ص$_2$ ، ص$_3$ ، ص$_4$).

٢- يتم تخصيص قيد فى الصياغة الثنائية لكل متغير قراري موجود بالصياغة الاولية ،وحيث ان التغيرات القرارية في الصياغة الاولية هي (س$_1$ ،س$_2$ ،س$_3$) لذلك ستتضمن الصياغة الثنائية عدد ثلاثة قيود فقط :

٣- تتحول ثوابت القيود بالنموذج الاولى (الأصلي) الى معاملات للمتغيرات الثنائية في دالة هدف النموذج الثنائي • وبذلك تكون دالة هدف النموذج الثنائي كالآتي :

تخفيض ٤٠٠ص$_1$ – ٤٠٠ص$_2$ + ١٤٠٠ص$_3$ – ١٢٠٠ص$_4$

٤- تتحول معاملات المتغيرات القرارية في دالة هدف النموذج الاولى الى ثوابت لقيود النموذج الثنائي، وبذلك تكون الصياغة الثنائية كالآتي :

دالة الهدف : تخفيض ٤٠٠ص$_1$ – ٤٠٠ص$_2$ +١٤٠٠ص$_3$ – ١٢٠٠ص$_4$

القيود : بشرط أن :

٤ص$_1$ – ٤ص$_2$ + ٨ص$_3$ – ١٢ص$_4$ ≥ ١٢

٤ص$_1$ – ٤ص$_2$ + ١٢ص$_3$ – ٨ص$_4$ ≥ ١٦

٤ص$_1$ – ٤ص$_2$ + ٨ص$_3$ – ٤ص$_4$ ≥ ٨

ص$_1$ ، ص$_2$ ، ص$_3$ ، ص$_4$ ≥ صفر

وبذلك تكون الصياغة الاولية والثنائية كالآتي :

الصياغة الاولية

تعظيم ١٢س$_1$ + ١٦س$_2$ + ٨س$_3$

بشرط أن :

٤س$_1$ +٤س$_2$ +٤س$_3$ ≤ ٤٠٠

– ٤س$_1$ –٤س$_2$ –٤س$_3$ ≤ –٤٠٠

٨س$_1$ +١٢س$_2$ + ٨س$_3$ ≤ ١٤٠٠

– ١٢س$_1$ –٨س$_2$ –٤س$_3$ ≤ –١٢٠٠

س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ≥ صفر

الصياغة الثنائية

تخفيض ٤٠٠ص$_1$ – ٤٠٠ص$_2$ +١٤٠٠ص$_3$ –١٢٠٠ص$_4$

بشرط أن =

٤ص$_1$ –٤ص$_2$ +٨ص$_3$ –١٢ص$_4$ ≥ ١٢

٤ص$_1$ –٤ص$_2$ +١٢ص$_3$ –٨ص$_4$ ≥ ١٦

٤ص$_1$ –٤ص$_2$ +٨ص$_3$ –٤ص$_4$ ≥ ٨

ص$_1$ ،ص$_2$ ، ص$_3$ ، ص$_4$ ≥ صفر

استخدام نتائج النموذج الثنائي في استكمال تحليل حساسية باقي العناصر :

كما يلاحظ القارىء اننا بدأنا هذا الفصل بتناول تحليل عناصر نموذج البرمجة الخطية ،الا اننا لم نتناول الا تحليل حساسية عنصرين فقط من تلك العناصر ، وهما التغير في معاملات دالة الهدف ، وكذلك حساسية الحل الأمثل للتغيرات في ثوابت القيود ،أما العناصر الثلاثة الاخرى المكملة لعناصر نموذج البرمجة الخطية ،فقد أجلناها بعض الشيء الى حين الانتهاء من استعراض مفهوم ومغزى ونتائج النموذج الثنائي ،وذلك للسبب الذى ذكرناه في حينه ، وهو ان لتحليل نتائج النموذج الثنائي دور هام وأساسي في تحليل حساسية باقي العناصر.

وبعد أن انتهينا من توضيح وتفسير النموذج الثنائي سنرى كيف أن المعلومات الخاصة بالعلاقة بين النموذج الاولى (الاصلي) ،والنموذج الثنائي تمكننا من الاجابة على عديد من اسئلة تحليل الحساسية والتى تعتبر على درجة عالية من الأهمية للتطبيق الاداري ولمتخذ القرار ،وتتضمن هذه الاسئلة مايلي :

١- ماهي القيمة الحدية لاضافة وحدة واحدة من الموارد المتاحة ؟

٢- ماهو التأثير الذى ينتج عن اضافة متغيرات قرارية جديدة ؟ .

٣- ماهو تأثير التغيرات في معاملات استخدام المورد المتاح ؟

وفيما يلى نتناول الاجابة على هذه التساؤلات على التتابع .

اولا: تحديد القيم الحدية للمورد (المتاح) :

Determining Marginal Resource Values

يمكن الحصول من جدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية

على معلومات هامة جدا من وجهة نظر تحليل الحساسية ،ومن بينها مايعنينا فى هذا الجزء، وهي المعلومات التي تفيد في تحديد القيم الحدية للموارد ،فنحن نعلم ان كل قيد بالمشكلة الاولية يقابله متغير بالمشكلة الثنائية ،أي أنه يمكن القول ان قيم المتغيرات الاساسية بجدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية والتي تقابل قيود أقل من أو يساوى بالمشكلة الاولية ، تمثل القيمة الحدية للمورد النادر والذى يتصل بقيد النموذج الاصلى ،هذه القيمة الحدية تعادل مقدار الزيادة في دالة الهدف نتيجة زيادة وحدة واحدة من المورد المتاح . وفي حالة القيود أكبر من أو يساوى فان القيمة المثلى لمتغير النموذج الثنائي تعتبر التكلفة الحدية المرتبطة بذلك الحد الادني ، ولذلك فان التكلفة الحدية تشير الى الزيادة في دالة الهدف (والتى نسعى الى تحقيقها) والناشئة عن زيادة وحدة واحدة في ذلك الحد الادنى .

ولتوضيح ذلك ، سنعيد تصوير جدول الحل الأمثل وفقا للصياغة الثنائية لشركة القاهرة للصناعات الهندسية ، حتى نستطيع ان نوضح ماذا نقصده بتحديد القيم الحدية للمورد وكيف يمكن التوصل اليها من الجدول الامثل للمشكلة الثنائية .

جدول الحل الامثل للمشكلة الثنائية

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٣٦	٤٠	١٠	صفر	صفر
		القيم	ص ١	ص ٢	ص ٣	ص ٤	ص ٥
٣٦	ص ١	١	١	صفر	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$
٤٠	ص ٢	٢	صفر	١	$-\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	$-\frac{٣}{٨}$
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٣٦	٤٠	٨	٨-	٦-
	١١٦	صافي التغير	صفر	صفر	٢	٨	٦

وحيث ان $ص_1$ ، $ص_2$ ، $ص_3$ تمثل القيود بالمشكلة الاولية ، وفقا لترتيبها وهي وقت التصنيع ، وقت التجميع ، رقائق الخشب ، وحيث ان قيم الحل الأمثل بذلك الجدول هي : $ص_1 = 1$ ، $ص_2 = 2$ ، $ص_3$ = صفر فان هذه القيم تمثل على الترتيب القيمة الحدية لاضافة وحدة واحدة من وقت التصنيع ، ووقت التجميع ،ورقائق الخشب .

وبمعنى أكثر تحديدا فان نتائج الحل في الجدول السابق تشير الى أنه اذا أضيفت الى طاقة قسم التصنيع المتاحة حاليا (٣٦ ساعة) ساعة واحدة اضافية ،فان ذلك سيترتب عليه ان دالة الهدف ،أو اجمالى المساهمة في الارباح ستزداد بمقدار جنيه واحد. واذا اضيفت الى طاقة قسم التجميع المتاحة حاليا (٤٠ ساعة)ساعة واحدة اضافية ، فان دالة الهدف ستزداد بمقدار ٢ جنيه ،أما اذا زادت طاقة رقائق الخشب المتاحة (١٠وحدات) بمقدار وحدة واحدة فان دالة الهدف لن تزيد بشئ حيث انالقيمة الحدية لهذه الوحدة حسب نتائج الحل = صفر .

ولعل هذه التفسيرات قد تثير تساؤلات متعددةوهي من أين تأتي هذه الزيادة في دالة الهدف ؟ أو بمعنى آخر ، من أين يأتي ذلك الجنيه الذى تزداد به قيمةدالة الهدف اذا ماتم زيادة طاقة قسم التصنيع بمقدار ساعة واحدة ؟ ولماذا تزداد قيمة دالة الهدف بمقدار ٢ جنيه اذا زادت طاقة قسم التجميع بساعة اضافيةواحدة؟ ولماذا لاتزداد دالة الهدف بأي مقدار نتيجة زيادة رقائق الخشب بوحدة واحدة ؟ . كلها تساؤلات تستحق التوضيح والاثبات. ومن أجل ايجاد اجابة واضحة على كافة هذه التساؤلات نرجع الى بيانات الجدول الذي يمثل الحل الأمثل للمشكلة الاولية والذى كان على الصورة التالية :

جدول الحل الامثل للمشكلة الاولية

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٧	١٠	صفر	صفر	صفر
		القيم	س١	س٢	س٣	س٤	س٥
٧	س١	٨	١	صفر	١/٢	– ١/٤	صفر
١٠	س٢	٦	صفر	١	– ١/٤	٣/٨	صفر
صفر	س٥	٢	صفر	صفر	– ١/٢	١/٤	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٧	١٠	١	٢	صفر
	١١٦	صافي التغير	صفر	صفر	– ١	– ٢	صفر

من هذا الجدول وتحت عمود المتغير س٣ وهو المتغير الممثل لقيد ساعات التصنيع ، حيث انه المتغير الراكد الذى اضيف الى قيد التصنيع لتحويله الى معادلة ، سنجد ان المعاملات الواردة تحت هذا المتغير والتي تمثل مقدار التضحية من كل متغير اساسي والتي يتعين التضحية بها مقابل زيادة المتغير الراكد (س٣) بمقدار وحدة واحدة. وحيث اننا كنا ننظر الى التكاليف الداخلة للمتغير الراكد باعتبارها تضحية ناشئة عن انخفاض في وقت التصنيع بساعة واحدة (حيث ان زيادة الطاقة العاطلة بمقدار ساعة هو بمثابة تخفيض وقت التصنيع بهذه الساعة) ، لذلك يمكن ان نعتبر ذلك ارباح داخلة للمتغير الراكد عندما يزيد زمن التصنيع المتاح بساعة واحدة ،وهذا هو الذى يجعلنا نقول ان قيمة صافى التغير س٣ = – ١ ، يعتبر قيمة حدية مقدارها جنيه لكل وحدة تزيد في وقت التصنيع ، وهى نفس النتيجة التى اظهرها جدول الحل الامثل للمشكلة الثنائية (ص١ = ١) .

وبنفس المنطق ، فان القيمة الحدية لاضافة ساعة من وقت التجميع هو ٢ جنيه ، وهنا يتبادر الى الذهن تساؤل ، وهو لماذا نجد أن المتغير الثالث (ص ٣) للنموذج الثنائي والمقابل لقيد رقائق الخشب له قيمة مقدارها صفر ؟ يمكن توضيح الاجابة على ذلك التساؤل من خلال ملاحظة انه قد ظهر المتغير الراكد (س ٥) في جدول الحل للمشكلة الاولية كمتغير اساس وبقيمة مقدارها (٢) ، ان ذلك يعنى ان هناك عدد وحدتين من رقائق الخشب لم يستخدما في المزيج الانتاجي الأمثل. وحيث انه يوجد فائض في رقائق الخشب ، أي ان هذا المورد غير نادر ،لذا فان أي زيادة في عدد وحدات رقائق الخشب لن تضيف شيئا الى اجمالى مساهمة الحل الامثل . لذلك وجدنا ان القيمة الحدية لاضافة أي وحدة من رقائق الخشب هى صفر .

الا انه يتعين ان نقف على حقيقة معينة حتى لاتختلط المعاني في هذا المجال ،اذ ينبغى الا يفسر معنى القيمة الحدية للمورد بتكلفته ، فهناك فرق بين المعنيين ،فالأولى يطلق عليها سعر ظل المورد، أما الثانية فتعنى تكلفة الحصول على المورد،فعلى سبيل التوضيح فقد حددنا القيمة صفر لرقائق الخشب ، ان ذلك لايعنى اننا نحصل على هذه الرقائق مجانا وبدون مقابل ان هذا التفسير غير صحيح ، فهذه الرقائق لها تكلفة لابد من دفعها لتحصل عليها الشركة . ولكن معنى القيم الحدية للمورد (سعر ظل المورد) انها تشير الى تأثير التغيرات في كمية الموارد المتاحة ، وحيث ان الحل الامثل سيترك وحدتين من رقائق الخشب غير مستغلة ، ولذلك فان وحدة اضافية أو وحدة أقل من المتاح لن تؤثر على الحل الأمثل او على قيمة دالة الهدف . اذن يمكن القول ان القيمة الحدية لوحدة من رقائق الخشب هي صفر على الرغم ان تكلفتها الحدية غير صفرية .

ويمكن توضيح ذلك بطريقة اخرى ، وهي ان رقائق الخشب ، قد فقدت قدرتها النسبية مما يعني ان سعرها ينبغي أن ينخفض الى الصفر بموجب قوانين العرض والطلب .

وبناء على ماتقدم فانه يمكن اعتبار قيم المتغيرات الاساسية بجدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية هى اسعار التوازن للمورد او مايطلق عليه أسعار ظل المورد Shadow Prices ، وعلى ذلك يمكن تفسير النموذج الثنائي على انه يحاول تخفيض دالة الهدف (اذا كانت المشكلة الاولية تعظيم) عن طريق ايجاد الحد الادنى لتكلفة الفرصة البديلة للموارد المستخدمة في العمليات مقومة بأسعار الظل .

ويمكن ان نخلص من العرض السابق الى مجموعة الحقائق التالية :

١- تمثل قيم المتغيرات الاساسية بجدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية مايطلق عليه القيمة الحدية للمورد او مايسمى بأسعار ظل المورد ،وهو السعر الذى يرى معه المنتج انه سيان لديه ان يبيع وحدات المورد عند تلك الاسعار أو ان يستخدمها في انتاج مزيج الانتاج الامثل ، وهو الذى يجعل الارباح القصوى تتعادل مع الموارد المتاحة مقومة بأسعار ظلها .

٢- يعادل سعر ظل المورد المعين مقدار الزيادة في دالة الهدف نتيجة اضافة وحدة اضافية واحدة من ذلك المورد .

٣- يأخذ سعر ظل الوحدة من أي مورد نادر قيمة موجبة .

٤- سعر ظل الوحدة من أي مورد توجد منه طاقة غير مستغلة تعادل صفر .

استخدام أسعار الظل فى ترشيد القرارات الادارية :

تعتبر القيم الحدية لكل مورد من الموارد المستخدمة في انتاج المزيج الانتاجي لاى مؤسسة مفيدة ومهمة جدا من وجهة النظر الادارية ، وسبق القول أن القيم الحدية للمورد Marginal Resource Values هي نفسها سعر ظل المورد Shadow Price ،ووقوف الادارة على أسعار ظل الموارد المختلفة التى تستخدمها من المعلومات المهمة جدا فى ترشيد اتخاذ القرارات الادارية ،لانه يمكن من خلالها ان تتعرف ادارة المشروع عما اذا كان من المفيد زيادة وحدة اضافية من الموارد المتاحة أم لا ؟ بمعنى ان الادارة من خلال وقوفها على اسعار الظل تستطيع ان تتعرف على تلك الموارد التى تؤدى زيادتها الى زيادة الربحية ، وتلك التى لاتؤثر على قيمة دالة الهدف، فاذا كان فى الامكان تشغيل كل من قسم التصنيع وقسم التجميع وقتا اضافيا ،أي زيادة الطاقة المتاحة لهذه الاقسام ، فانه اذا لم تكن التكلفة الحدية للوقت الاضافي اقل من جنيه لكل ساعة تصنيع (سعر ظل ساعة التصنيع) ،او ٢ جنيه لكل ساعة تجميع (سعر ظل ساعة التجميع) . فان مثل هذا الوقت الاضافي لن يكون مربحا .

وبمعنى آخر ، فحيث انه قد تبين مما سبق أن سعر الظل يمثل العائد الحدى الذى تساهم به وحدة اضافية من مورد معين في تغطية التكاليف الثابتة والربح. لذلك فانه يمكن للادارة أن تتعرف على الموارد الأكثر توليدا للارباح ومن ثم زيادة قيمة دالة الهدف . وبمعرفة الادارة لهذه المعلومات يمكن ان تركز عندئذ على زيادة كميات ذلك المورد الذى له سعر ظل كبير نسبيا ، هذا مع العمل فى الوقت نفسه على حسن استخدام ماهو متاح منه .

ومن ناحية أخرى اذا كان سعر ظل مورد معين صفر (مثل رقائق الخشب) فان ذلك معناه ان طاقة هذا المورد

أي المتاح منه لم يستنفذ بالكامل ولكن مازالت به وحدات أو ساعات غير مستغلة ، وهذا يلفت نظر الادارة الى ضرورة العمل على الاستفادة من الطاقة غير المستغلة لهذا المورد وتوجيهها الى استخدامات أخرى ، وكذلك عدم الشراء بكميات كبيرة تفوق الاحتياجات الحقيقية المطلوبة .

ان تلك المزايا السابقة ماهي الا بعض الأمثلة لدور أسعار الظل فى ترشيد القرارات الادارية .

لقد تبين من التحليل السابق ان زيادة وحدة واحدة من طاقة قسم التصنيع (ساعة تصنيع اضافية) ستعمل على زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار ١ جنيه ، وزيادة ساعة واحدة بقسم التجميع ستعمل على زيادتها بمقدار ٢ جنيه وهنا قد يثار تساؤل هل تلك القيم الحدية قابلة للتطبيق على طول المدى ؟ بمعنى هل أي زيادة مهما كان مقدارها فى تلك الاقسام تحقق نفس مقدار الزيادة في دالة الهدف ؟ فهل مثلا يمكن ان تزيد ساعات التشغيل بقسم التصنيع بأي عدد ممكن من الساعات وتستمر الاستفادة بالقيمة الحدية ومقدارها جنيه لكل ساعة يتم اضافتها ؟.

للاجابة على هذا التساؤل نقول ان مدى الزيادة ليس مطلق ، فالقيمة الحدية قابلة للتطبيق حتى مدى أو نطاق التغير في طاقات الموارد دون أن يتغير الوضع الأمثل للمتغيرات الاساسية ، فهذه الحدود هي فقط المدى الذى يمكن ان تطبق فيه القيمة الحدية للمورد (سعر الظل).

ثانيا : اضافة متغيرات قرارية جديدة :

سنعود فى هذا الجزء مرة أخرى الى متابعة موضوع تحليل الحساسية لباقى عناصر نموذج البرمجة الخطية والتى تعتمد على نتائج النموذج الثنائي ،ولهذا سنتناول فيما يلي التأثير الذى ينتج عن اضافة متغيرات قرارية جديدة .

ولقد تم تأجيل مناقشة هذا الموضوع حتى يتم استكمال شرح وتفسير النموذج الثنائي ونتائجه وذلك لان من الفوائد والمزايا الاخرى التي يمكن الحصول عليها من صياغة المشكلة الثنائية هى امكانية تقييم تأثير اضافة متغيرات قرارية جديدة .

فعلى سبيل المثال اذا فرض ان الشركة الصناعية التى وردت بالمثال السابق فى مقدمة هذا الفصل والتي كانت تنتج أربعة منتجات هى $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$ ، تفكر في تقديم منتج جديد ($س_٥$) ، وبفرض انه عند اعداد الصياغة الاولية للمشكلة ، لم يدخل متغير أو أكثر من المتغيرات القرارية المحتملة وذلك بسبب عدم التقدير الصحيح لربحيته النسبية ، أو لأن المتغير المستبعد والذي كان من الواجب اعتباره كمنتج جديد ، لم تكن تتوافر عنه كافة المعلومات الخاصة به وقت اعداد الصياغة وحل المشكلة .

في الحقيقة ان هذا الوضع لايمثل مشكلة تعوق الادارة فى معرفة الاثر المحتمل لذلك ، حيث يوجد اختبار بسيط ويسير لتحديد عما اذا كان اضافة المتغير المستبعد (المنتج المستبعد) سيكون سببا فى تغير الحل الامثل (اذا ماتم تمثيله في الصياغة الرياضية) أم لا ؟ وذلك دون الحاجة الى اعادة الصياغة واعادة حل المشكلة من جديد مرة أخرى .

وللتمهيد لهذا الاختبار ، نقول انه سبق وأن ذكرنا عند اعداد صياغة المشكلة الثنائية ، انه يوجد في صياغة المشكلة الثنائية قيد يقابل كل متغير قراري في المشكلة الاولية أو الاصلية . وعلى ذلك فان اضافة متغير قراري جديد للمشكلة الاصلية هو بمثابة اضافة قيد جديد للمشكلة الثنائية .

واستناذا على هذا التوضيح يمكن القول انه بصفة عامة اذا كانت قيم المتغيرات الثنائية بجدول الحل الامثل للمشكلة الثنائية تستوفي اضافة هذا القيد في النموذج الثنائي ، فان الحل الحالي يظل كما هو آمثل اما اذا لم يتم استيفاؤه فسيتطلب الامر تحسين الحل وهذا يعنى ان يفقد الجدول الاخير امثليته .

مثال :

بفرض ان شركة القاهرة للصناعات الهندسية والتي سبق معالجة مشكلتها ،تفكر في اضافة نوعية جديدة من المنتجات ($س_٣$) ، وقد تم تقدير هامش ربحها بمبلغ ١٢ جنيه للوحدة ، كذلك قدرت احتياجاتها من الاقسام الانتاجية كالآتي :

٣ ساعات تصنيع ، ٥ ساعات تجميع ،رقائق حشب من نوع خاص متوافرة ولاتمثل قيد فهل سيترتب على اضافة هذا المنتج الجديد ($س_٣$) ان يفقد الحل الامثل بالجدول الأخير امثليته ؟

الحل :

١- يفيد تصوير جدول الحل الامثل وفقا للصياغة الثنائية والذي سبق وان ظهر على الشكل التالي :

جدول الحل الامثل لمشكلة شركة القاهرة (النموذج الثنائي)

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الارباح الداخلة	٣٦	٤٠	١٠	صفر	صفر
		القيم	$ص_١$	$ص_٢$	$ص_٣$	$ص_٤$	$ص_٥$
٣٦	$ص_١$	١	١	صفر	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$
٤٠	$ص_٢$	٢	صفر	١	$-\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٣}{٨}$
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٣٦	٤٠	٨	٨ -	٦ -
	١١٦	صافي التغير	صفر	صفر	٢	٨	٦

٢- اعداد الصياغة الرياضية للقيد الثنائي الجديد والذى يمثل المتغير القراري الجديد ($س_٣$).

$$٣ص_١ + ٥ص_٢ + صفر ص_٣ \geqslant ١٢$$

٣- نختبر عما اذا كانت قيم المتغيرات الثنائية بالجدول السابق تستوفي هذا القيد أم لا ؟ .

من الجدول يتضح ان قيم المتغيرات الثنائية هي =

$ص_١ = ١$ ، $ص_٢ = ٢$، $ص_٣ =$ صفر

∴ بالتعويض بتلك القيم في القيد الثنائي الذى يمثل المتغير القرارى الجديد ($س_٣$) تكون النتيجة كالآتي :

$$٣ \times ١ + ٥ \times ٢ + صفر \times صفر \geqslant ١٢$$

$$١٣ \geqslant ١٢$$

ومعنى هذه النتيجة ان قيد الثنائية الجديد يفي بالقيم الحالية للمتغيرات الثنائية ، ولذلك فان الحل الثنائي يبقى حلا ممكنا ويكون الحل الاصلى أمثل.ومعنى ذلك ان قرار الانتاج الامثل هو الذى ظهر بالجدول الاخير وانه لن يتم انتاج السلعة الجديدة ($س_٣$) .

ولمزيد من التوضيح وباستخدام اسعار الظل يمكن ان نفسر النتائج السابقة بشكل اكثر تبسيطا، وهذا التوضيح يبدأ بسؤال ، لماذا لم يتم انتاج السلعة $س_٣$، الاجابة ببساطة هى ان مساهمة السلعة الجديدة ($س_٣$) لاتغطى اجمالى قيمة الموارد بسعر الظل . وهذا هو سبب اختلاف الجانب الايمن عن الجانب الايسر للمتباينة (١٣ $\geqslant$ ١٢). ولهذا سنقوم فيما يلي بمقارنة عائد المساهمة للوحدة من $س_٣$ ، بتكلفة الموارد اللازمة لانتاج وحدة من $س_٣$ مقومة بأسعار الظل.

الموارد اللازمة لانتاج وحدة من $س_٣$ مقومة بأسعار الظل: جنيه	جنيه
عدد ٣ ساعات تصنيع × ١ جنيه سعر الظل = ٣	
عدد ٥ ساعات تجميع × ٢ جنيه سعر الظل = ١٠	
رقائق خشب × صفر جنيه سعر الظل = صفر	
مجموع قيمة الموارد مقومة بأسعار الظل	١٣
عائد المساهمة للوحدة من $س_٣$	١٢
الفرق بين الموادر بسعر الظل وعائد المساهمة	١-

وعلى ذلك ، وبناء على نتيجة المقارنة السابقة يمكن ان نستنتج ان مساهمة السلعة الجديدة ($س_٣$) لابد ان تكون أكبر من ١٣ جنيه للوحدة حتى يكون انتاجها مربح. أو العمل على تخفيض احتياجاتها من الموارد بحيث تنخفض مجموع قيمة الموارد مقومة بأسعار الظل لتصبح اقل من ١٢ جنيه. فمثلا اذا تم ضغط احتياجات تلك السلعة من قسم التجميع من ٥ ساعات الى اربعة ساعات فقط ، ستكون هذه السلعة مربحة فى انتاجها وسيتغير الحل الوارد بالجدول الاخير وسيفقد فعاليته ويحتاج الامر الدخول فى جولة تالية لتحسين الحل وختيار $س_٣$ كمتغير داخل .

ثالثا : التغيرات في معدلات استخدام المورد:

Changes in Resource Utilization Rates

يهدف هذا الجزء الى شرح وتوضيح كيف ان البرامج الخطية وجدول الحل الامثل لها ، تعطى الادارة القدرة على تعديل مزيجها الانتاجي الامثل وفقا للتغيرات الانتاجية – القرارات التكنولوجية – وسيكون محور الاهتمام الرئيسي في هذا الجزء هو الاجابة على سؤال اساسي يشغل جزءا كبيرا من اهتمام الادارة عند اتخاذ قراراتها ، وعند الاختيار مابين البدائل المتاحة امامها وهو : ماذا يحدث للمزيج الانتاجي الامثل الحالى

للمنشأة ، اذا كانت احدى الآلات ـ مثلا ـ والمشتركة في العملية الانتاجية ،قد تم تعديلها وتطويرها وأصبحت تتمكن من الانتهاء من دورها في انتاج السلعة في وقت أقل مما كانت عليه ؟

قبل الاجابة على هذا السؤال ، نقول ان عالم اليوم ومايشهده من تطور فنى وتقنى متلاحق وبصفة خاصة فى الآلات والمعدات المستخدمة في انتاج السلع ،سينعكس بلاشك على تخفيض معدل استخدام المنتج المعين للآلة بمدلول الوقت اللازم للانتهاء من اتمام العملية المعينة عليها ، وهذا الامر قد يترتب عليه ان يفقد الحل الامثل امثليته ، ولذلك يتطلب الامر حساب التغيرات فى المعاملات الفنية والتي يستمر الحل الامثل في ظلها دون تغيير. وهذا الحساب يتطلب بالتبعية توضيح الكيفية التي يمكن بها الحصول على تلك النتائج سواء من الحل الأمثل للصياغة الاولية ،أو من جدول الحل الامثل للصياغة الثنائية .

ان التغيرات في المعاملات الفنية قد تحدث للمتغيرات غير الاساسية او للمتغيرات الاساسية ،وتختلف طريقة حساب حدود المتغير فى تلك المعاملات باختلاف عما اذا كان المعامل لمتغير اساسي أو غير أساسي . ولهذا فاننا سنتناول فيما يلى حدود هذه التغيرات لكل نوع من تلك المتغيرات .

(١) التغير في المعاملات الفنية للمتغيرات غير الاساسية :

المتغيرات غير الاساسية هى تلك المتغيرات ذات القيم الصفرية ، وحتى يمكن تحليل آثر التغير في المعاملات الفنية للمتغيرات غير الاساسية على أمثلية الحل بالجدول الاخير نسوق المثال التالي :

مثال :

بفرض ان الصياغة التالية تمثل الصياغة الرياضية الاصلية لمشكلة احدى الشركات :

دالة الهدف = تعظيم ٦$س_١$ + ٢٤$س_٢$

القيود : بشرط أن :

٢$س_١$ + ٣$س_٢$ ≥ ١٥ (قيد الآلة أ)

٢$س_١$ + $س_٢$ ≥ ٨ (قيد الآلة ب)

$س_١$ ، $س_٢$ ≤ صفر

وبالسير في خطوات حل تلك المشكلة باستخدام أسلوب السمبلكس ، تم التوصل الى جدول الحل الأمثل التالي :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٦	٢٤	صفر	صفر
		القيم	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	$س_٤$
٢٤	$س_٢$	٤	$\frac{٢}{٣}$	١	$\frac{١}{٣}$	صفر
صفر	$س_٤$	٤	$\frac{٤}{٣}$	صفر	$-\frac{١}{٣}$	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١٦	٢٤	٨	صفر
	٩٦	صافي التغير	− ١٠	صفر	− ٨	صفر

وبفرض انه حدث تطور تكنولوجي للآلة (أ) مما أدى الى ان السلعة ($س_١$) وهي متغير غير اساسي في الجدول الامثل السابق ، اصبحت تتطلب لتصنيعها وقتا أقل من تلك الآلة ، وبفرض انه قد تم تحديد مقدار الانخفاض في متطلبات التصنيع للسلعة $س_١$ على الآلة (أ) بمقدار معين وليكن (ت) ،أي أن معامل التطور التكنولوجي للمتغير $س_١$ فيمعادلة قيد الآلة (أ) اصبحت (٢− ت) ، ان هذا التغيير سيجعل الصياغة الاولية للمشكلة تصبح كالآتي :

تعظيم ٦$س_١$ + ٢٤$س_٢$

بشرط أن :

(٢ـ ت) $س_{1}$ + ٣$س_{2}$ ≤ ١٥ (قيد الآلة أ المطورة)

٢$س_{1}$ + $س_{2}$ ≤ ٨ (قيد الآلة ب)

$س_{1}$ ، $س_{2}$ ≥ صفر

يتضح من تلك الصياغة ان المتغير الوحيد الذى اضيف الى الصياغة الاولى هو تعديل معامل ($س_{1}$) في القيد الاول ، فبعد أن كان (٢) اصبح بعد التطوير التكنولوجي للآلة (أ) هو (٢ـ ت) . واذا قمنا بحل المشكلة بعد هذا التعديل فسنصل الى جدول الحل الامثل التالي :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٦	٢٤	صفر	صفر
		القيم	$س_{1}$	$س_{2}$	$س_{3}$	$س_{4}$
٢٤	$س_{2}$	٤	$\frac{٢}{٣}$ + $\frac{١}{٣}$ ت	١	$\frac{١}{٣}$	صفر
صفر	$س_{4}$	٤	$\frac{٤}{٣}$ − $\frac{١}{٣}$ ت	صفر	− $\frac{١}{٣}$	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١٦ + ٨ ت	٢٤	٨	صفر
	٩٦	صافي التغير	− ١٠ − ٨ ت	صفر	− ٨	صفر

يمكن من ملاحظة عمود ($س_{1}$) والمعاملات الواردة به بالجدول الامثل بعد التعديل ، بمعاملاته بالعمود قبل التعديل ، وكذلك بمعاملات عمود $س_{3}$ بالجدول بعد التعديل ($س_{3}$ هو المتغير المتمم لغير الآلة أ) ،يمكننا ان نستنتج الآتي :

اذا تم ضرب معاملات عمود ($س_{3}$) بجدول الحل الاصلي في قيمة التخفيض (ت) وجمع الناتج على المعاملات

المقابلة لها في عمود ($س_١$) بجدول الحل الاصلي فسيكون الناتج متطابقا تماما لمعاملات ($س_١$) في جدول الحل الجديد . أي أن :

عمود $س_٣$ الاصلي × ت		عمود $س_١$ الاصلي		عمود $س_١$ الجديد
$\frac{١}{٣}$ ت	+	$\frac{٢}{٣}$	=	$\frac{٢}{٣}$ + $\frac{١}{٣}$ ت
− $\frac{١}{٣}$ ت		$\frac{٤}{٣}$		$\frac{٤}{٣}$ − $\frac{١}{٣}$ ت
٨		١٦		١٦ + ٨ ت
− ٨ ت		− ١٠		− ١٠ − ٨ ت

وهذه العلاقة مهمة جدا ، اذ انها تغنينا عن محاولة اعادة الحل مرة أخرى ، اذ يكفى ان نصل الى الحل الامثل الاصلى ثم عن طريق العلاقة السابقة ، يتم التوصل الى العمود الجديد للمتغير غير الاساسي المطلوب دون حاجة الى الحل ثانية .

ويلاحظ ان قيمة صافى التغير بالجدول الجديد للمتغير $س_١$ (بعد التعديل) مازال معامل سالب أي أن الحل لم يفقد امثليته بنتيجة هذا التعديل . وان هذا التعديل لن يفقد الحل امثليته الا اذا كان صافى التغير للمتغير $س_١$ معامله موجب ، وطالما كان المعامل سالبا فيستمر الحل أمثل كما هو . وعلى ذلك لن تنقلب قيمة صافي التغير للمتغير غير الاساسي ($س_١$) الى قيمة موجبة ويفقد الحل امثليته الا اذا تحقق الشرط التالي :

(− ١٠ − ٨ت) ≥ صفر

ولايمكن ان يتحقق هذا الشرط الا اذا كانت قيمة (ت) اكبر من (−٢٥ر١) وهى مستخلصة من($\frac{١٠}{٨}$ =٢٥ر١) .

فاذا كانت قيمة (ت) فرضا (− ٣ر١) فان قيمة صافي التغير ستصبح موجبة كالآتي :

$-١٠ - ٨ (-٣ر١) = -١٠ + ٤ر١٠ = ٤ر$

ومعنى ذلك انه اذا كانت قيمة (ت) اكبر من ٢٥ر١ (باشارة سالبة) فان صافى التغير للمتغير غير الاساسي (س $_١$) سيصبح قيمة موجبة ، ووفقا لمنهج السمبلكس سيفقد الحل امثليته ، لأنه في هذه الحالة سيتم اختياره كمتغير داخل وتنقلب صفته ليصبح متغيرا اساسيا ومن ثم يتغير الحل .

اذن بصفة عامة يمكن ان نقول انه اذا كان التطور التكنولوجي للآلة (أ) سيؤدى الى اختصار الزمن اللازم لتشغيل السلعة (س $_١$) على الآلة (أ) . فان الحل الاصلي يستمر أمثلا طالما كان هذا التخفيض في الزمن لايزيد عن ٢٥ر١ ساعة ، وحيث ان السلعة (س $_١$) كانت فى الاصل تتطلب ساعتين من الآلة قبل تطويرها . فان الحل الاصلى يستمر أمثلا حتى يكون معامل س $_١$ مامقداره ٧٥ر ساعة ، أما اذا انخفض اكثر من ذلك فان الحل الأمثل لابد وأن يتغير .

من ناحية اخرى فانه جدير بالذكر بأن نحدد هنا ان زيادة وقت تصنيع السلعة (س $_١$) على الآلة (أ) (مثلا نتيجة قدم الآلة واستهلاكها وبطئها وكثرة اعطالها) لن يغير من الحل الامثل مهما كانت هذه الزيادة ، والسبب في ذلك ان س $_١$ حاليا غير منتجة ، أي متغير غير أساسي فما بالنا لو زادت مانحتاجه من ساعات تشغيل انها ستكون اقل ربحية عما هى عليه ومن ثم يظل الحل أمثل في الحدود التالية :

$$(-) \quad ١ر٢٥ \leqslant ت \leqslant \text{مالانهاية}$$

أي ان الحل الامثل الحالي يظل كما هو دون تعديل في حالة تراوح معامل س $_١$ (المتغير غير الاساسي) في القيد الاول بين ٧٥ر ساعة ، ومالانهاية .

الا اننا نرى ان استخدام النتائج التى يمكن التوصل اليها من النموذج الثنائي ايسر وأسرع وأسهل فى تحليل حساسية التغير فى المعاملات الفنية • وحيث انه قد سبق لنا حل المشكلة الاولية ، اذن يمكننا ان نستنتج قيم الحل الثنائي من خلال جدول الحل الاخير للمشكلة الاعلية بدلا من اعادة الحل بالثنائية • ويمكن استخراجها من صف صافي التغير • لذلك سنجد ان قيمة ص$_1$ =٨ ، ص$_2$= صفر

وفيما يلى نوضح كيف يمكن استخدام مدخل الثنائية في ايجاد حدود التغيير في المعاملات الفنية للمتغيرات غير الاساسية (س$_1$) •

ووفقا لمنهج الثنائية ، فكل قيد فى المشكلة الثنائية يقابل متغير قراري بالمشكلة الاولية ، وحيث اننا نقوم بتحليل المتغير غير الاساسي (س$_1$) ، فان تعاملنا بالتالى سيكون مع القيد الثنائي الاول الذي يقابل (س$_1$) وهو :

٢ص$_1$ + ٢ ص$_2$ ⩾ ٦ (قيد المتغير القراري س$_1$)

فاذا فرضنا ان هناك تخفيضا في المعامل الفني مقداره (ت) اذن سنجد ان صورة ذلك القيد ستصبح:

(٢– ت)ص$_1$ + ٢ص$_2$ ⩾ ٦ (قيد المتغير القراري س$_1$ بعد التعديل)

وبالتعويض بقيم ص$_1$ ، ص$_2$ في معادلة هذا القيد =

(٢ – ت) × ٨ + ٢ × صفر ⩾ ٦

١٦ – ٨ ت ⩾ ٦

ت ⩾ ١ر٢٥ (مع وضع الاشارة السالبة لتحديد الاتجاه)

وهي نفس النتيجة التى وصلنا اليها عند التعامل مع المشكلة الاولية ، الا انه يلاحظ ان هذه الطريقة اسرع وأقل في عملياتها الحسابية •

بل في رأينا انه يمكن تبسيط العمليات الحسابية السابقة ايضا بمفهوم اسعار ظل الموارد وفكرة التعادل بين عائد المساهمة (٦) وبين قيمة الموارد المستخدمة مقومة بأسعار الظل . فالتعادل يتحقق عندما يكون :

قيمة الموارد المستخدمة في انتاج $س_١$ = عائد المساهمة

وحيث ان اسعار الظل كانت $ص_١$ = ٨ ، $ص_٢$ = صفر

∴ سيكون التساؤل ماهي قيمة معامل $ص_١$ التى تجعل هناك تعادل بين جانبي قيد المعادلة السابقة ،ولنرمز بذلك المعامل بالرمز (ف) .

$$∴ \quad ص_١ + ٢ ص_٢ = ٦$$

$$ف \times ٨ + ٢ \times صفر = ٦$$

$$٨ ف = ٦$$

$$∴ \quad ف = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤} = ٧٥ر$$

أي ان ادنى معامل للمتغير غير الاساسي ($س_١$) دون أن يتغير الحل الامثل هو ٧٥ر ساعة ، أما اذا حدث انخفاض أكثر من ذلك سنجد أن عائد المساهمة لهذا المتغير أصبح يفوق قيمة الموارد المستخدمة مقومة بأسعار الظل فيكون من الافضل ان يدخل هذا المتغير الحل كمتغير أساسى ومن ثم يفقد الحل أمثليته .

(٢) التغير في المعاملات الفنية للمتغيرات الاساسية :

يمكن القول هنا بصفة عامة أن أي تغير زيادة كان أو نقصا في المعاملات الفنية للمتغيرات الأساسية ستؤدى الى تغير امثلية الحل ، فاذا ارتفع المعامل بأي مقدار سيكون هناك حالة عدم تعادل بين قيمة الموارد المستخدمة مقومة بأسعار الظل وبين عائد المساهمة ومن ثم يفقد هذا المتغير ميزته الربحية التى كان عليها ،والعكس سيصبح مربحا أكثر وأكثر مما كان عليه مما يترتب

عليه توجيه المزيد من الطاقة الانتاجية .

فمثلا المتغير القرارى الاساسي في الجدول الاخير للمثال السابق هو ($س_{٢}$) كان معامله فى قيد الآلة (أ) ٣ ساعات ، فماذا يحدث لو حدثت زيادة في هذا المعامل .

القيد الثنائي المقابل للمتغير $س_{٢}$: $٣ص_{١} + ص_{٢} \geqslant ٢٤$

وبالتعويض بقيم $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ = صفر

$$٣ \times ٨ + ١ \times صفر \geqslant ٢٤$$

$$٢٤ \geqslant ٢٤$$

أي أن هناك حالة تعادل . ولكن بفرض أن عـــدد الساعات المطلوبة ارتفعت من ٣ الى ٥ر٣ ساعة .بالتعويض :

$$٥ر٣ \times ٨ + ١ \times صفر \geqslant ٢٤$$

$$٢٨ \geqslant ٢٤$$

وهذا يعنى ان قيمة الموارد المستخدمة مقومـــة بأسعار الظل زادت عن عائد المساهمة ومن ثم أصبحـــت السلعة غير مربحة في انتاجها .

خلاصة القول أن اقصى نقص وأقصى زيادة للمعامـلات الفنية للمتغيرات الأساسية هى صفر حتى لايتغير جـــدول الحل الأمثل ويفقد أمثليته .

* *

أسئلة وتطبيقات :

(١) ماهو المقصود بأسلوب تحليل الحساسية فى البرامج الخطية ؟ ، وماهي التغيرات التي يمكن أن تحدث في حالة مشاكل البرامج الخطية والتى يعالجها اسلوب تحليل الحساسية ؟ .

(٢) ماهى أهمية تحليل حساسية الحل الأمثل فى ترشيد القرارات الادارية ؟ .

(٣) علل لما يأتي :

أ - ان النقص أو الانخفاض فى معامل دالة الهدف لأي متغير قراري غير اساس لن يؤدى الى تغير الحل الأمثل ، وأن الأثر الوحيد الذى سينتج عن هذا الانخفاض انه سيجعل هذا المتغير غير مربح عما كان عليه .

ب - الحد الاقصى للزيادة فى معادلة دالة الهدف للمتغير غير الاساسي والتى لاتؤدى الى تغيير أمثلية الحل لابد أن تكون زيادة كافية تماما وبالضبط لجعل قيمة صافي التغير لهذا المتغير مساوية للصفر .

جـ - ان أي زيادة في معامل دالة الهدف للمتغير القراري غير الاساسي فى حالة مشاكل التخفيض لن تؤثر على امثلية الحل .

د - طالما ان قيم صافي التغير للمتغيرات غير الاساسية تظل سالبة أو مساوية للصفر (في مشاكل التعظيم) ،فان الحل الوارد بجدول السمبلكس الأخير يظل هو الحل الأمثل .

هـ - اذا كانت طاقة القيد المتاحة (ثابت القيد) ،لم تستنفذ بكاملها فى الحل الأمثل ، فان أي زيادة في طاقة ذلك القيد لن تؤثر

على أمثلية الحل .

و ــ اذا لم تستنفذ طاقة القيد بالكامل في الحل الأمثل ،فان عدد الوحدات التى لم تستغل تمثل الحد الاقصى الذى يمكن ان تنخفض به طاقة ذلك القيد دون أن يتأثر الحل الأمثل .

ز ــ ان الصياغة المقابلة أو الثنائية تنظر الى المشكلة من منظور مختلف عن الصياغة الأولية أو الاصلية ولكنهما يحققان نفس قيمة دالة الهدف .

ح ــ ان المشكلة الثنائية تحاول ان تدنى أو تخفض قيمة الموارد المتاحة ،ولكن أيضا بضمان أن تكون قيم الموارد المستخدمة هي على الأقل تعادل مساهمة الوحدة من كل منتج .

ط ــ ان الحل الممكن المبدئي للمشكلة الاولية غير ممكن بالنسبة للمشكلة الثنائية .

(٤) وضح العلاقة بين حل المشكلة الاولية والمشكلة الثنائية ؟

(٥) كيف يمكن استخدام نتائج حل النموذج الثنائي في تحديد القيمة الحدية للموارد الاضافية ؟ .

(٦) فيما يلى الصياغة الرياضية الأولية لاحدى مشاكل البرمجة الخطية ،والمطلوب اعداد الصياغة الثنائية لها .

دالة الهدف : تعظيم ٣س$_١$ + ٢س$_٢$ + ٧س$_٣$

القيود : بشرط أن :

س$_١$ + س$_٢$ + س$_٣$ $\geqslant$ ٥٠

٢س$_١$ + ٥س$_٢$ + ٢س$_٣$ $\geqslant$ ٢٠٠

س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ $\leqslant$ صفر

(٧) تقوم شركة الامل الصناعية بانتاج حاسبات الكترونية للجيب ، تم تصميمها وبرمجتها لتقوم بأداء مجموعة من الالعاب الرياضية للتسلية ، ويتركز انتاج الشركة حاليا في انتاج لعبة كرة القدم،ولعبةكرة السلة . والجدول التالي يقدم ملخصا للمراحل الانتاجية وهامش ربح الوحدة من كل تلك الالعاب .

البيان	احتياجات الوحدة		الطاقة في الساعة
	كرة القدم	كرة السلة	
طبع اللوحات	٢ دقيقة	٣ دقيقة	٦٠دقيقة
لصق الاجزاء	٢ ،،	١ ،،	٥٠ ،،
التجميع	١ ،،	١ ،،	٤٠ ،،
هامش الربح	٣ جنيه	$\frac{1}{2}$ ٢جنيه	

<u>والمطلوب</u> :

أ ــ صياغة المشكلة السابقة من مشاكل البرمجةالخطية .

ب ــ ايجاد المزيج الامثل من كل من العاب كرة القدم وكرة السلة لتعظيم الارباح .

جـ ــ ماهو معدل الربح فى الساعةللانتاج الذى تم تعيينه في (ب) .

د ــ كم يبلغ التغير الذى يمكن أن يحدث في ربح لعبة كرة السلة ،دون أن يتغير الحل الأمثل الذى تم التوصل اليه في (ب) .

هـ ــ كم يبلغ التغير الذى يمكنأن يحدث في ربح الوحدة من لعبة كرة القدم دونأن يتغير الحل الامثل الذى تم التوصل اليه في (ب).

و ــ كم يبلغ التغير الذى يمكن ان يحدث في قيد طاقة قسم التجميع دون أن يغير من المزيج الأمثل للمنتجات أو من كميات الحل الأمثل .

ز – ماهو مقدار الربح الاضافي الذي يمكن ان يتولد اذا امكن زيادة ساعات طاقة قسم لصق الاجزاء ٠

(٨) قدمت اليك احدى الشركات البيانات التالية :

- يمكن للشركة انتاج ثلاثة أنواع من المنتجات يرمز اليها بالرموز الآتية : (أ) ، (ب) ، (ج) ٠
- تحتاج الوحدة من المنتج (أ) الى ٥ كيلو جرامات من المادة الخام (ك) ، و ٤كيلوجرامات من المادةالخام (ن) ،و٣ ساعات عمل من مركز الانتاج ($ص_1$) ٠
- تحتاج الوحدة من المنتج (ب) الى ٣كيلو جرام من الخام (ك) ،و٢ كيلوجرام من المادةالخام (ن) ،وساعتين عمل فى مركز الانتاج ($ص_1$) ٠
- تحتاج الوحدة من المنتج (ج) الى ٧كيلوجرامات من المادةالخام (ك) ،و ٥كيلوجرام من المادة الخام (ن) ،و٤ ساعات عمل في مركز الانتاج ($ص_1$) ٠
- تبلغ الكميات المتاحة من المادة الخام (ك) ٢١٠٠ كيلوجرام، ومن المادة (ن) ١٦٠٠ كيلو جرام ، كما تبلغ ساعات العمل المتاحة في مركز الانتاج $ص_1$ ١٧٠٠ ساعة٠
- تبلغ تكلفة الكيلوجرام من المادة الخام (ك) اربعة جنيهات ، ومن المادة الخام (ن) ٣جنيهات كما يبلغ معدل أجر الساعة فى مركز الانتاج $ص_1$ جنيها واحدا٠
- تبلغ التكاليف المتغيرة الاخرى للوحدة من المنتج (أ) خمسة جنيهات ،والوحدة من المنتج (ب) ستة جنيهات ، والوحدة من المنتج (ج) ثلاثة جنيهات٠
- تقدر التكاليف الثابتة للشركة عن الفترة بمبلغ ٢٥٠٠ جنيها ٠
- ينتظر أن تكون أسعار بيع المنتجات أ ،ب ، ج

على الترتيب (٥ ، ٣٢ ، ٥٢ جنيها ٠

والمطلوب :

أ - تحديد تشكيلة المنتجات التى تحقق اقصى ربح مستخدما طريقة السمبلكس ٠

ب - صياغة المشكلة فى صورتها الثنائية وليحل جدول الحل الامثل ٠

ج - تحليل حساسية الحل الأمثل للتغيرات في :

- معاملات دالة الهدف ٠
- المعاملات الفنية للقيود ٠
- طاقة الموارد ٠
- تحديد اسعار الظل ٠

د - بفرض اضافة قيد جديد للمشكلة الاصلية على الصورة التالية ($٢س_١ + ٣س_٢ + س_٣ \geqslant ٥٠٠$)

فما هو أثر ذلك على أمثلية الحل بالجدول الأخير ٠

(٩) فيما يلى الصياغة الأولية للمشكلة التى تواجه احدى الشركات لاختيار المزيج الانتاجى لها ،والمطلوب ايجاد الصياغة الثنائية لها ٠

دالة الهدف : تخفيض $٣س_١ + ٣س_٢ + ٤س_٣$

القيود : بشرط أن :

$$٣س_١ - ٢س_٢ \leqslant ٥٠$$

$$س_١ + س_٢ + س_٣ \leqslant ٣٠$$

$$٢س_١ + \frac{١}{٢}س_٢ + س_٣ \leqslant ٢٠$$

$$س_١ ، س_٢ ، س_٣ \leqslant \text{صفر}$$

(١٠) المطلوب اعادة صياغة المشكلة الاولية الآتية لتكون ممثلة للصياغة الثنائية :

دالة الهدف : تخفيض $٤س_1 + ٣س_2 + ٢س_3 + ٤س_4$

القيود : بشرط أن :

$$س_1 + س_2 + س_3 + س_4 \geq ٧$$

$$س_1 + ٢س_2 + س_3 + ٣س_4 \geq ٢٥$$

$$س_1 ، س_2 ، س_3 ، س_4 \geq صفر$$

(١١) بفرض انه قد تم اعداد الصياغة الرياضية لمشكلة احدى الشركات على الصورة التالية :

دالة الهدف : تخفيض $١٠س_1 + ٢٠س_2 + ٣٠س_3$

القيود : بشرط أن :

$$س_1 + س_2 + س_3 \geq ١٠٠$$

$$٤س_1 + ٣س_2 + ٢س_3 \geq ٣٢٠$$

$$س_3 \geq ٤٠٠$$

$$س_1 ، س_2 ، س_3 \geq صفر$$

وقد تم صياغة وحل المشكلة الثنائية للمشكلة الاولية السابقة وكان جدول الحل الأخير للصياغة الثنائية كالآتي :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١٠٠	٣٢٠	٤٠	صفر	صفر	صفر
		القيم	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ص_4$	$ص_5$	$ص_6$
٣٢٠	$ص_2$	$\frac{٥}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	١	صفر	$\frac{١}{٤}$	صفر	صفر
صفر	$ص_5$	$\frac{٢٥}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	صفر	صفر	$-\frac{١}{٤}$	١	صفر
٤٠	$ص_3$	٢٥	$\frac{١}{٢}$	صفر	١	$-\frac{١}{٢}$	صفر	١
دالة الهدف		التكاليف الداخلة	١٠٠	٣٢٠	٤٠	٦٠	صفر	٤٠
١٨٠٠		صافي التغير	صفر	صفر	صفر	-٦٠	صفر	-٤٠

<u>والمطلوب</u> :

أ ــ صياغة المشكلة الثنائية رياضيا ٠

ب ــ ماهو الحل الامثل للمشكلة الاولية ٠

جـ ــ وضح حدود التغيرات التى يمكن ان تحدث على عناصر نموذج هذه المشكلة دون أن تؤثر على امثلية الحل بالجدول الأخير ٠

(١٢) بفرض ان الصياغة التالية تمثل مشكلة احدى الشركات:

دالة الهدف : تعظيم $3\text{س}_1 + 7\text{س}_2 + 5\text{س}_3$

القيود : بشرط أن :

$$\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 \leq 100$$

$$2\text{س}_1 + 3\text{س}_2 + \text{س}_3 \leq 200$$

$$\text{س}_1 ، \text{س}_2 ، \text{س}_3 \geq \text{صفر}$$

وقد تم حل المشكلة السابقة ، وفيما يلى جدول الحل الأمثل لها :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٣	٧	٥	صفر	صفر
		القيم	س_1	س_2	س_3	س_4	س_5
٥	س_3	٥٠	$\frac{1}{2}$	صفر	١	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
٧	س_2	٥٠	$\frac{1}{2}$	١	صفر	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٦	٧	٥	٤	١
	٦٠٠	صافي التغير	-٣	صفر	صفر	-٤	-١

<u>والمطلوب</u> :

أ ــ ماهو المزيج الانتاجي الامثل لتلك المشكلة ؟

ب ــ صياغة المشكلة الثنائية ؟

حـ ـ ماهو الحل الامثل للمشكلة الثنائية ؟

د ـ ماهو مدى التغير فى معاملات الهدف للمتغيرات القرارية ؟ .

هـ ـ ماهي حدود التغير في طاقة الموارد والتى يستمر معها وضع المتغيرات الاساسية كما هـو دون تغير ؟

و ـ ماهي القيمة المثلى لدالة الهدف اذا كان ثابت القيد الاول (الطرف الايسر من القيد) ١٢٠ بدلا من ١٠٠ ؟ .

(١٣) بفرض ان المشكلة التى تواجه شركة انتاج لعب الاطفال تم صياغتها كالآتي :

دالة الهدف : تعظيم ٣س$_{١}$ + ٥ر٢س$_{٢}$

القيود : بشرط أن :

٢س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ ≤ ٦٠ (طاقة الطبع)

٢س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≤ ٥٠ (طاقة اللصق)

س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≤ ٤٠ (طاقة التجميع)

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≥ صفر

ولقد تم اعادة صياغة تلك المشكلة فى صورة الصياغة الثنائية فأصبحت كالآتي :

دالة الهدف : تخفيض ٦٠ص$_{١}$ + ٥٠ص$_{٢}$ + ٤٠ص$_{٣}$

القيود : بشرط أن :

٢ص$_{١}$ + ٢ص$_{٢}$ + ص$_{٣}$ ≥ ٣

٣ص$_{١}$ + ص$_{٢}$ + ص$_{٣}$ ≥ ٥ر٢

ص$_{١}$ ، ص$_{٢}$ ، ص$_{٣}$ ≥ صفر

وبعد اضافة المتغيرات الراكدة الى الصياغة الاولية (الاصلية) وحل المشكلة الاصلية كان جدول الحل الأمثل كالآتي :

معاملات الهدف	التغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٣	٢ر٥	صفر	صفر	صفر
		القيم	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$س_4$	$س_5$
$\frac{1}{2}$	$س_2$	٥	صفر	١	$-\frac{1}{2}$	صفر	صفر
٣	$س_1$	$\frac{45}{2}$	١	صفر	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	صفر
صفر	$س_5$	$\frac{25}{2}$	صفر	صفر	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٣	$\frac{5}{2}$	١	$\frac{3}{2}$	صفر
	٨٠	صافي التغير	صفر	صفر	-١	$-\frac{3}{2}$	صفر

والمطلوب :

تحويل جدول الحل الامثل للمشكلة الاولية الى جدول الحل الامثل للمشكلة الثنائية .

الفصل الرابع

برمجـــــة الأهداف

* مقدمـــــــة .
* حالة عدم وجود حل ممكن .
* تعدد الأهداف ووضع الأولويات .
* صياغة وتمثيل وحل نموذج برمجة الأهداف بيانيا .
* صياغة وحل نموذج برمجة الأهداف بطريقـــــــة السمبلكس .
* تحليل حساسية نتائج حل نموذج برمجة الأهداف .

الفصل الرابع

برمجـــة الأهـــــداف

Goal programing

مقدمـــة :

تنـاولـنـا فى الـفصول الـثلاثة المتقدمة موضـــــوع البرمجة الخطية ، وقد أوضحنا فيها كيفية التعامل مع تلك المشاكل التى تتصف بأنها ذات هدف واحـــــد ، أو مايطلق عليه المشاكل وحيدة الهدف ، والتى كان لهـــا على الاقل حل واحد ممكن . ولذلك وجدنا أن الصياغـــة الرياضية لنموذج البرمجة الخطية كان يتضمن هدفـــا واحدا في دالة الهدف (تخفيض أو تعظيم) في ضوء التقيد والالتزام بعدد من القيود . ونموذج البرمجة الخطيـــة على الصورة التى تناولناها في معالجة المشاكل وحيـدة الهدف يتفق مع النظرية الاقتصادية التي تـــرى أن أي منشأة تسعى لتحقيق هدف وحيد ومحدد تجند كافـــــة امكاناتها لتحقيقه وبلوغه ، ولذلك نجد أن نمـــوذج البرمجة الخطية يعتمد على ايجاد الحل الأمثل لمشكلـــة تم صياغتها على صورة نموذج رياضي يتضمن هدفا واحـــدا يعبر عنه بدالة هدف النموذج مع الخضوع لعدد مـــــن القيود المتجانسة أو غير المتعارضة .

وظهرت الكثير من الكتابات فى السنوات الأخيـــرة مؤكدة أن هدف تحقيق وتعظيم الربح لايعتبر بمثابـــة الهدف الوحيد الذى تجند له المنشأة كافة امكاناتهـــا للوصول اليه ، ولكن المنشأة تسعى الى تحقيق أهـــداف متعددة Multiple objectives ،فمتطلبات الحيـــاة العملية والظروف والضغوط التى تفرضها وكذلك واقـــع المنشأة وظروفها الداخلية ، كل ذلك جعل المنشأة تسعى

لتحقيق مجموعة من الاهداف اقتصادية وغير اقتصاديـة ، وغالبا مايوجد تعارض وتناقض واضح في تلك الأهداف ، وسواء كان ظهور تلك الاهداف والأخذ بها والسعى الى تحقيقها ، نتيجة ضغوط وظروف من خارج المنشأة ، أو نتيجة رغبة الادارة ذاتها ، فان ذلك لايغير من حقيقة أن الاهداف غير الاقتصادية قائمة وموجودة وتوجد تعارضا وتناقضا مع الأهداف الأخرى .

ونتيجة للاهتمام المتزايد بدراسة مشاكل تعدد الأهداف ، وماقد ينتج عنه من تعارض وتناقض بين تلك الاهداف ، ونتيجة لقصور النماذج التقليدية للبرمجة الخطية فى معالجة هذا النوع من المشاكل ، لذلك فقد آثرنا ان نخصص هذا الفصل لتناول واستعراض الطريقة التي يمكن أن نعالج بها المشاكل متعددة الأهداف .

وهذه الطريقة والتى تستخدم في معالجة هذه النوعية من المشاكل يطلق عليها اصطلاح نموذج برمجة الأهداف Goal Programming Model ، وقد اطلق عليها هذا الاسم لأنها تحاول ان تفي أو تحقق مجموعة من الأهداف المتعددة أو المستويات المحددة للأهداف ، ولذلك تتطلب تلك الطريقة أن توضع تلك الأهداف فى صورة Priority order ثم محاولة تخفيض مقدار عدم تحقيق أي هدف Underachievement مبتدئين بهدف الاولوية الأعلى Higher-Priority Goal ، وحيث أنه لايوجد حل يمكننا من تحقيق كافة الاهداف في آن واحد (لوجود تعارض وتناقض بينها) ، فان الحل الأمثل يكون عندما يتم تخفيض مقدار عدم التحقق لأي هدف على الا يكون ذلك على حساب هدف الاولوية الأعلى .

وتاريخيا فانه يرجع الفضل الى كل من كوبر Cooper وفرجيسون Ferguson فى ظهور فكرة برمجة الاهداف ، وذلك حينما عهدت اليهم شركة جنرال

اليكتريك في عام ١٩٥٢ باعداد جدول للأجور للعاملين بأحد الاقسام الانتاجية بالشركه ، على أن يراعي في هذه الاجور تحقيق عدد من الاهداف منها أن تتناسب مع مستوى المسئولية الملقاه على شاغل الوظيفة ، وقيمة الخدمة المتوقعة ، ومستوى المعيشة ، والتحفيز ، ونمو المنشأة ، ازدياد الخبرة وغيرها من الاهداف . ولهذا فقد استطاعا ان يتوصلا الى نموذج رياضي يعمل على تخفيض الانحرافات عن مجموعة الأهداف المحددة الى أدنى حد ممكن وتلك كانت البداية لظهور كتاب Management Goals and Accounting for Control للمؤلف ايجيرى Ijiri وفيه يقدم نقاشا منطقيا ورياضيا يستعرض فيه فكرة اسلوب برمجة الأهداف . ثم توالت الكتابات في هذا الموضوع منذ هذا التاريخ وظهرت العديد من التطبيقات العملية لهذا الاسلوب وشملت معظم الميادين والمجالات الادارية من تخطيط انتاج ، وتخطيط قوى عاملة ، وتخطيط مالى ، وتخصيص الموارد ، ومع ذلك كله فانه يمكن القول بأن هذا الاسلوب لم يحدث حتى الآن تغطية شاملة لجميع جوانبه ، واننا كل يوم نجد هناك تطويرات تضاف اليه ودراسات تركز على اكتشاف نواحى الغموض به . ومن ثم فاننا نرى انه مجال خصب للدراسة والبحث ويتعين على الدارسين والباحثين ان يتناولوا هذا الموضوع فى دراساتهم وبحوثهم فما زال أسلوباً جديداً وبه نواحى كثيرة وزوايا متعددة واستخدامات متباينة تتطلب الفحص والتمحيص حتى يصل الى المستوى الذى يمكن متخذ القرار في الاعتماد عليه فى عالم اليوم الملىء بالضغوط والمصالح والاهداف المتعارضة سواء كان ذلك على المستوى الفردى أو على مستوى المنشآت او حتى على المستوى القومي .

وقبل الدخول فى تفصيلات اعداد الصياغة الرياضية لنموذج برمجة الاهداف وخطوات الوصول الى الحل الأمثل للمشكلة ، يهمنا أولا توضيح الأسباب التي يترتب عليها

ظهور حالة عدم وجود حل ممكن للمشكلة المراد ايجاد حل أمثل لها . حيث أن هذا التوضيح يعتبر مقدمة ضرورية لادراك الوضع المترتب على وجود تعدد في الاهداف التي تحمل نوعا من التعارض أو التناقض فيما بينها، وكيف انه من الضروري البحث عن أسلوب أو طريقة تصلح للتعامل مع المشاكل من هذا النوع .

حالة عدم وجود حل ممكن No Feasible Solution

ان عدم وجود حل ممكن لمشكلة البرمجة الخطية قد يكون بسبب وجود خطأ في صياغة المشكلة (استخدام اشارة أقل من أو يساوي $\geq$ في الوقت الذى كان يتعين فيه استخدام اشارة اكبر من أو يساوى $\leq$)، أو بسبب وجود تعارض وتناقض في القيود المفروضة أو الأهداف المطلوبة ، أي أن الصياغة سليمة وصحيحة ولكن لايوجد حل يستوفي كافة القيود و الأهداف ، ويهمنا في هذا المجال توضيح السبب الثاني حيث انه هو المتعلق مباشرة بموضوع هذا الفصل ، اذ يهمنا توضيح كيف أن وجود تعارض وتناقض في القيود أو في الاهداف يترتب عليه عدم الامكانية Infeasibility أي عدم وجود حل ممكن .

مثال :

يحاول مدير الانتاج باحدى الشركات الانتاجية وضع جدولة لانتاج الاسبوع القادم من نوعين من منتجات الشركة النوع الاول يمثل جهاز فيديو حجم كبير وتعطى الوحدة منه هامش ربح مقداره مائة جنيه ، والنوع الثاني يمثل جهاز فيديو من الحجم الصغير وتعطى الوحدة منه هامش ربح مقداره ثمانون جنيها، ويهدف مدير الانتاج الى تحديد المزيج الانتاجي الأمثل للاسبوع القادم والذى يحقق اعلى ربحية ممكنة . علما بأنه قد تبين من المعلومات المتاحة بقسم التسويق أن هناك ارتباطات مع

بعض العملاء يتعين الالتزام بها وتتمثل فى تسليمهم عدد ١٠٠ جهاز حجم كبير ، وعدد ٢٠٠ جهاز حجم صغير في نهاية الاسبوع القادم. كذلك فان مدير الانتاج على بينة تامة من أن قوة العمل المتاحة لديه لاتزيد عدد ساعات التشغيل الاسبوعي لها عن ٦٠٠ ساعة عمل ، وتحتاج النوعية الأولى من الاجهزة الى ثلاثة ساعات عمل لتجميعها ،وتحتاج النوعية الثانية الى ساعتين عمل فقط .

والمطلوب في ضوء المعلومات السابقة ايجاد المزيج الانتاجي الأمثل للاسبوع القادم والذى يعمل على تعظيم الربح .

الحل :

يمكن صياغة تلك المشكلة كمشكلة من مشاكل البرمجة الخطية كالآتي :

بفرض ان : $س_1$ = عدد أجهزة الفيديو من الحجم الكبير والتى سيتم انتاجها.

$س_2$ = عدد اجهزة الفيديو من الحجم الصغير والتي سيتم انتاجها.

اذن ستكون الصياغة الرياضية على الصورة التالية :

دالة الهدف : تعظيم $١٠٠س_1 + ٨٠س_2$

القيود :

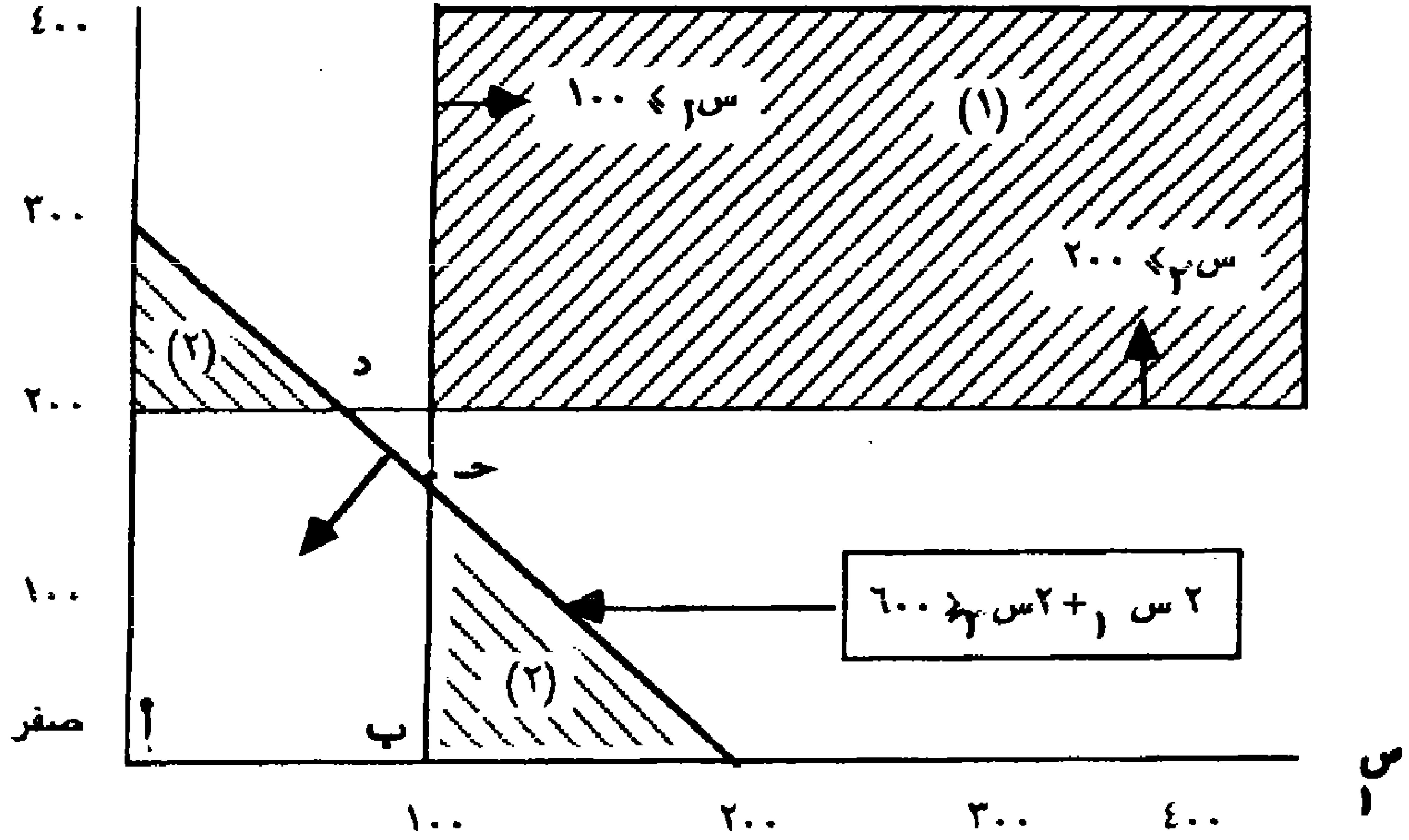
$س_1 \leqslant ١٠٠$ (قيد تلبية طلبات العملاء من الفيديو الكبير).

$س_2 \leqslant ٢٠٠$ (قيد تلبية طلبات العملاء من الفيديو الصغير)

$٣س_1 + ٢س_2 \geqslant ٦٠٠$ (قيد القوة العاملة)

$س_1 ، س_2 \leqslant$ صفر (شرط عدم السلبية)

وبعد السير فى خطوات الحل باستخدام الطريقة البيانية ، سنصل الى الشكل التالي والذي يمثل التمثيل البياني لهذه المشكلة .



من هذا الشكل يتضح عدم وجود منطقة للحلول الممكنة تراعي كافة القيود المفروضة على المشكلة ، أي أنه لايوجد حل ممكن لهذه المشكلة ، اذ يتبين من ملاحظة اتجاه الاسهم المرسومة والتي تحدد اتجاه القيود الثلاثة عدم اتفاقها ووجود تعارض بينها .

ومن خلال النظرة الفاحصة للرسم البياني السابق وبصفة خاصة للمناطق المظللة فانه يتبين انه على الرغم من ان كل قيدين معا من قيود المشكلة يشكلان مع بعضهما منطقة ممكنة معينة ، الا أنه عند اضافة خط القيد الثالث فانه يطرد كل النقاط الممكنة والتي تستوفي القيدين الآخرين ، فالمناطق المظللة فى الشكل السابق تمثل ثلاثة مواقع أو مناطق ممكنة كل منطقة منها تكونت من خلال التمثيل البياني لزوج من القيود ، فمثلا المنطقة الممكنة رقم (١) تشكلت من خلال التمثيل البياني لقيد العدد الواجب انتاجه من أجهزة الفيديو كبيرة الحجم ($س_1 \geq ١٠٠$) ، وقيد العدد الواجب انتاجه من اجهزة الفيديو صغيرة الحجم ($س_2 \geq ٢٠٠$) ،

الا انه عند اضافة الخط الممثل لقيد القوة العاملة فأنه وفقا لاتجاه هذا الخط سيطرد كل النقاط الممكنه والموجودة بالمنطقة (١) ، لأن هذه المنطقة بكاملها أصبحت فى الجانب غير الممكن لخط القيد الثالث ،ونفس النتيجة تحدث مع باقى المناطق الممكنة التى تكونت كل منها من زوج من القيود الواردة بالصياغة .

وبطبيعة الحال فانه سيتضح جليا وبمجرد النظر الى الشكل السابق ، ان المشكلة بالغة التعقيد، حيث لايمكن انتاج الكمية التى تفى بالتعاقدات المبرمة مع العملاء من كل من النموذجين طالما كان قيد طاقة القوة العاملة يمثل قيدا صارما على الصورة التى ورد بها بالصياغة الرياضية للمشكلة ، ولعلنا نتساءل الآن كيف يمكن حل هذه المشكلة . ولعله من نافلة القول أن نذكر هنا على عجالة على ان نترك التفصيلات لموضع آخر أنه يتعين لايجاد حل لتلك المشكلة فانه ينبغي أن يكون واحدا من تلك القيود أقل صرامة واحكاما وتقييدا الى الحد الذى لايطرد باقي النقاط الممكنة أو المنطقة الممكنة التى تشكلت بباقى القيود .

ومن ناحية اخرى وبفرض أننا حاولنا حل تلك المشكلة باستخدام خطوات منهج طريقة السمبلكس ،فاننا نرغب فى تحديد سمات أو خصائص جدول الحل والذى منه نقف على حقيقة أن حل المشكلة غير ممكن .

وبفرض حل المشكلة السابقة باستخدام طريقة السمبلكس وبعد السير فى خطوات الحل من حيث تعديل الصياغة الرياضية الأصلية للمشكلة باضافة المتغيرات الراكدة والاصطناعية واعداد جدول الحل المبدئي واختبار مثاليته وتحسين الحل فى جداول متتالية ،فان جدول الحل الأخير الذى سنصل اليه سيظهر على الصورة التالية :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١٠٠	٨٠	صفر	صفر	صفر	١٠٠-	١٠٠-
		القيم	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	س$_{٤}$	س$_{٥}$	س$_{٦}$	س$_{٧}$
٨٠	س$_{٢}$	٢٠٠	صفر	١	صفر	صفر	١-	صفر	١
١٠٠	س$_{١}$	٢٠٠/٣	١	صفر	١/٣	صفر	٢/٣	صفر	- ٢/٣
- ١٠٠	س$_{٦}$	١٠٠/٣	صفر	صفر	- ١/٣	- ١	- ٢/٣	١	٢/٣
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١٠٠	٨٠	٢٠٠/٣	١٠٠	١٦٠/٣	١٠٠-	- ١٦٠/٣
	٤٩٠٠٠/٣	صافي التغير	صفر	صفر	- ٢٠٠/٣	- ١٠٠	- ١٦٠/٣	صفر	- ١٤٠/٣

ويتضح من هذا الجدول ان كل معاملات صف صافي التغير اما صفرية أو سالبة ، وهذا يعني ان هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل، الا أننا سنجد آن المتغير الاصطناعي (س$_{٦}$) ظهر فى الحل الأمثل كمتغير أساس ، ومن المعروف أننا نضيف المتغيرات الاصطناعيه لنجعل من النقطة الركنية نقطة ممكنة ونعاملها على هذا الاساس ، ثم ننتقل منها الى نقطة أفضل لتحسين دالة الهدف ، ونستمر فى ذلك حتى نصل الى النقطة الطرفية المثلى ، اذن كان ينبغى طالما ان هذا الجدول يمثل الحل الامثل ان يختفى المتغير الاصطناعي (س$_{٦}$) من جدول الحل الأمثل .

وحيث ان وجود المتغير الاصطناعي س$_{٦}$ كمتغير اساسي في جدول الحل الأمثل يعتبر مخالفة صريحةوواضحة لوضع المتغيرات الاصطناعية وفق منهج طريقة السمبلكس اذن يمكن القول في حالة هذه المشكلة ، انه لاتوجد نقطة طرفية يمكن اعتبارها ممكنة مع القيود الثلاثةمجتمعة ، علاوة على ذلك فانه يمكن القول بصفة عامة أنه : اذا

تضمن جدول الحل الأمثل واحد أو اكثر من المتغيرات الاصطناعية في صورة متغير أساسي فان المشكلة على الصورة التي تم صياغتها عليها ليس لها حل أمثل .

تبين مما سبق عدم امكانية وجود حل أمثل لوجود تعارض أو تناقض في القيود او في الأهداف ، وهذا أمر يتطلب اعادة صياغة المشكلة بحيث نحاول أن نجد أو نخفض من حدة أحكام وتغيير واحد أو اكثر من القيود، أو الالتجاء الى طريقة آخرى مثل برمجة الأهداف لاستخدامها في وضع اولويات أو معاملات تفاضلية للقيود والاهداف ، وهذا المفهوم سيكون محور تركيزنا في الاجزاء التالية .

تعدد الأهداف ـ وضع الأولويات

Multiple Objectives -Establishing Priorities

تعتبر برمجة الأهداف والتي سوف نستخدمها في حل عدم الامكانية الواضحة لمشكلة الشركة التى تقوم بانتاج اجهزة الفيديو، من الاساليب ذات المجالات الفسيحة والرحبة للتطبيق، اذ لها فاعلية ممتازة للتعامل مع المشاكل ذات الأهداف المتعارضة أو المتناقضة ، وذلك عندما يكون من الممكن وضع أولويات لتلك الاهداف . أما اذا اعتبرت الأهداف جميعها تمثل ذات الأهمية تصبح المشكلة مجمدة ولايوجد لها حل .

فعلى سبيل المثال ،اذا كان متخذ القرار يرغب في تحقيق هدف الربح ، وكذلك تحقيق هدف الوفاء بطلبات العملاء من المنتجات ، وأيضا تحقيق هدف استخدام الطاقة ، فان استخدام برمجة الاهداف تتطلب أولا ان يتم تحديد أي هذه الأهداف تمثل أولوية أولى، وأيها يمثل اولوية ثانية ... وهكذا ،فاذا كان هدف الربح يمثل اولوية أولى فان متخذ القرار سيعمل على تحقيق هدف الربح ، قبل الاهداف الاخرى ،وأيضا لابد من تحديد

الاولوية الثانية بعد هدف الربح حتى يمكن العمل على تحقيقها قبل الهدف الذى يمثل الاولوية الثالثة .ويلاحظ ان هذه الاهداف او الاغراض ليست مقاسة بنفس وحدات القياس ، ولكن معبر عنها بوحدات مختلفة تماما ،فمثلا هدف الربح مقاس بالجنيهات ، أي بالوحدات النقدية ، وهدف الوفاء بطلبات العملاء من المنتجات مقاس بالوحدات اي وحدات المخرجات ، وهدف استخدام الطاقة مقاس بمدلول ساعات العمل .

فاذا وجد تعدد في الاهداف فانه يلزم أن يكون متخذ القرار قادرا على وضع أولويات تلك الأهداف، وذلك حتى يكون فى استطاعته استخدام طريقة برمجة الاهداف ، حيث أن وجود اولويات للأهداف المتعددة يعتبر من الخصائص الاساسية التى تميز نموذج برمجة الاهداف ، والاسلوب الذى تسير فيه برمجة الأهداف هو تجاهل الاهداف ذات الاولوية الدنيا ، حتى يتم تحقيق أهداف الاولوية العليا ، وبتحقيق هدف الاولوية العليا تحاول برمجة الاهداف مرة اخرى استيفاء أو تحقيق كل أهداف الاولوية الدنيا على الترتيب .

ومعنى ماتقدم ان نموذج برمجة الاهداف يحقق الأهداف بترتيب أولويتها لأنه في معظم المشاكل ذات الاهداف المتعددة يستحيل استيفاء وتحقيق كافة الاهداف فى وقت واحد ، هذا مع ملاحظة ان درجة استيفاء أو تحقيق هدف معين تقاس بمقدار الانحراف عن ذلك الهدف ، سواء كان ذلك الانحراف بالزيادة أو النقصان ، وسواء كان مغزاه فى مصلحة المنشأة أو ضد مصلحتها ،فالعبرة هنا هو فى مقدار الهدف الموضوع ، ومن ثم فان الانحراف عنه يمكن ان يأخذ أحد الاتجاهين، فمثلا يمكن أن يتم تحقيق الهدف ولكن بأقل من المستوى الموضوع (وهو يمثل انحراف عن الهدف) ،أو أن يتحقق الهدف بأكثر من المستوى الموضوع أي هناك مبالغة أو تجاوز فى تحقيقه

(وهو أيضا يمثل انحراف عن الهدف) • وبرمجة الأهداف تعمل على تخفيض الانحرافات غير المرغوبة ، والتي تقابل في معظم الاحوال مستوى تحقيق الهدف بأقل من المستوى الموضوع •

ولتوضيح ماتقدم نفترض أن احدى الشركات وضعت لنفسها هدفا ذات اولوية اولى وهو تحقيق ربح مقداره ٢٠٠٠٠ جنيه ، في هذه الحالة فاننا أمام ثلاثة احتمالات :

١- امكانية تحقيق هذا الهدف بالضبط لاأكثر ولا أقل، وهذا يعنى أنه لاتوجد انحرافات عن الهدف الموضوع بالزيادة أو النقصان ،(مرغوبة أو غير مرغوبة)•

٢- قد تكون الارباح التي يمكن تحقيقها أكبر من المستوي الموضوع (٢٠٠٠٠ جنيه) ، وفي هذه الحالة فاننا لانكون قلقين ازاءها لأنها تزيد عن مستوى الهدف أي انها انحرافات مرغوبة •

٣- قد تكون الارباح التى يمكن تحقيقها أقل من المستوى الموضوع لها (٢٠٠٠٠ جنيه) ،وهذه تمثل انحرافات غير مرغوب فيها لأنها تعنى تحقيق أرباح أقل من الكفاية ، ومن ثم سنهتم بمحاولة تخفيض تلك الانحرافات غير المرغوبة وهى الأقل من الكفاية •

وخلاصة ماتقدم أن برمجة الاهداف تحاول تحقيق واستيفاء كل هدف ، الا انه في حالة عدم امكانية استيفاء كل الاهداف لوجود تعارض وتناقض فيما بينها ، فانها تعمل على تخفيض الانحرافات غير المرغوبة ، مبتدئة بالهدف الذى يمثل الاولوية الاعلى ،وعندما يتم استيفاء وتحقيق هدف الاولوية الأعلى(أي تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه) ، تبدأ في الاتجاه الى الاهداف ذات الأولوية الاقل وبالترتيب ، وتنتهي

الخطوات عندما تصل الى النقطة التي لايمكن معهـا اجراء أي تحسين في بعض أهداف المستويات الدنيـا الا على حساب زيادة الانحرافات غير المرغوبة فيها لبعض أهداف الاولويات الأعلى ، وهنا نكون قد وصلنا الى الحل الأمثل .

ولعله يكون من المناسب والمفيد أن نتنـاول بمثال عملى طريقة وأسلوب برمجة الأهداف ، وذلك حتى يمكن الوقوف على الخطوات التى تناولناها فيما تقدم. ولهذا الغرض سنستمر في حل مشكلة المزيج الانتاجي لشركة انتاج اجهزة الفيديو بطريقة برمجة الاهـداف ، والذي اتضح مما سبق انه لايوجد لها حل ممكن وفقـا للصياغة الأصلية التي كانت عليها . الأمر الذى جعلنا نلجأ الى اسلوب آخر بحثا عن مدخل يمكننا من الوصول الى حل يمثل أفضل مايمكن التوصل اليه في ظل التعارض والتنافس فى الأهداف الموجودة بحالة هذه الشركة .

فبفرض ان متخذ القرار فى شركة انتاج اجهـزة الفيديو ،قرر اعادة صياغة المشكلة الأصلية بطريقـة يمكن معها تطبيق طريقة برمجة الأهداف ، فحـدد أن تكون الارباح على الاقل ٢٠٠٠٠ جنيه ، وأنه يجب الوفـاء بطلبات العملاء من اجهزة الفيديو بحجمها الكبيـر والصغير ، وأن يكون الانتاج في حدود طاقة ساعـات العمل المتاحة . هذا مع العلم بأن متخذ القـرار قد وضع أولويات لتلك الاهداف كالآتي :

هدف الاولوية الاولى ($هـ_1$) : الارباح تعادل ٢٠٠٠٠ جنيه على الاقل

،، ،، الثانية ($هـ_2$) : انتاج ١٠٠ جهاز فيديو حجم كبير على الأقل .

،، ،، الثالثة ($هـ_3$) : انتاج ٢٠٠ جهاز فيديو حجم صغير على الأقل .

،، ،، الرابعة ($هـ_4$) : تجنب الوقت الاضافي فالوقت المتاح ٦٠٠ ساعة عمل .

وحيث أن اسلوب برمجة الأهداف يتجاهل أهـــــداف الاولوية الدنيا حتى يتم استيفاء اهداف الاولوية العليا (تخفيض انحرافاتها غير المرغوبة) ، لذلك فان الحدود الدنيا للانتاج المطلوب من كل من اجهزة الفيديو كبيرة الحجم وصغيرة الحجم، وكذلك هدف تجنب الوقت الاضافـــي سيتم اهمالها جميعا الى ان نصل الى الحل الذي يحقــق هدف الربح باعتباره هدف الاولوية الاولى ،وعندما نصل الى مجموعة اجهزة الفيديو بنوعيها التى تحقق هـــدف الربح ، نبدأ في الاخذ في الاعتبار بعد ذلك هـــــدف الاولوية الثانية ($هـ_٢$) وهو انتاج ١٠٠ وحدةمن أجهـزة الفيديو كبيرة الحجم على الأقل ، مع ملاحظة أن أي حــل جديد نصل اليه محققا هدف الاولوية الثانية لابــــد أن يكون فى ذات الوقت محققا هدف الربح ذات الاولويـــــة الاولى . واذا لم يكن هناك حل يمكن ان يحقق كلا الهدفين في آن واحد ، فان منهج برمجة الاهداف سوف يصل الـــى الحل الذى يحقق هدف الاولوية الاولى (الربح)وفي نفـس الوقت هدف الاولوية الثانية بأقل انحراف غير مرغـــوب فيه ، ثم يستمر العمل للأخذ في الاعتبار الاهــداف ذات الاولوية الدنيا ($هـ_٣$ ، $هـ_٤$) . ونصل الى الحل الـــذي يجعل الانحرافات غير المرغوب فيها لأهداف الأولويــــة الدنيا عند حدها الادنى والتي يمكن معها تحقيــــــق الاهداف ذات الاولوية الاعلى .

من المناقشة السابقة نكون قد وصلنا الى الصياغة الشفهية او اللفظية لمثال الشركة المنتجة لأجهــــزة الفيديو فى صورة نموذج برمجة خطية . ومن ثم نكون على مشارف مرحلة حل المشكلة . علما بأنه يمكن ايجاد حـل نموذج البرمجة الخطية بيانيا ، وأيضا باستخدام منهج السمبلكس ، وهذا ماسنتناوله في الجزء الثاني :

حل نموذج برمجة الأهداف بيانيا :

يمكن حل مشاكل برمجة الاهداف (ذات متغيريـــــــن

قراريين) بيانيا ، وذلك بتتابع اضافة القيود التي تمثل كل هدف وفقا لأولويته الصحيحة ،والنقاط الطرفية التي تظل باقية بعد اضافة خط كل قيد تمثل الحلول التى تقابل كل الاهداف التى تم تمثيلها ،ولتوضيح هذه المعاني فانه من المناسب ان نقوم بتمثيل كل قيد وفقا لاولويته على الرسم البياني ليتابع معنا القارئ مانقصده وصولا للحل الأمثل .

أولا : التمثيل البياني لهدف الاولوية الاولى (الربح) :

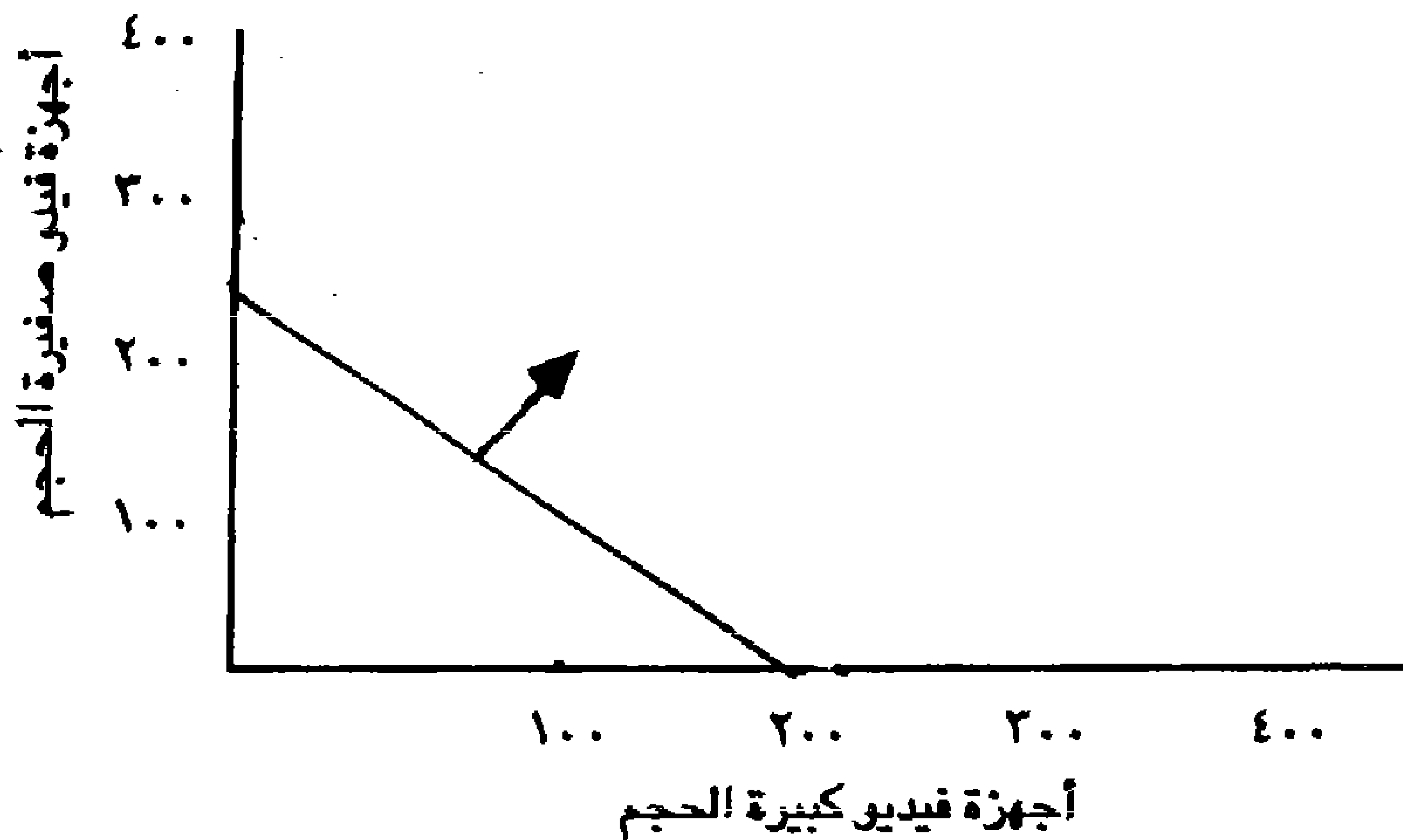
يمثل هدف الاولوية الأولى تحقيق ربحا مقداره على الاقل ٢٠٠٠٠ جنيه ،أي أن القيد الممثل لهذا الهدف هو:

$$١٠٠س_١ + ٨٠س_٢ \geqslant ٢٠٠٠٠ \quad (هـ_١)$$

وبتحويله الى معادلة بالاهمال المؤقت للاشارة ($\geq$) كما هو معتاد في طريقة الرسم البياني ، تصبح معادلة هذا القيد :

$$١٠٠س_١ + ٨٠س_٢ = ٢٠٠٠٠$$

وبتحديد احداثيات هذه المعادلة نجدها :(صفر ، ٢٥٠) ، (٢٠٠، صفر) والشكل التالي يمثل التمثيل البياني لهدف الاولوية الاولى (الربح) كما ان السهم المرسوم يمثل اتجاه الهدف أو الانحراف المرغوب فيه ،والرقم (١) يشير الى ترتيب الاولوية .



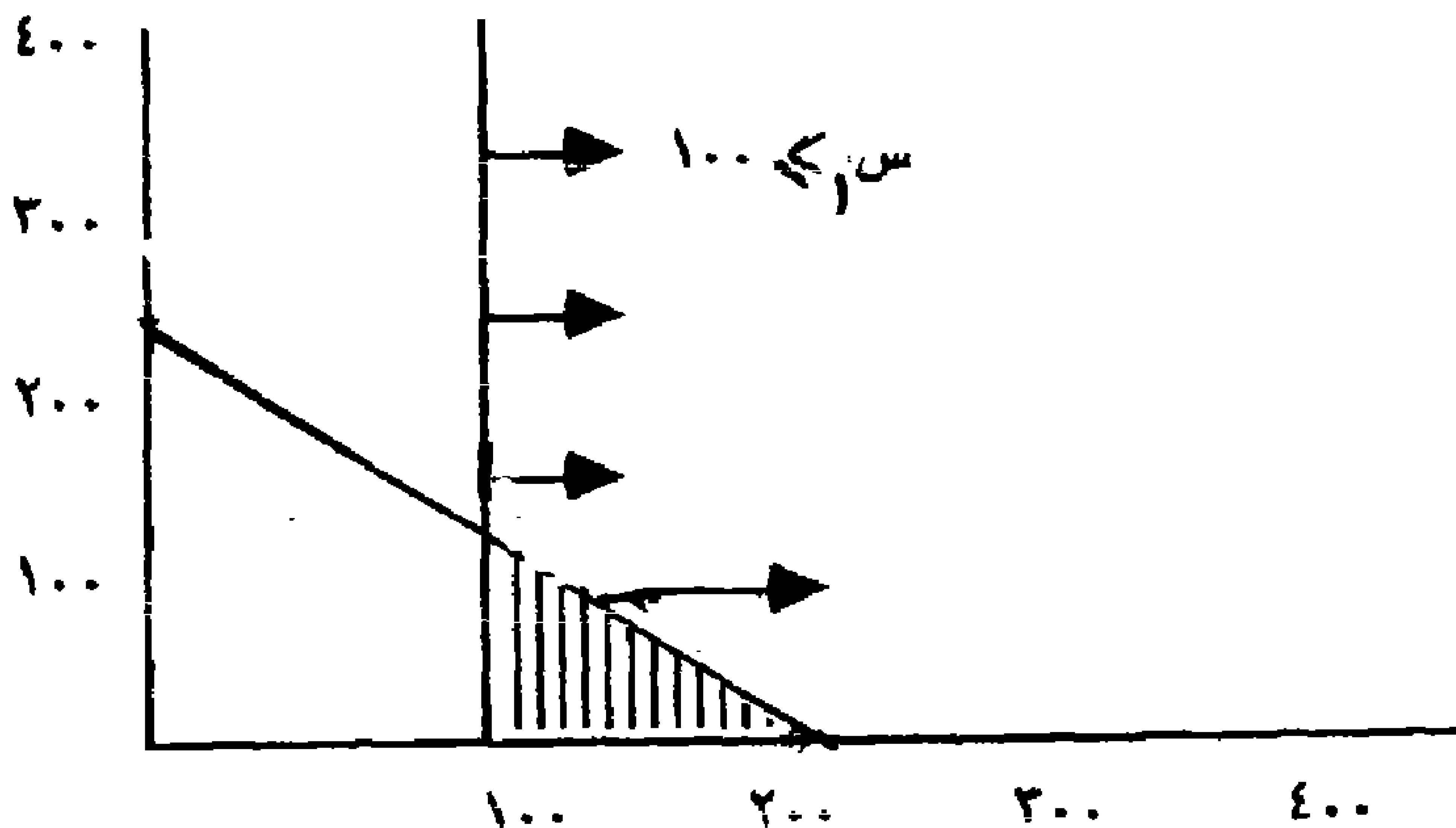
ومن هذا الشكل يتضح ان منطقة الحلول الممكنة مفتوحة ولانهائية وهذا يعنى عند هذا الحد انه لاتوجد مشكلة اذ يمكن زيادة الارباح بزيادة الانتاج ولكن هذا الوضع لن يستمر طويلا اذ ستأتى أهداف اخرى تحد من لانهائية منطقة الحلول الممكنة .

ثانيا : التمثيل البياني لهدف الأولوية الثانية ($هـ_٢$) :

يأتي بعد التمثيل البياني لهدف الأولوية الاولى (الربح) ، ان نقوم بالتمثيل البياني لهدف الأولوية الثانية ($هـ_٢$) وهو الهدف الخاص بانتاج عدد ١٠٠ جهاز فيديو كبير على الاقل للوفاء بالارتباطات مع العملاء. والقيد الممثل لهذا الهدف هو :

$$س_١ \geqslant ١٠٠ \quad (هـ_٢)$$

وبتحويله الى معادلة وتمثيله بيانيا ،سينتج الشكل التالي والذى يبين هدف الاولوية الأولى وهدف الاولوية الثانية معا علما بأنه قد رمز لهدف الاولوية الاولى برقم (١) وهدف الاولوية الثانية برقم (٢) وان السهم يشير الى الانحرافات المرغوبة .



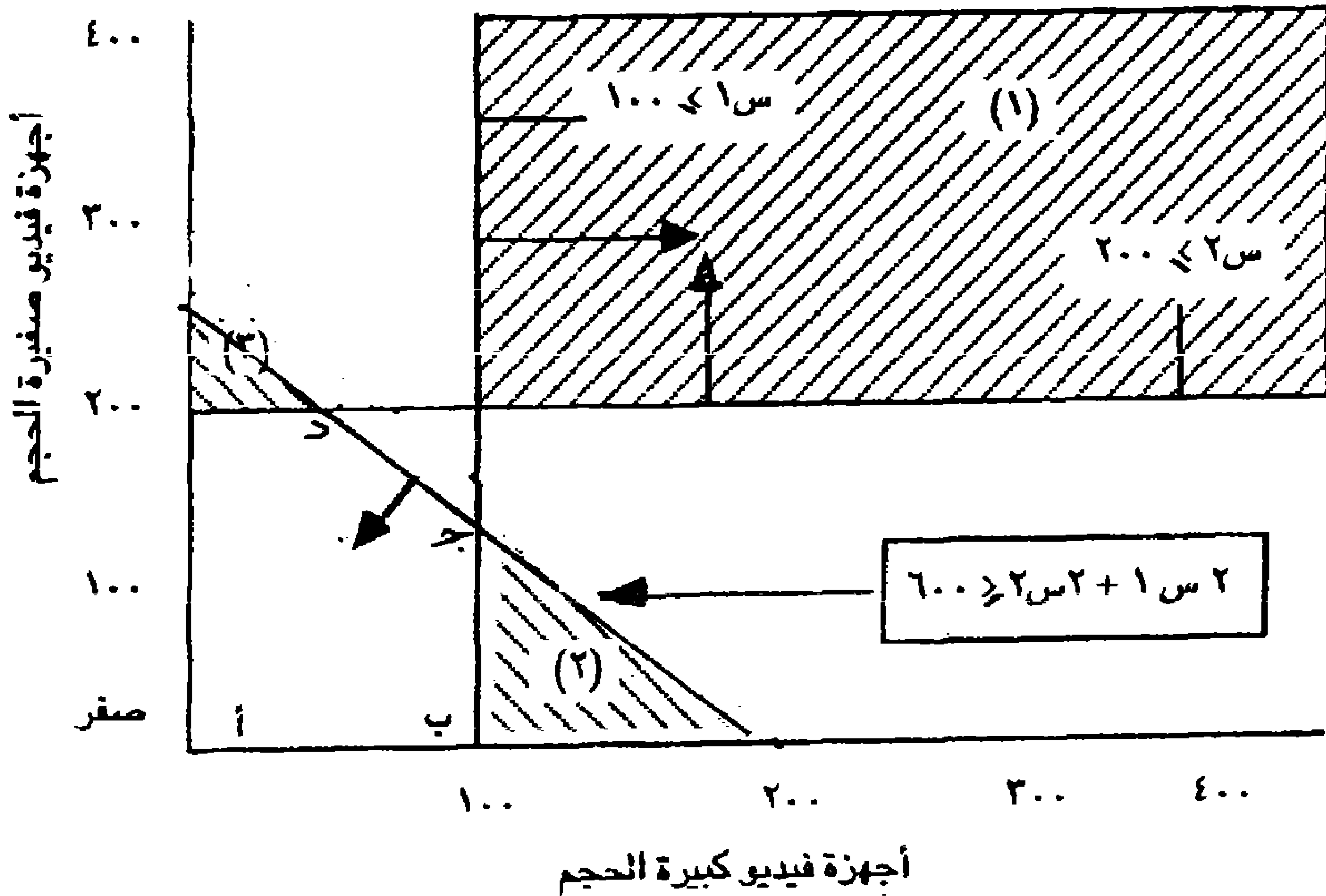
من هذا الشكل يتبين انه برغم اضافة هدف الاولوية الثانية الى هدف الاولوية الاولى الا ان منطقة الحلول الممكنة مازالت لانهائية ويمكن تحقيق الهدفين معا دون انحرافات غير مرغوب فيها ،ويستدل على ذلك من اتجاهات الاسهم التى تشير الى اتجاه الانحرافات المرغوبة ٠ أما أي نقطة تقع على عكس اتجاه الاسهم المرسومة فتشير الى وجود انحرافات غير مرغوبة وهو مالم يحدث حتى الآن بالنسبة للهدفين الأول والثاني ٠

<u>ثالثا</u> : <u>التمثيل البياني لهدف الاولوية الثالثة (هـ$_3$)</u>:

بعد أن تم التمثيل البياني للهدف الأول والثاني، يتم التمثيل البياني لهدف الاولوية الثالثة (هـ$_3$) وهو الهدف الخاص بانتاج عدد ٢٠٠ جهاز فيديو حجم صغير على الاقل للوفاء بتعاقدات المنشأة مع العملاء، والقيد الممثل لهذا الهدف هو :

$$س_2 \geqslant ٢٠٠ \qquad (هـ_3)$$

ويتم تمثيله بيانيا كما هو معتاد ،وبذلك يظهر الرسم البياني متضمنا الأهداف الثلاثة وفق أولوياتها واتجاه الانحراف المرغوب فيه على الشكل التالي :



ويتضح من هذا الشكل ان منطقة الحلول الممكنة مازالت مفتوحة ولايوجد هناك تعارض بين الأهداف الثلاثة السابقة ، الا انه يلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة في شكلها الجديد بعد اضافة خط قيد الاولوية الثالثة لم تعد محددة بخط الربح ولكنها أصبحت محددة فقط بخطي الهدف الثاني والثالث وهذا معناه أن أي حل يتم اختياره في منطقة الحلول الممكنة الجديدة سيحقق أرباحا تزيد عن ٢٠٠٠٠ جنيه ، أي لابد أن يكون هناك انحراف مرغوب فيه لهدف الاولوية الأولى ٠

خلاصة ماتقدم ان هذا الشكل يؤكد انه يمكن الحصول على حل يحقق ويفي بالأهداف الثلاثة الاولى مجتمعة دون تناقض أو تعارض وان كان هذا الحل سيحقق أيضا انحرافات مرغوب فيها لواحد على الاقل من تلك الاهداف ولابأس من ذلك طالما انه لايوجد قيد أو مغزى يفيد رفض هذه الانحرافات ٠

ولتوضيح ماتقدم نقول مثلا ان نقطة تقاطع خط الأولوية الثانية وخط الأولوية الثالثة تقع عند احداثي (١٠٠،٢٠٠) ، هذه النقطة اذا اخذناها ممثلة للحل (قبل اضافة هدف الاولوية الرابعة)،فانها وان كانت تستوفي تماما هدف الاولوية الثانية وهدف الاولوية الثالثة دون اى انحرافات مرغوبة أو غير مرغوبة ،الا انها تحقق انحراف مرغوب فيه لهدف الاولوية الاولى مقداره (٦٠٠٠) كالآتي :

١٠٠ x ١٠٠ + ٨٠ x ٢٠٠ =٢٦٠٠٠ − ٢٠٠٠٠= ٦٠٠٠ جنيه

هذا ويمكن اختيار نقطة حل أعلى من النقطة المذكورة وسنجد أنها ستحقق انحرافات مرغوب فيها للأهداف الثلاثة السابقة ٠

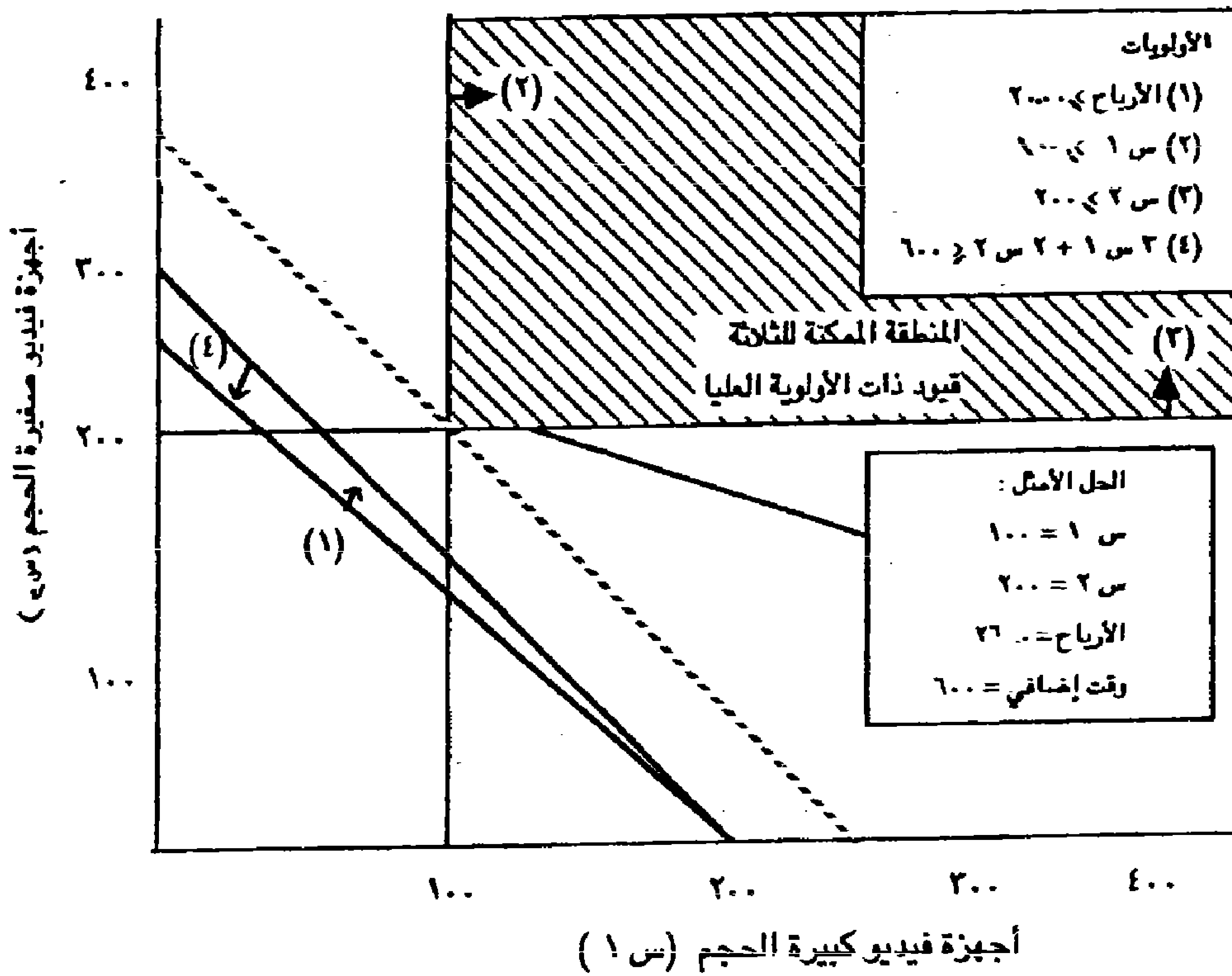
رابعا: <u>التمثيل البياني لهدف الاولوية الرابعة ($هـ_٤$)</u> :

وعلى نفس النمط المتتبع سيتم اضافة الخط الممثل

لقيد هدف الاولوية الرابعة ، وهو الهدف الخاص بتجنب الوقت الاضافى من ساعات العمل والتي تبلغ الطاقة المتاحة منها ٦٠٠ ساعة ، والقيد الممثل لهذا الهدف هو :

$$٣س_١ + ٢س_٢ \geqslant ٦٠٠ \quad (هـ_٤)$$

وبعد رسم هذا الهدف وتحديد اتجاه الانحراف المرغوب فيه ، سيظهر الشكل البياني بكامل أهدافه الأربعة كالآتي :



وبعد اضافة خط قيد هدف الاولوية الرابعة الى الشكل البياني السابق ، أصبح هذا الشكل يمثل تماما المشكلة كاملة والتي يمكن تفسيرها بيانيا كالآتي بهدف التعرف على كيفية الوصول الى نقطة الحل الأمثل لنموذج برمجة الاهداف بيانيا .

يمكن ان نلاحظ من الشكل السابق ان قيد هـــــدف الاولوية الاولى وهو تحقيق ارباح مقدارها ٢٠٠٠٠ جنيــه على الاقل هو الخط رقم (١) ، والسهم المرسوم مع خـــط القيد يشير الى ان الحلول التي توجد على ذات الخـط او أعلى منه تحقق هدف الربح ،أي ان الانحرافات غيـــر المرغوب فيها بالنسبة لهدف الربح ستكون مقدارها صفر بالنسبة لأي نقطة واقعة ومنطبقة على ذلك الخـــط أو أعلى منه ، أما لو اتجهنا ناحية نقطة الاصل تبــــدأ الانحرافات غير المرغوب فيها في الظهور،وتزداد كلمــا اقتربنا من نقطة الاصل ، وبطبيعة الحال تصل الانحرافات غير المرغوب فيها بالنسبة لهدف الربح الى اقصاهـــا عند نقطة الاصل، وهذا منطقى لأن مقدار الارباح المحققـة عند نقطة الاصل تساوى صفر ، اذن عند نقطة الاصل هنـاك انحراف غير مرغوب فيه في هدف الربح مقداره ٢٠٠٠٠جنيه .

وبالنسبة لقيد الاولوية الثانية ، والذي يحـــدد الحد الادنى لحجم الانتاج من اجهزة الفيديو كبيرة الحجم بعدد ١٠٠ جهاز ، فانه يقابل الخط رقم (٢)،ويلاحظ انه برغم ان بعض النقاط الممكنة المحددة بهدف الاولويـــة الاولى قد فقدت باضافة قيد الاولوية الثانية،الا انــه مازالت هناك نقاط ممكنة غيرها تستوفي الهدفين معا .

وباضافة القيد الثالث والممثل فى الشكل السابق بالخط رقم (٣) والذى يحدد الحد الادنى للكمية المنتجة من اجهزة الفيديو صغيرة الحجم بعدد ٢٠٠ جهاز، سيؤدى ايضا الى نتيجة مماثلة ، اذ سنجد أن اضافة خط هـــذا القيد الى بعض النقاط الممكنة التى تستوفي كلا مـــن قيد الاولوية الاولى وقيد الاولوية الثانيةمستنفـذ ، الا أننا سنجد مع ذلك ان هناك بعض الحلول الممكنةوالتـي تستوفىالاهداف الثلاثة معا وهى المنطقة المظللة بالشكل السابق .

أما بالنسبة للقيد الرابع والممثل فى الشكل بالخط رقم (٤) ، والذى يحدد طاقة الانتاج المتاحة بعدد ٦٠٠ ساعة عمل ، فسنجد أنه غير محقق بعكس الحال بالنسبة للقيود الثلاثة الأولى ، اذ سنجد ان اتجاه السهم المرتبط بخط ذلك القيد يشير الى انه لاتوجد نقاط تستوفى القيود الثلاثة الأولى وفى الوقت نفسه تستوفى قيد الهدف الرابع ، وعلى ذلك فان متخذ القرار يحتاج الى التوصل الى الحل الذى يستوفي القيود الثلاثة الاولى باعتبارها اولويات عليا ، ويخفض في الوقت نفسه انحرافات القيد الرابع ، باعتبار انه أدنى الأهداف أولوية . وعلى ذلك فان التشغيل لوقت اضافي يعتبر ضروري ولابد منه ، فالهدف هو تحديد جدولة الانتاج التى تخفض مقدار الوقت الاضافي بالاضافة الى تحقيق ٢٠٠٠٠ جنيه على الأقل أرباح ، وانتاج ١٠٠ فيديو حجم كبير و ٢٠٠ حجم صغير على الاقل .

ولكن كيف سيتم تعيين نقطة الحل الأمثل ؟ للاجابة على ذلك نقول ان تلك النقطة الممكنة بالنسبة لأهداف الاولويات العليا السابقة والتى تعتبر اقرب تماما (أقل انحرافات غير مرغوبة) لمقابلة ذلك الهدف غير المحقق هى النقطة التى تمثل الحل الأمثل للمشكلة ، ويمكن تعينها اذا ما اعتبرنا ان قيد الهدف غير المحقق أو غير المستوفي كأنه دالة هدف ، أي أن نقوم بعمل سهل وبسيط وعلى نمط مشابه للطريقة التىاتبعناها في خط الربح المتعادل (أو خط التكلفة المتعادل) ، وذلك عند ايجاد الحل الأمثل لأي مشكلة برمجة خطية . فالخطوط الموازية لخط القيد الرابع والتى تقع أعلى ذلك الخط تمثل مجموعة النقط التى تمثل كل منها نفس مستوى الانحراف عن ذلك القيد ، لذلك يمكن أن ننظر الى تلك الخطوط علىانها خطوط الانحرافات المتعادلة Isodeviation Lines وعلى ذلك فاننا نبحث عن اقل مستوى لاحد خطوط الانحرافات المتعادلةوالموازية

لقيد ساعات العمل والتى تحتوى على الاقل على نقطة واحدة على الاقل ممكنة تشترك مع القيود الثلاثة الأخرى ذات الاولويات الاعلى ، وبتطبيق تلك القاعدة ، سنجد أن النقطة (آ) الموضحة بالشكل السابق هى التى ينطبق عليها الاعتبارات السابقة ، اذن تكون النقطة (آ) هي نقطة الحل الأمثل ، وعند هذه النقطة تكون عدد أجهزة الفيديو كبيرة الحجم المنتجة ١٠٠ وحدة ، والأجهزة صغيرة الحجم ٢٠٠ وحدة ، والربح مقداره ٢٦٠٠٠ جنيه ، وتشغيل وقت اضافي مقداره ١٠٠ ساعة (٣×١٠٠+٢×٢٠٠ = ٧٠٠ – ٦٠٠ = ١٠٠ ساعة) .

خلاصة ماتقدم ان النتائج التىتم التوصل اليها تشير الى انه تم استيفاء ثلاثة أهداف بدون انحرافات غير مرغوب فيها ، أما الهدف الرابع والذى يمثل الاولوية الدنيا فقد تم تخفيض انحرافاته غير المرغوب فيها الى ادنى حد ممكن ، والجدول التالي يمثل ملخصا بالنتائج التى اسفر عنها حل المشكلة السابقة بنموذج برمجة الأهداف .

مستوى اولوية الهدف	الهدف	هل تم تحقيق الهدف	كيف ؟
١	الارباح تعادل ٢٠٠٠٠ جنيه على الاقل.	نعم	الارباح ٢٦٠٠٠ جنيه
٢	انتاج ١٠٠ جهاز فيديو حجم كبير على الاقل.	نعم	انتاج ١٠٠ جهاز فيديو حجم كبير.
٣	انتاج ٢٠٠ جهاز فيديو حجم صغير على الاقل.	نعم	انتاج ٢٠٠ جهاز فيديو حجم صغير.
٤	تجنب التشغيل لوقت اضافي (٦٠٠ ساعة عمل كطاقة متاحة).	لا	هناك احتياج لوقت اضافي مقداره ١٠٠ ساعة عمل .

وجدير بالذكر ان نوضح هنا ان الخطوات التي اتبعناها في حل هذه المشكلة بيانيا ستمدنا بفهم جيد لبرمجة الاهداف ، فالملاحظة الاساسية التى يمكن الوقوف عليها من حل هذه المشكلة أن الحلول المثلى يتم تحديدها عن طريق تتابع اضافة قيود الاهداف واحدا تلو الآخر وفقا لمستوى اولويتها ، حتى نصل الى ان احد قيود الأهداف لايمكن استيفاؤه بأحد أو بعض الحلول الممكنة لقيود الاولوية الاعلى ، عندئذ نلجأ الى تخفيض الانحرافات غير المرغوبة فيها بالنسبة لأول قيد لم يتم استيفاؤه .

من ناحية أخرى نود أن نوضح أنه اذا كانت هناك أهدافا اضافية لها انحرافات في الحل النهائي فان التبسيط الذى اتبعناه في هذا الحل البياني سيكون من الصعب جدا الاخذ به في تلك الحالة الأمر الذى يجعلنا نفكر في طريقة السمبلكس لحل نموذج برمجة الأهداف .

حل نموذج برمجة الاهداف بطريقة السمبلكس :

ان مجال استخدام الطريقة البيانية فى حل مشاكل برمجة الأهداف كما تناولناها في الجزء السابق يقتصر فقط على تلك المشاكل التى تتضمن متغيرين فقط من المتغيرات القرارية كما هو الحال تماما عند تطبيقها على مشاكل البرمجة الخطية ذات الهدف الواحد ، ومن الممكن اتباع خطوات ومراحل منهج طريقة السمبلكس لمعالجة المشاكل المتعددة الاهداف فى اطار نموذج برمجة الاهداف ، وحتى يمكن الوقوف على كيفية استخدام منهج طريقة السمبلكس في حل هذا النوع من المشاكل ، نكون بحاجة اولا الى توضيح وفهم الكيفية التي يتم بها اعداد الصياغة الرياضية للمشاكل متعددة الاهداف . ولغرض التبسيط سنبدأ هذا الجزء بصياغة رياضية تمثل مشكلة بسيطة تضم هدفين فقط .

مثال :

نفرض ان مدير الانتاج باحدى الشركات يقوم حاليا بوضع مستويات الانتاج لمنتجات الشركة والمتمثلة في نوعين من المنتجات هما $س_١$ ،$س_٢$ • وتقوم خطة الشركة على التشغيل الكامل لطاقة المصنع من خلال العمل لمدة خمسة أيام اسبوعيا وبثلاثة ورديات يوميا كل وردية ثمانية ساعات ، أي ان الطاقة الاسبوعية للمصنع هي ٧٢٠٠ دقيقة (٥×٣×٨×٦٠ = ٧٢٠٠) وهي تمثل الطاقة الانتاجية للاسبوع القادم ، ويتم انتاج كلا نوعي المنتجات في خط تجميع مشترك ،يستطيع الانتهاء من المنتج الاول فى دقيقتين ، والمنتج الثاني في دقيقة واحدة ، وقد وضع مدير الانتاج نصب عينيه محاولة تحقيق هدفين : الهدف الاول وهو يمثل هدف الأولوية الاولى ، وهو تحقيق اجمالى عائد مساهمة مقداره ٧٠٠٠٠ جنيه على الاقل ، علما بأن هامش ربح المنتج الأول ١٥ جنيها ، وهامش ربح المنتج الثاني ١٠ جنيهات ،والهدف الثاني وهو يمثل أيضا هدف الاولوية الثانية ويتمثل فى تحديد اجمالى عدد الوحدات المنتجة من النوعين معا بعدد لايزيد عن ٥٠٠٠ وحدة فى الاسبوع وذلك تمشيا للخطة الموضوعة لمستويات المخزون •

صياغة المشكلة : Formulating the Problem

سبق القول ان الصياغة الرياضية لمشكلة البرمجة الخطية تتكون من جزئين اولهما وضع دالة الهدف • وثانيهما تحديد الصياغة الرياضية للقيود والمفروضة على دالة الهدف ، ونظرا لأن اعداد الصياغة الرياضية لمشكلة برمجة الاهداف وان كانت تتفق من حيث هيكل الصياغة الا انها تختلف بعض الشئ فى محتوى دالة الهدف والقيود ، ولذلك سنستعرض فيما يلى كيفية اعداد الصياغة الرياضية للمشكلة التى وردت بالمثال السابق كمشكلة برمجة اهداف •

قيود برمجة الأهداف : Goal Programming Constraints

كان المفروض ان نبدأ هنا اعداد دالة الهدف أولا باعتبارها تمثل الجزء الاول من الصياغة الرياضية ، مثلما كنا نتعامل مع مشاكل البرمجة الخطية في الفصول الثلاثة المتقدمة ، ولكننا نرى انه من الملائم لاغراض التوضيح والفهم السريع ان نبدأ مناقشتنا هنا بصياغة مشاكل برمجة الاهداف بصياغة القيود المفروضة على دالة الهدف لأنها ستيسر امامنا اعداد صياغة دالة الهدف أسرع وأصح كما سنرى فى الجزء التالي .

عادة سنجد ان مشاكل برمجة الاهداف تتضمن نوعين من القيود المفروضة على دالة الهدف ، النوع الاول منها ونطلق عليه قيود فنية أو تكنولوجية Technological والنوع الثاني يطلق عليه قيود اهداف Goal Constrains ، والنوع الاول من القيود والذى اطلقنا عليه القيود التكنولوجية تتعامل مع طاقات الموارد والحدود الاخرى التى لاتمثل هدفا موضوعا بالمعنى المفهوم للهدف . وهى بذلك المعنى تماثل تماما نوع القيود التى عالجناها فى الفصول الثلاثة السابقة . اما قيود الاهداف وهى النوعية الثانية من القيود بمشكلة برمجة الاهداف ، فانها تمثل الاهداف المحددة والموضوعة فى اولويات واجبة التنفيذ ،وهذه تشابه الاهداف الأربعة التى وردت بمقدمة هذا الفصل في حالة شركة انتاج اجهزة الفيديو .

ومن خلال استعراض المثال الحالى سنجد أنه يمثل مشكلة تتضمن ثلاثة قيود ، احدهما يمكن تصنيفه ليندرج تحت نوع القيود التكنولوجية ، وهو يتعلق بالطاقة الانتاجية لخط التجميع ، اما القيدين الآخرين فيمكن تصنيفهما كقيدا هدف ، الاول يتعلق بهدف الربح وهو تحقيق عائد مساهمة ٧٠٠٠٠ جنيه على الاقل ،والآخر

يتعلق بمستوى المخزون الموضوع والمحدد.ومن الضروري ان نفرق بين نوعي القيود لأن لكل منهما معالجة مختلفة عند الصياغة الرياضية للمشكلة .

فبالنسبة للقيد التكنولوجي (وهو قيد طاقة التجميع) فهو يماثل تماما مجموعة القيود فى نموذج البرمجة الخطية وحيدة الهدف ، ولذلك فانه يتم التعامل معه بذات الطريقة المتبعة عند صياغة المشكلة أحادية الهدف ، فاذا رمزنا لعدد الوحدات المنتجة من النوعية الاولى من المنتجات بالرمز ($س_١$) ، ورمزنا لعدد الوحدات المنتجة من النوعية الثانية من المنتجات بالرمز ($س_٢$) ،فان قيد الطاقة يمكن صياغته على النحو التالي :

$$٢س_١ + س_٢ \geqslant ٧٢٠٠$$

وبعد اضافة المتغير الراكد ($س_٣$) ليمثل الطاقة غير المستغلة ستصبح معادلة القيد على الشكل التالي :

$$٢س_١ + س_٢ + س_٣ = ٧٢٠٠$$

أما قيود الهدف فانها تعالج بطريقة مختلفة بعض الشىء ، ويرجع السبب فى ذلك الى أن المستوى المحدد والموضوع للهدف المعين يمثل وضعا خاصا ، اذ قد لايمكن استيفاؤه وتحقيقه تماما بنفس المستوى المحدد ، اذ ربما قد يتحقق هذا الهدف بأكثر مما هو موضوع ، أو بأقل مما هو موضوع ، وهى كلها احتمالات واردة . وحتى يمكن مراعاة ذلك عند الصياغة الرياضية ، فان الامر يتطلب اضافة متغيرين لكل قيد من قيود الاهداف (دون القيود التكنولوجية والتي لايسمح فيها مطلقا بتعدى حدود الطاقة الموضوعة) ، هذه المتغيرات يطلق عليها اصطلاح المتغيرات الانحرافية Deviational Variables ،لأن قيمة كل متغير منها تمثل مقدار انحراف الحل عن مستوى

الهدف الموضوع ، فمتغير الانحراف الموجب Positive deviational Variable والذى سنرمز له بالرمز($ف^{+}$) يمثل مقدار الزيادة عن الهدف الموضوع. في حين أن متغير الانحراف السالب Negative deviational Variable ، والذى سنرمز له بالرمز($ف^{-}$) يمثل المقدار الذى لن يتحقق من الهدف .

وحيث ان الهدف الأول بمثالنا المذكور قد حدد أن يكون مستوى الربح على الاقل مامقداره ٧٠٠٠٠ جنيه ، اذن يمكن صياغته بالطريقة المعتادة كالآتي :

$$١٥س_{١} + ١٠س_{٢} \geqslant ٧٠٠٠٠$$

ولكننا ذكرنا قبل ذلك ، انه في بعض الحالات قد يتم تحقيق هذا الهدف بأكثر مما هو موضوع ،وفيأحوال اخرى قد يتم تحقيقه بأقل مما هو موضوع ، وحيث ان كلا الاحتمالين قائمين ،اذن لابد من اضافتهما الى قيد ذلك الهدف كالآتي :

أ - بفرض أن ($ف^{-}_{١}$) تمثل المقدار الذى يقل به هدف الاولوية الاولى (الربح) الموضوع .

ب - وبفرض ان ($ف^{+}_{١}$) تمثل مقدار الزيادة المحققة من هدف الاولوية الاولى وهو مستوى الربحالموضوع.

لذلك ، وبناء على هذا الفهم ،فان قيد هدف الربح ذات الاولوية الاولى يمكن تحويله الى صورة المعادلة التالية :

$$١٥س_{١} + ١٠س_{٢} - ف^{+}_{١} + ف^{-}_{١} = ٧٠٠٠٠$$

وبالنظر الى شكل المعادلة السابقة يمكن القول ان متغير الانحراف ($ف^{-}_{١}$) يشبه المتغير الراكد Slack Variable ،وان ($ف^{+}_{١}$) يماثل المتغير المضاف Surplus Variable ، والحكمةمناضافة كلا

المتغيرين الى قيد الهدف ، هو انه يجعلنا نقف على حقيقة انه قد لايكون فى مقدورنا تحقيق ارباح مقدارها ٧٠٠٠٠ جنيه تماما وبالضبط Exactly لأن هناك ثلاثة احتمالات للحل هي :

الاحتمال الاول :

ان يكون مقدار الربح القابل للتحقيق معادل تماما وبالضبط لمستوى الهدف المحدد مقدما وهو ٧٠٠٠٠ جنيه ، وفى هذه الحالة تكون ($ف^{+}_{1}$) مساوية للصفر ، و ($ف^{-}_{1}$) مساوية ايضا للصفر، أي أن متغيرات الانحراف قيمتها مساوية للصفر حيث لايوجد انحراف فى تحقيق هدف الاولوية الأولى .

الاحتمال الثاني :

ان يكون مقدار الربح القابل للتحقيق يقل عن الربح المحدد مقدما كهدف نسعى اليه ، وفى هذه الحالة فان متغير الانحراف ($ف^{-}_{1}$) تكون له قيمة موجبة مساوية للفرق بين الربح المحقق ومستوى الربح المستهدف ،وتكون قيمة متغير الانحراف ($ف^{+}_{1}$) مساوية للصفر .

الاحتمال الثالث :

ان يكون مقدار الربح القابل للتحقيق يزيد عن الربح المحدد مقدما كهدف موضوع ومستهدف ، وفي هذه الحالة فان متغير الانحراف ($ف^{+}_{1}$) تكون قيمة مساوية لمقدار الزيادة بين الأرباح المحققة فعلا ومستوى الربح المستهدف . وتكون قيمة متغير الانحراف ($ف^{-}_{1}$) مساوية للصفر .

ويلاحظ ان احد الانحرافين الموجب أو السالب (على الاقل) لابد ان يكون صفرا ، وفى كل الأحوال فان متغير الانحراف الموجب ($ف^{+}$) ، ومتغير الانحراف السالب ($ف^{-}$)

لابد ان يكون كميات غير سالبة Nonnegative ،فاذا كان احدهما كمية موجبة فان الانحراف الآخر لابد أن يكون صفر.

وبنفس الطريقة وعلى نفس النهج السابق يتمصياغة القيد الثاني الممثل لهدف الاولوية الثانية (مستوى المخزون الموضوع للمنتجات) ،اذ يتم ذلك عن طريق تعديل القيد الاصلي لهدف مستوى المخزون عن طريقاضافة متغير انحراف يقل عنالهدف ($ف^-$) ، ومتغير انحراف يزيد عن الهدف ($ف^+$) ، وفى هذه الحالة يتم تمييز رموز الانحراف برقم يمثل اولوية الهدف ، وحيث ان هذا الهدف يمثل هدف الاولوية الثانية ،لذلك سيكون متغير الانحراف الذى يشير الى المقدار الذي لن يتحقق من الهدف لقيد هدف الاولوية الثانية هو ($ف^-_٢$) ، وسيكون المتغير الذى يشير الى مقدار زيادة تحقق الهدف هو ($ف^+_٢$) ، وعلى ذلك يتم تعديل صياغة قيد هدف الاولوية الثانية من شكلة الحالى وهو :

$$س_١ + س_٢ \geqslant ٥٠٠٠$$

الىالشكل الصحيح فى صورة معادلة القيد كالآتي :

$$س_١ + س_٢ + ف^-_٢ - ف^+_٢ = ٥٠٠٠$$

وبعد الانتهاء من مناقشة اعداد صياغة القيود الثلاثة الواردة بالمثال المذكور ،فانالصياغة التالية ستكون هى الصياغة الرياضية لقيود الموارد والأهداف في صورتها الكاملة :

$$٢س_١ + س_٢ + س_٣ = ٧٢٠٠$$ (قيد طاقة التجميع)

$$١٥س_١ + ١٠س_٢ + ف^-_١ - ف^+_١ = ٧٠٠٠٠$$ (هدف الربح)

$$س_١ + س_٢ + ف^-_٢ - ف^+_٢ = ٥٠٠٠$$ (هدف مستوى المخزون)

$$س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، ف^-_١ ،ف^+_١ ،ف^-_٢ ،ف^+_٢ \geqslant$$ صفر (عدمالسلبية)

دالة هدف برمجة الاهداف :

Goal Programming objective Function

تعتبر صياغة دالة هدف نموذج برمجة الاهداف عملية هامة جدا وتتطلب تركيزا خاصا لتفهم المنطق الرياضي وراء شكل الصياغة التى تأخذها تلك الدالة . فليس بخاف علينا انه بعد اضافة متغيرات الانحراف السالبة والموجبة الى القيود الاصلية للاهداف ، سيؤدى الى اننا سنفقد الاتجاه الاصلى للهدف (اقل من أو أكبر من) ، اذ بعد اضافة هذه المتغيرات ستصبح القيود على شكل معادلات متساوية الطرفين ومن ثم اختفت الاشارة الاصلية للقيد ($\leq$ ، $\geq$) وحل محلها اشارة التعادل (=) ،وعلى ذلك اذن باضافة متغيرات الانحراف الى القيد الاصلى للهدف لم يعد فى الامكان استنتاج **اتجاه الهدف من معادلة القيد** ، فمثلا معادلة قيد هدف مستوى المخزون الموضوع كما تم صياغته في الاصل يشير الى ان المطلوب ان يكون اجمالي انتاج نوعي السلع ليس أكثر من ٥٠٠٠ وحدة ، وبعد اضافة متغيرات الانحراف لهذا القيد اصبح فى صورة المعادلة التالية :

$$س_١ + س_٢ + ف_٢^- - ف_٢^+ = ٥٠٠٠$$

ان هذا القيد على هذه الصورة (معادلة) ،لايوضح لنا ماذا كنا نرغب ان نجعل $س_١ + س_٢$ تزيد عن ٥٠٠٠ وحدة او ان تقل عن ذلك أو أن تساوى ٥٠٠٠ تماما ،ونفس الامر يحدث بالنسبة لقيد الاولوية الاولى والخاص بمستوى الارباح وهذا مانطلق عليه اصطلاح فقد الاتجاه Loss of Direction . (يلاحظ ان هذا لايحدث الا مع قيود الاهداف فقط ، اما القيود التكنولوجية وقيود الحدود الاخرى فلا تواجهنا هذه المشكلة حيث لايضاف اليها متغيرات انحراف ، ولكن يضاف اليها متغيرات راكدة ،أو متغيرات مضافة ،أو متغيرات اصطناعية وهذا لايفقدنا الاتجاه الاصلي للقيد) .

ان التخوف من حالة فقد الاتجاه لايمثل مشكلة معقدة اذ يمكن علاجها والابقاء على معرفة الاتجاه الصحيح لقيد الهدف وذلك من خلال اجراء تصحيح وتعديل بسيط ويسير عند صياغة ووضع دالة الهدف .

ان دالة هدف نموذج برمجة الاهداف تسعى الى تخفيض الانحرافات غير المرغوب فيها Undesirable لقيود الهدف ، فمثلا حيث ان مدير الانتاج قد قرر أن يكون الربح المستهدف يساوى على الاقل ٧٠٠٠٠ جنيه ،لذلك فان الامر يتطلب اعتبار أن عدم تحقق هذا الهدف بكامله أو بمعنى آخر مقدار عدم تحققه والمقاس بمتغير الانحراف ($ف^-_1$) هو انحراف غير مرغوب فيه ينبغى العمل على تخفيضه ،لذا ينبغي اضافة هذا المتغير الى دالة الهدف للعمل على تخفيضه ، وبناء على ذلك الفهم والتوضيح فانه لاينبغى ان يضاف المتغير ($ف^+_1$) والذى يقيس المبالغة او الزيادة أو التجاوز فى تحقيق هدف الربح لأنه انحراف مرغوب فيه .

أما بالنسبة لهدف الاولوية الثانية والمتمثل في تحديد حجم الانتاج من المنتجين معا بما لايزيد عن ٥٠٠٠ وحدة ، فان المبالغة أو التجاوز فى تحقيق هذا الهدف (أي انتاج أكثر من ٥٠٠٠ وحدة) يعتبر انحرافا غير مرغوب فيه ، لذلك فان متغير الانحراف الذى سيتم اضافته الى دالة الهدف لتخفيضه ، هو ذلك المتغير الذى يمثل الانحراف غير المرغوب فيه ، أي المبالغة في تحقيق الهدف ، وهو متغير الانحراف ($ف^+_2$) ولايضاف متغير الانحراف الآخر ($ف^-_2$) لانه يمثل انحراف مرغوب فيه .

وكقاعدة عامة : اذا كان قيد الهدف (أقل من أو يساوى) ، فانه يتعين اضافة متغير الانحراف الذى يبالغ في تحقيق الهدف ($ف^+$) الى دالة تخفيض الهدف .أما

اذا كان قيد الهدف (اكبر من أو يساوى) ،فانه يجب ضم متغير الانحراف الذى يقيس مقدار النقص أو عدم التحقق ($ف^-$) الى دالة الهدف ، أما اذا كان القيد (يساوى) فأنه من الضروري اضافة كلا المتغيرين ($ف^+$ ، $ف^-$) الى دالة الهدف لأن كلا منهما فى تلك الحالة يمثل انحرافا غير مرغوب فيه .

وعلى ذلك ستكون مكونات دالة هدف نموذج برمجة الاهداف عبارة عن كافة متغيرات الانحراف غير المرغوب فيه وفقا للقاعدة السابقة. وسيكون هدف تلك الدالة هو العمل على تخفيض تلك الانحرافات . ولكن يبقى تمثيل اولويات الاهداف فى دالة الهدف ، فليس من المعقول ان نقوم بتخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف ادنى ويكون ذلك على حساب هدف ذات أولوية أعلى . ان الهدف هو تخفيض الانحرافات غير المرغوب فيها ولكن فى اطار مراعاة اولويات الاهداف المحددة بالمشكلة .

فمثلا بفرض انه يوجد لدينا هدفين لهما متغيرات انحراف غير مرغوب فيها هما : $ف^+_م$ ، $ف^-_ل$ ،وان الهدف م يمثل اولوية اعلى من الهدف ل ، عندئذ يمكن وضع صياغة دالة الهدف على الصورة التالية :

تخفيض $ف^-_ل$ | نهاية صغرى $ف^+_م$

وتقرأ كالآتي : تخفيض $ف^-_ل$ بعد تحقيق النهاية الصغرى للانحراف $ف^+_م$ وهذا يعنى اننا سنصل الى تخفيض انحراف الاولوية الثانية عن طريق الوصول الى النهاية الصغرى للانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الاعلى . اذن سيكون التعامل أولاً مع الأولوية الاولى للوصول بانحرافها الى النهاية الصغرى ومن ثم يكون العمل على تخفيض انحراف الاولوية الثانية .

وحيث ان هدف الربح فى مثالنا الحالى يمثل

اولوية اعلى من هدف مستوى المخزون ، اذن ستأخذ صورة دالة الهدف للمشكلة التي نعد صياغتها الآن الشكل التالي :

$$\text{تخفيض } ف_{٢}^{+} \;\Big|\; \text{نهاية صغرى } ف_{١}^{-}$$

والتي يمكن ترجمتها لفظيا الى : تخفيض عدد الوحدات المنتجة زيادة عن ٥٠٠٠ وحدة بعد تحقيق النهاية الصغرى للانحراف غير المرغوب فيه لمستوى ارباح مقدارها ٧٠٠٠٠ جنيه على الاقل .

وتلخيصا لما تقدم ستكون الصياغة الرياضية الكاملة لنموذج برمجة الاهداف للمثال الحالي على الصورة التالية :

الصياغة الرياضية :

$$\text{دالة الهدف : تخفيض } ف_{٢}^{+} \;\Big|\; \text{نهاية صغرى } ف_{١}^{-}$$

بشرط آن :

$$٢س_{١} + س_{٢} + س_{٣} = ٧٢٠٠$$

$$١٥س_{١} + ١٠س_{٢} + ف_{١}^{-} - ف_{١}^{+} = ٧٠٠٠٠$$

$$س_{١} + س_{٢} + ف_{٢}^{-} - ف_{٢}^{+} = ٥٠٠٠$$

$$س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} ، ف_{١}^{-} ، ف_{١}^{+} ، ف_{٢}^{-} ، ف_{٢}^{+} \geqslant \text{صفر}$$

اعداد جداول السمبلكس :

بعد الانتهاء من اعداد الصياغة الرياضية لنموذج برمجة الاهداف ، ووفقا لمنهج السمبلكس ،فانه يتم اعداد جدول الحل المبدئي ، وفيما يلي جدول الحل المبدئي ، علما بأننا سنتناول بالشرح والتحليل كيفية تكوينه وكيفية تحديد معاملات صفوفه وآعمدته بعد استعراض الجدول وذلك حتى يتمكن القارئ من الوقوف أولا بأول على اسلوب اعداده وتدوين بياناته واستكمال العمليات الحسابية المطلوبة لاعداده .

الجدول المبدئي

العنصر المحورى ← (٢)، متغير داخل ← س١، متغير خارج ← س٣

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية ل١	ل٢	المتغيرات الاساسية	القيم	س١	س٢	س٣	ف١-	ف١+	ف٢-	ف٢+
صفر	صفر	س٣	٧٢٠٠	(٢)	١	١	صفر	صفر	صفر	صفر
١	صفر	ف١-	٧٠٠٠٠	١٥	١٠	صفر	١	١-	صفر	صفر
صفر	صفر	ف٢-	٥٠٠٠	١	١	صفر	صفر	صفر	١	١-
دالة الهدف		ل٢	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
صفر			التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
			صافى التغير	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
دالة الهدف		ل١	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر
٧٠٠٠٠			التكاليف الداخلة	١٥	١٠	صفر	١	١-	صفر	صفر
			صافى التغير	١٥-	١٠-	صفر	صفر	١	صفر	صفر

٧٢٠٠ / ٢ = ٣٦٠٠

٧٠٠٠٠ / ١٥ = ١٤٠٠٠ / ٣

٥٠٠٠ / ١ = ٥٠٠٠

وبالنظر الى جدول الحل المبدئي يتضح أنه يتكون على نمط يشابه الى حد كبير جدول السمبلكس المعتاد، وان كانت هناك بعض الاختلافات الجوهرية والاساسية التي تتلاءم مع طبيعة نموذج برمجة الاهداف والذى يشتمل على عدد من الاهداف ذات الاولويات المعينة . وفيمايلي نوضح كيفية اعداد هذا الجدول .

أولا : تحديد المتغيرات الاساسية بالجدول المبدئي :

يتم تعيين المتغيرات الاساسية بجدول الحل المبدئي بالطريقة المعتادة والتي سبق استخدامها فى نموذج البرمجة الخطية، وللتذكرة فان ذلك كان يتم عن طريق وضع قيمة المتغيرات القرارية ($س_١$ ،$س_٢$) مساوية للصفر وعندئذ يتم تعيين اى المتغيرات الراكدة أو متغيرات الانحراف بالقيود الموجودة بالصياغة ستكون آساسية بفرض تحقيق تلك القيود ، فمثلا اذا كانت $س_١$ = $س_٢$= صفر فان قيد الطاقة سيكون متوازن عندما تكون قيمة المتغير الراكد ($س_٣$) تساوى ٧٢٠٠ وهذه النتيجة تم التوصل اليها كالآتي :

$$∵ ٢س_١ + س_٢ + س_٣ = ٧٢٠٠$$

وحيث ان $س_١$ = $س_٢$ = صفر (عند الحل المبدئي ـ نقطة الاصل)

∴ بالتعويض بهذه القيم فى المعادلة السابقة :

$$٢(صفر) + ١(صفر) + س_٣ = ٧٢٠٠$$

$$∴ س_٣ = ٧٢٠٠$$

وعلى ذلك فان $س_٣$ متغير اساسي وقيمته ٧٢٠٠ عند الحل المبدئي .

وبنفس الطريقة فان قيد هدف الربح يكون متوازنا عندما يكون متغير انحراف عدم التحقق ($ف^-_١$) معادلا ٧٠،٠٠٠ ، ومتغير التحقق مساويا للصفر كالآتي (حيث انه لا انتاج ومن ثم لا ارباح اى عدم تحقق اى مستوى من هدف الربح وعليه فان متغير التحقق = صفر) :

∴ ١٥س$_١$ + ١٠س$_٢$ + ف$^-_١$ − ف$^+_١$ = ٧٠٠٠٠

وحيث ان س$_١$ = س$_٢$ = ف$^+_١$ = صفر

∴ بالتعويض بهذه القيم فى المعادلة السابقة :

١٥(صفر) + ١٠(صفر) + ف$^-_١$ −١(صفر) = ٧٠٠٠٠

∴ ف$^-_١$ = ٧٠ر٠٠٠

وعليه فان متغير الانحراف (ف$^-_١$) سيظهر كمتغير اساسي بالجدول المبدئي وبقيمة مقدارها ٧٠ر٠٠٠ .

كذلك فان قيد مستوى المخزون يكون متعادلا عندما يكون متغير التحقق مساويا ٥٠٠٠ ومتغير انحراف التجاوز مساويا للصفر (حيث انه بالجدول المبدئي لايوجد انتاج ومن ثم فلن يكون هناك تجاوز في هدف المخزون المحدد ، أي ان ف$^-_٢$ ستكون مساوية للصفر بالجدول المبدئي).

∴ س$_١$ + س$_٢$ + ف$^-_٢$ − ف$^+_٢$ = ٥٠٠٠

وحيث ان س$_١$ = س$_٢$ = ف$^+_٢$ = صفر

∴ بالتعويض بهذه القيم فى المعادلة السابقة ينتج ان قيمة ف$^-_٢$ = ٥٠٠٠

ولذلك سنجد ان المتغيرات الاساسية في الجدول المبدئي هي س$_٣$ ، ف$^-_١$ ، ف$^-_٢$ وقيمة كل منها على الترتيب ٧٢٠٠ ، ٧٠٠٠٠ ، ٥٠٠٠ . وعلى ذلك يتم تسجيل المتغيرات الاساسية في العمود الثاني بالجدول وعلى اليسار بالعمود الثالث قيمة كل من تلك المتغيرات الاساسية على نفس النمط الذى سبق اتباعه بطريقة السمبلكس .

كذلك يلاحظ من الجدول المبدئي ان معاملات الهدف لكل متغير اساسي قد وضعت في العمود الاول باقصى اليمين وهي بذلك ايضا تشابه فى وضعها جدول السمبلكس التقليدى

الا ان هناك اختلافا جوهريا بينهما ،فجدول السمبلكس التقليدى يتعامل مع المشاكل وحيدة الهدف ،أما برمجة الاهداف ذاتها فانها تتعامل مع المشاكل متعددة الاهداف ،لذلك ينبغى ان تعكس معاملات دالة الهدف هذا التعدد في الاهداف . وحيث انه يوجد فى ذلك المثال هدفين هما (الربح – ومستوى المخزون) ، لذلك فقد رمزنا لهدف الاولوية الاولى بالرمز ($ل_١$) ، وتكون بذلك ($ل_٢$) هي رمز هدف الاولوية الثانية (مستوى المخزون) ، ومعنى ذلك انه لكل متغير أساس معاملين أحدهما في هدف الاولوية الاولى ، والثاني لهدف الاولوية الثانية .

فبالنسبة لهدف الربح وهو هدف الاولوية الاولى ، فالهدف هو تخفيض قيمة الانحراف السالب $ف_١^-$(متغير انحراف عدم التحقق) ،لذلك فان دالة هدف مستوى الاولوية الاولى هي :

تخفيض = صفر $س_١$ +صفر$س_٢$ +صفر $س_٣$ – $ف_١^-$ + صفر $ف_١^+$ +صفر $ف_٢^-$ + صفر $ف_٢^+$.

ومن هذه الدالة يلاحظ ان جميع المتغيرات بها لها معاملات صفرية ماعدا المتغير $ف_١^-$. وعلى ذلك سنجد آن المتغير الاساسي ($س_٣$) معاملة فى هدف الاولوية الاولى صفر ، كذلك الحال بالنسبة للمتغير الاساسي ($ف_٢^-$) ،أما المتغير $ف_١^-$ فمعامله = ١

وبالنسبة لدالة هدف مستوى الاولوية الثانية (مستوى المخزون) ، فانه يمكن كتابتها على الصورة التالية :

تخفيض : صفر$س_١$ +صفر $س_٢$ + صفر$س_٣$ + صفر $ف_١^-$ + صفر $ف_٢^-$ + $ف_٢^+$

ومن هذه الدالة يتضح ان كل المتغيرات معاملها فى دالة الهدف للاولوية الثانية صفرا ماعدا متغير

الانحراف الموجب ف $^{+}_{٢}$ ، لذلك نجد ان معاملات المتغيرات الاساسية بالجدول المبدئي عند الاولوية الثانية كلهـا مساوية للصفر .

أما جسم الجدول والذى يبين معاملات القيود فقد تم اعداده كأي نوع من مشاكل البرامج الخطية .

ثانيا : تجسيد تعدد الأهداف :

ان التعديل الجوهرى الذى يتحتم اجراؤه على جدول السمبلكس التقليدى انما هو انعكاس لتعدد الاهداف فى مشاكل برمجة الاهداف ، ونظرا لان المشكلة التي نعالجها الآن تتضمن هدفين ،لذا ينبغى ان يأتي الجدول انعكاسا وتجسيدا لهذين الهدفين ،وهذا يتطلب ويفرض ضرورة تقسيم الجزء الاسفل من الجدول الى عدد من الاقسام وفقا لعدد الاهداف الموجودة بالمشكلة ،ولذلك فقد تم تقسيم الجزء الاسفل من الجدول المبدئي السابق الى قسمين ، يمثل كل منهما هدفا معينا ،أما ترتيب وضع تلك الاهداف فى الاقسام المخصصة لها فانه يتمشى مع الترتيب التصاعدى لمستوى الاولوية ، فاقل الاهداف أولوية يوضع في أول قسم ، ثم الذى يليه فى الاولوية يوضع فى القسم الثاني وهكذا .

وفي كل جزء من الاجزاء المخصصة لمستوى الاولويات يجرى تقسيمه افقيا الى ثلاثة صفوف ،أولهما يخصص للارباح الداخلة ، والثاني يمثل التكاليف الداخلة ،اما الصف الثالث والاخير فيخصص لصافى التغير . وبطبيعة الحال هذه التقسيمات بهذا الشكل تخالف شكل الجدول الذى يعد لمعالجة مشاكل البرمجة الخطية وحيدة الهدف والذى كان يوضع به صف الارباح الداخلة فى قمة الجدول ،أما في مشاكل برمجة الاهداف ، فان الارباح الداخلة تشكل مع التكاليف الداخلة وقيم صافي التغير مجموعة واحدة لكل

مستوى اولوية وتوضع فى الجزء الاسفل من الجدول .

والسؤال المطروح الآن : ماهي قيم الارباح الداخلة التى سيتم تسجيلها عند كل مستوى من مستويات الاولوية الموضوعة ؟ للاجابة على ذلك نقول ان قيم الارباح الداخلة هي ببساطة معاملات دالة الهدف لكل متغير عند مستوى الاولوية المخصص ،فبالنسبة لمستوى الاولوية ($ل_١$) نجد ان الارباح الداخلة الوحيدة غير الصفرية هي المقابلة للمتغير $ف^-_١$ (هدف الربح غير المحقق) ،وعند مستوى الاولوية الثانية ($ل_٢$) فان الارباح الداخلة الوحيدة غير الصفرية هي المقابلة للمتغير $ف^+_٢$(التجاوز أو المبالغة فى مستوى المخزون) ، أو بشكل آبسط قيم قراءة دالة الهدف الواردة بالصياغة الرياضية لمشكلة برمجة الاهداف ، وتكون متغيرات الانحراف الواردة بها هي فقط المتغيرات التى لها معامل بدالة الهدف كأرباح داخلة وفقا للأولوية المحددة وماعدا ذلك من متغيرات فان ارباحها الداخلة صفرية لأنها لم تدخل فى دالة الهدف بالصياغة الرياضية . ولذلك سيتم كتابة رقم ١ بصف الارباح الداخلة عند الاولوية الثانية وتحت عمود المتغير $ف^+_٢$ وباقى معاملات الصف تكون صفرا ، كذلك نضع رقم ١ فى صف الارباح الداخلة عند مستوى الاولوية الاولى واسفل عمود المتغير $ف^-_١$ وباقى معاملات الصف تكون صفرا .

<u>ثالثا</u> : <u>حساب قيم صف التكاليف الداخلة</u> :

يتم حساب قيم صف التكاليف الداخلة بالاسلوب العادى المتبع بطريقة السمبلكس ، أى هي مجموع حواصل ضرب المعاملات الواردة بكل عمود فى القيم المقابلة لها بعمود معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية ، ويكون حاصل الضرب هو بمثابة التكلفة الداخلة لذلك العمود ، مع ملاحظة ان يتم ذلك عند كل مستوى أولوية . فمثلا التكلفة

الداخلة لعمود المتغير $س_1$ عند مستوى الاولوية الاولى يتم حسابها كالآتي :

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية عند $ل_1$		$س_1$		
صفر	×	٢	=	صفر
١	×	١٥	=	١٥
صفر	×	١	=	صفر

١٥ التكلفة الداخلة

وكذلك يتم حساب التكلفة الداخلة للمتغير $س_1$ عند مستوى الاولوية الثانية بنفس الطريقة كالآتي :

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية عند $ل_2$		$س_1$		
صفر	×	٢	=	صفر
صفر	×	١٥	=	صفر
صفر	×	١	=	صفر

صفر التكلفة الداخلة

رابعا : حساب قيم صف صافى التغير :

ويتم حساب قيم صافى التغير لكل مستوى أولوية بالطريقة المعتادة أي بطرح قيم التكاليف الداخلة من قيم الارباح الداخلة بالنسبة لكل متغير من متغيرات الصياغه الرياضية للمشكلة ، فمثلا بالنسبة للمتغير ($س_1$) وعند مستوى اولوية ($ل_1$) تكون قيمة صافى التغير كالآتي :

صافي التغير = الارباح الداخلة ـ التكاليف الداخلة

= صفر − ١٥ = − ١٥

وعند مستوى اولوية ($ل_٢$) تكون قيمة صافى التغيير كالآتي :

صافى التغير = صفر - صفر = صفر

ونذكر القارئ في هذا الجزء بأن قيم صافي التغير تمثل التأثير على دالة الهدف لكل مستوى اولوية ، والذى ينتج عن زيادة وحدة واحدة في قيم المتغيرات ، فزيادة وحدة واحدة من المتغير $س_٣$ ،ستؤدى الى تخفيض قيمة هدف الاولوية الاولى بمقدار ١٥ ،في حين ان نفس تلك الزيادة لن يكون لها أي اثر على قيمة هدف الاولوية الثانية .

خامسا : حساب قيمة دالة الهدف للحل المبدئي :

ويمكن حساب وايجاد القيمة الجارية أو الحالية لدالة الهدف عند كل مستوى اولوية ايضا بالطريقة المعتادة ،أي بضرب قيمة كل متغير أساسي x معامل الهدف المقابل لذلك المتغير عند الاولوية المحددة ومن ثم جمع ناتج الضرب فيكون هو قيمة دالة الهدف عند تلك الاولوية ، فبالنسبة للأولوية الاولى ($ل_١$) يمكن حساب قيمة دالة الهدف من واقع بيانات الجدول المبدئي وذلك كالآتي :

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية $ل_١$		القيم		
صفر	x	٧٢٠٠	=	صفر
١	x	٧٠٠٠٠	=	٧٠٠٠٠
صفر	x	٥٠٠٠	=	صفر

قيمة دالة هدف ($ل_١$) = ٧٠٠٠٠

وبالنسبة لمستوى الاولوية ($ل_٢$) تكون قيمة دالة الهدف كالآتي :

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية $ل_٢$		القيم		
صفر	×	٧٢٠٠	=	صفر
صفر	×	٧٠٠٠٠	=	صفر
صفر	×	٥٠٠٠	=	صفر
قيمة دالة هدف ($ل_٢$)				صفر

والى هذا الحد نكون قد استكملنا كافة البيانات والمعلومات للجدول المبدئي ، وقد يكون من المفيد جدا ان نعلق على مغزي النتائج التى يظهرها الجدول المبدئي اذ مامعنى ان قيمة دالة الهدف للاولوية الاولى ٧٠٫٠٠٠ جنيه ؟ ، ان ذلك يعنى ان الحل الوارد بالجدول المبدئي ينحرف عن هذه الاولوية بمقدار ٧٠٫٠٠٠ جنيه ، أو بمعنى آخر يبلغ الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الاولى (الربح) بما يعادل ٧٠٠٠٠ جنيه ، وهذا بطبيعة الحال أمر منطقى ، وذلك لان جدول الحل المبدئي يمثل حالة عدم الانتاج ، أي أن قيمة $س_١$ ، $س_٢$ وهي المتغيرات القرارية مساوية للصفر • وطالما ان الامر كذلك فانه لا أرباح محققة ، أي ان الارباح المستهدفة كأولوية اولى مقدارها ٧٠٠٠٠ جنيه ، فى حين ان الحل المبدئي يحقق ارباحا محققة مقدارها صفر ، أي ان نتائج الحل الحالي تنحرف انحرافا غير مرغوب فيه عن المستهدف بما مقداره ٧٠٫٠٠٠ جنيه •

ومن ناحية اخرى فان حالة عدم الانتاج التي يمثلها جدول الحل المبدئي يعنى ان قيمة كل من المتغيرات القرارية $س_١$ ، $س_٢$ مساوية للصفر• ومن ثم فلا يوجد انتاج للتخزين ، أي أن هدف الاولوية الثانية

مستوفي تماما دون انحراف غير مرغوب فيه وذلك لأن قيد هدف التخزين سبق ان تم صياغته كالآتي :

$$س_1 + س_2 \geqslant ٥٠٠٠$$

ولهذا السبب سنجد أن قيمة دالة الهدف للأولوية الثانية مقدارها صفر ، آي لايوجد انحراف غير مرغوب فيه فى تحقيق هدف التخزين كأولوية ثانية •

سادسا : اختبار مثالية الحل :

ان اختبار مثالية الحل والذى سبق اتباعه .في نماذج البرمجة الخطية سيتم ادخال بعض التعديل عليه ليتلاءم مع نموذج برمجة الاهداف من حيث تعدد الاهداف واولويتها ، ولقد سبق القول فى اختبار مثالية الحل في مشاكل البرمجة الخطية فى الفصول المتقدمة انه اذا كانت المشكلة تمثل مشكلة تخفيض دالة الهدف ،اذن شرط الامثلية هو ان تكون كافة قيم صف صافى التغير موجبة أو صفرية ، اذ ان غياب القيم السالبة بصف صافى التغير يعنى ان الانحرافات غير المرغوب فيها لايمكن الاستمرار في تخفيضها اكثر من ذلك •

من ناحية آخرى فان الامثلية تشير الى انه عندما تكون بعض المتغيرات ذات قيمة صافى تغير سالبة ، قد يكون لها قيم صافى تغير موجبة (غير صفرية) عند مستويات الاولوية الاعلى وهذا بطبيعة الحال هو الوضع الامثل بسبب هيكل اولويات الاهداف • فبرغم ان القيمة السالبة تعنى ان بعض متغيرات الانحراف للاولويات المنخفضة يمكن ان تنخفض اكثر مما عليه ، الا ان ذلك سيؤدى بالتالى الى زيادة انحرافات بعض أهداف الاولويات الاعلى • وتقيدنا والتزامنا بأولويات الاهداف يمنعنا من عمل ذلك• وبمعنى آكثر وضوحا فاننا سنستمر فى تحسين الحل وادخال متغيرات اساسية جديدة

للحل طالما كان فى استطاعتنا تخفيض واحد أو أكثر من متغيرات الانحراف دون زيادة متغير انحراف الاولوية العليا .

وتلخيصا لما تقدم فانه لاختبار مثالية الحل فاننا ننظر الى صف صافي التغير لمستوى الاولوية الاعلى أولا ، فاذا تبين ان كل القيم موجبة او صفرية نكون قد وصلنا الى الحل الامثل ، أما اذا ظهرت قيم صافي تغير عند هذا المستوى من الاولوية فيتعين الدخول في جولة تالية لتحسين الحل . وهنا يثار تساؤل وماهو موقف صافي التغير للأولويات الادنى ؟ الا يمكن استخدامها للحكم على المثالية وتحسين الحل ؟ سيتم الاجابة على هذا التساؤل في حينه وعندما نواجه بهذا الموقف عند الحل .

وتطبيقا لقواعد اختبار المثالية التى اوضحناها في السطور المتقدمة ،يتضح من جدول الحل المبدئي أن هناك قيما سالبة للمتغيرات القرارية $س_1$ ،$س_2$ فى صف صافي التغير بالنسبة لهدف الاولوية الاولى ($ل_1$) . لذلك يمكن القول ان الحل الذى يقدمه الجدول المبدئي هو حل غير أمثل ويتعين السير فى خطوات تحسين الحل التالية :

سابعا : تحسين الحل :

ويتم اجراء تحسين الحل بنفس الخطوات المعتادة والتى سبق اتباعها عند التعرض لحل مشاكل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس ، والتى تتضمن اختيار المتغير الداخل ، وتعيين المتعين الخارج ، وتحديد المفتاح ،ثم اعداد جدول تحسين الحل ، وفيما يلي استعراض تلك الخطوات بالتطبيق على جدول الحل المبدئي السابق .

(١) اختيار المتغير الداخل :

بعد ان تبين من اختبار مثالية الجدول المبدئي للحل انه فى الامكان تحسين دالة هدف مستوى الاوليه الأولى

($ل_1$) ، حيث انه يوجد اكثر من قيمة صافى تغير سالبة عند مستوى الاولوية الاولى . وكالمعتاد سيتم اختيار المتغير ذات اكبر قيمة صافى تغير باشارة سالبة ،طالما ان ذلك المتغير له قيمة صافى تغير صفرية عند أهداف الاولويات الاقل .

ومن الجدول المبدئي السابق ، يتضح ان كلا من المتغيرين $س_1$ ، $س_2$ لهما قيم صافي تغير سالبة عند مستوى الاولوية الاول ($ل_1$) ، وذلك يعنى ان كليهما يفيدان في تخفيض حجم الانحراف غير المرغوب لهدف الربح، وحيث ان المتغير $س_1$ هو الذى له قيمة صافى تغيير باشارة سالبة تزيد عن قيمة صافى التغير للمتغير $س_2$ ($س_1$ = − ١٥ ، $س_2$ = − ١٠) لذلك يتم اختيار $س_1$ كمتغير داخل .

(٢) تعيين المتغير الخارج :

أما المتغير الذى سيتم اختياره كمتغير خارج، فسيتبع فى طريقة اختياره الطريقة ذاتها والتى سبق اتباعها فى مشاكل البرمجة الخطية وحيدة الهدف . اذ سيتم حساب المعدلات عن طريق قسمة قيمة كل متغير اساسى في الجدول على المعامل الموجب المقابل بعمود المتغير الداخل ، ومن ثم يتم اختيار المتغير الذى يصل الى الصفر قبل غيره ، أي المتغير ذات أقل معدل كمتغير خارج ، ويلاحظ أننا اجرينا هذه العملية الحسابية على يسار الجدول المبدئي ووفقا لذلك سيكون المتغير الخارج هو المتغير $س_2$ وسيحل محله المتغير الداخل $س_1$.

(٣) تعيين العنصر المحوري (المفتاح):

وسنجد من الجدول المبدئي ان العنصر المحورى (المفتاح) والذى يتحدد من تقاطع صف المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل ، وهو الرقم (٢) والموضح بالجدول . .

(٤) اعداد الجدول الثاني :

تتم كافة العمليات المطلوبة لتكوين الجدول الثاني طبقا لمنهج طريقة السمبلكس والتى تناولناها سابقا ، اذ يتم ايجاد القيم الجديدة للصف الرئيسي الجديد (صف $س_١$) بقسمة كل المعاملات الموجودة بالصف القديم (صف المتغير الخارج) على العنصر المحورى (المفتاح) ، وكذلك يتم ايجاد القيم الجديدة لباقى الصفوف بنفس العمليات الحسابية التى تناولناها بالتفصيل فى حل مشاكل البرمجة الخطية وحيدة الهدف بالفصل الثاني . كذلك فان صف صافى التغير وكذلك قيم دالة الهدف فيتم حسابها وفقا لما اتبعناه عند اعداد الجدول السابق . وبعد اجراء كافة العمليات الحسابية المطلوبة سيظهر جدول الحل الثاني على الصورة التالية :

الجدول الثاني

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية $ل_1$	معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية $ل_2$	المتغيرات الاساسية		القيم	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$ف_1^-$	$ف_1^+$	$ف_2^-$	$ف_2^+$	
صفر	صفر	$س_1$		٣٦٠٠	١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	صفر	صفر	صفر	صفر	٧٢٠٠
١	صفر	$ف_1^-$		١٦٠٠٠	صفر	$\frac{5}{2}$	$-\frac{15}{2}$	١	-١	صفر	صفر	٦٤٠٠
صفر	صفر	$ف_2^-$		١٤٠٠	صفر	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	صفر	صفر	١	-١	٢٨٠٠
دالة الهدف		$ل_2$	الارباح الداخلة		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	
صفر			التكاليف الداخلة		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	
			صافي التغير		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	
دالة الهدف		$ل_1$	الارباح الداخلة		صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	
١٦٠٠٠			التكاليف الداخلة		صفر	$\frac{5}{2}$	$-\frac{15}{2}$	١	-١	صفر	صفر	
			صافي التغير		صفر	$-\frac{5}{2}$	$\frac{15}{2}$	صفر	١	صفر	صفر	

ويمكن ان نلاحظ من الحل الوارد بالجدول الثاني (وهو جدول تحسين الحل) انه بدخول المتغير $س_٣$ الى الحل كمتغير اساسي قد أدى الى انخفاض دالة هدف الاولوية الاولى (الربح) من ٧٠٫٠٠٠ الى ١٦٠٠٠ (وهو انحراف غير مرغوب فيه بالنسبة لهدف الربح)، وفى نفس الوقت استمرت قيمة دالة هدف الاولوية الثانية مساوية للصفر ، ولكن ماهو تفسير تلك النتائج ؟ الجزء التالي يقدم تفسيرا لهذه النتائج لنقف على ماحدث عندما تم الانتقال من جدول الحل المبدئي الى الجدول الثاني .

من الجدول الثاني يتضح ان قيمة المتغير الاساسي ($س_١$) هى ٣٦٠٠ وهذا يعنى انه وفقا للحل الوارد بالجدول الثاني سيتم انتاج عدد ٣٦٠٠ وحدة من المنتج $س_١$ ، وحيث ان هامش ربح الوحدة الواحدة منها هو ١٥ جنيه ، اذن انتاج هذه الكمية ستحقق ارباحا مقدارها ٥٤٠٠٠ جنيه (٣٦٠٠ x ١٥) ، وهذا يعنى ان الانحراف عن هدف الربح سينخفض بمقدار ٥٤٠٠٠ جنيه عما كان عليه في الجدول المبدئي (٧٠٠٠٠) ، أي سيصبح الانحراف مقداره ٧٠٠٠٠ ـ ٥٤٠٠٠ = ١٦٠٠٠ جنيه ، ولذلك وجدنا ان الجدول الثاني يعطي قيمة دالة هدف للاولوية الاولى (الربح) مقدارها ١٦٠٠٠ جنيه .

من ناحية اخرى ، لماذا استمرت قيمة دالة هدف الاولوية الثانية مساوية للصفر كما كانت عليه في الجدول المبدئي ؟ للاجابة على ذلك نقول ان انتاج ٣٦٠٠ وحدة من $س_١$ يعتبر أقل من الحد الاقصى لمستوى المخزون والمحدد بعدد ٥٠٠٠ وحدة من المنتجين، أي انه حتى الآن لاتوجد انحرافات غير مرغوب فيها بالنسبة لهدف الاولوية الثانية ، ولهذا السبب ظهرت قيمة دالة هدف الاولوية الثانية مساوية للصفر .

ولكن هل الجدول الثاني الذى توصلنا اليه يمثل

جدولا للحل الامثل أم يتعين العمل على تحسينه ؟ وفقـا لقاعدة الامثلية سنجد من فحص قيم صف صافى التغير عند الاولوية الثانية بالجدول الثاني ان هناك قيمة صافي تغير سالبة للمتغير $س_٢$ ($-\frac{٥}{٢}$) ، وهذا يعنى ان هناك امكانية لتحسين الحل عن طريق تخفيض انحرافات هدف المستوى الاول (الربح) بمقدار ٢ر٥ جنيه ($\frac{٥}{٢}$) لكل وحدة يتم انتاجها من $س_٢$ • لذلك يمكن تقرير ان الحل الذى يقدمه الجدول الثاني ليس هو الحل الامثل بعد، ولكن يتعين السير لتحسينه ، ولهذا الغرض سيكون المتغير $س_٢$ هو المتغير الداخل (هو المتغير الوحيد الذى له قيمة صافى تغير سالبة عند الاولوية الاولى)، وتشير قيم العمليات الحسابية المستخدمة لتحديد المتغير الخارج ان المتغير الخارج هو ($ف_٢^-$) لأنه ذات اقل خارج قسمة ، ونود ان نذكر القارىء هنا بأن المتغير $ف_٢^-$ يمثل عدم التحقق للحد الاقصى لمستوى المخزون • لذلك فان انتاج $س_٢$ سيعمل على استغلال طاقة التخزين المتبقية •

(٥) اعداد الجدول الثالث :

ويتم اعداد الجدول الثالث بذات الاسلوب الذى اتبع في اعداد الجدولين السابقين ، وباتمام العمليات الحسابية المطلوبة لهذا الجدول كما هو معتاد سنصل الى الجدول الثالث التالي :

الجدول الثالث

المتغير الخارج: $ف_1^-$ — متغير داخل: $ف_2^+$

معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية $ل_1$	$ل_2$	المتغيرات الأساسية	القيم	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$ف_1^-$	$ف_1^+$	$ف_2^-$	$ف_2^+$	
صفر	صفر	$س_1$	٢٢٠٠	١	صفر	١	صفر	صفر	١ –	١	٢٢٠٠
١	صفر	$ف_1^-$	٩٠٠٠	صفر	صفر	٥ –	١	١ –	٥ –	٥	١٨٠٠
صفر	صفر	$س_2$	٢٨٠٠	صفر	١	١ –	صفر	صفر	٢	٢ –	
دالة الهدف		$ل_2$	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	
صفر			التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	
			صافي التغير	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	
دالة الهدف		$ل_1$	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	
٩٠٠٠			التكاليف الداخلة	صفر	صفر	٥ –	١	١ –	٥ –	٥	
			صافي التغير	صفر	صفر	٥	صفر	١	٥	٥ –	

ومن الجدول الثالث يمكن ان نقف على الملاحظات التالية :

* ان هذا الجدول لايمثل بعد الحل الأمثل، حيث انه مازالت توجد قيمة صافى تغير سالبة بالنسبة للاولوية الاولى عند المتغير ($ف_٢^+$) ، ومن ثم فان اختيار هذا المتغير للدخول فى جولة تالية للحل سيعمل على تخفيض الانحرافات غير المرغوب فيها لهدف الربح بمقدار ٥ جنيهات عن كل وحدة تضاف من المتغير ($ف_٢^+$) .

* يلاحظ ايضا ان قيمة صافى التغير فى مستوى الاولوية الثانية للمتغير ($ف_٢^+$)هو(+١) ،وحيث ان هذا المتغير يمثل الانحراف غير المرغوب بالنسبة لهدف الاولوية الثانية (هدف مستوى المخزون) ، وهذا يعنى ان زيادة وحدة واحدة من ($ف_٢^+$) سيؤدى الى زيادة قيمة دالة هدفالاولوية الثانية بمقدار (١) .

* من البندين الاول والثاني ،نجد أن هناك موقفا متناقضا ،ففى حين زيادة ($ف_٢^+$) بمقدار وحدةواحدة يؤدى الى تخفيض ٥ وحدات منالانحراف غير المرغوب لهدف الاولوية الاولى (الربح)، نجد أنه في ذات الوقت يعمل على زيادة الانحرافات غير المرغوبة لهدف الاولوية الثانية بمقدار (١) ،وهنا نتساءل ماهو التعرف الواجب حيال هذا التناقض ؟ للاجابة على ذلك نقول ان برمجة الاهداف تقوم على قاعدة أساسية مؤداها : أي تحسين يمكن ان يؤدى الى تحسين فى هدف مستوى الاولوية الاعلى فانه ينبغي اجراؤه بصرف النظر عن الاثر الذى سيحدثه على أهداف الاولويات الاقل . وتمشيا مع تلك القاعدة فاننا سنختار المتغير($ف_٢^+$) كمتغير داخل لتحسينالحل.

* بالنظر الى المعدلات المحسوبة فى اقصى يسار الجدول نستنتج ان المتغير الخارج هو ($ف_1^-$) ،والواقع ان اختيار المتغير ($ف_1^-$)كمتغير خارج يشير الى ان هدف الربح كمستوى اولوية اولى سوف يتم الوفاء به كاملا في الجدول التالي لأن خروج هذا المتغير سيجعله يصبح متغيرا غير أساسي وبقيمة مقدارها صفر ، وهذا يشير الى ان هدف الربح لم يعد فى حالة عدم تحقق وانه تحقق بكامله دون انحراف غير مرغوب •

(٦) اعداد الجدول الرابع :

سيظهر جدول الحل الرابع على الشكل التالي :

الجدول الرابع

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية ل١	ل٢	المتغيرات الاساسية	القيم	س١	س٢	س٣	ف١-	ف١+	ف٢-	ف٢+
صفر	صفر	س١	٤٠٠	١	صفر	٢	$-\frac{١}{٥}$	—	صفر	صفر
صفر	١	ف٢+	١٨٠٠	صفر	صفر	-١	$\frac{١}{٥}$	$-\frac{١}{٥}$	-١	١
صفر	صفر	س٢	٦٤٠٠	صفر	١	-٣	$\frac{٢}{٥}$	$-\frac{٢}{٥}$	صفر	صفر
دالة الهدف		ل٢	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
١٨٠٠			التكاليف الداخلة	صفر	صفر	-١	$\frac{١}{٥}$	$-\frac{١}{٥}$	-١	١
			صافي التغير	صفر	صفر	١	$-\frac{١}{٥}$	$\frac{١}{٥}$	١	صفر
دالة الهدف		ل١	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر
صفر			التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
			صافي التغير	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر

ويتضح من هذا الجدول مايلي :

(١) ان قيمة دالة هدف مستوى الاولوية الاولى = صفر، وهذا يعنى ان هدف الاولوية الاولى قد تم تحقيقه بالكامل بدون أي انحراف غير مرغوب ،ويمكن التأكد من ذلك بالنظر الى صف صافى التغير عند مستوى تلك الاولوية ، اذ سنجد ان كل معاملات هذا الصف اما قيما موجبة أو صفرية.

(٢) كذلك يتبين من الجدول ان هدف الاولوية الثانية لم يتم تحقيقه تماما وبالضبط ، اذ سنجد أن قيمة دالة هدف تلك الاولوية ($ل_٢$)مساوية للقيمة ١٨٠٠ ، وهذا يعنى ان الحل الذى يمثله الجدول الرابع سيتم وفقا له انتاج ١٨٠٠ وحدة زيادةعن مستوى الحد الاقصى للمخزون ، اذ وفقا لهذا الحل الموجود بالجدول سيتم انتاج عدد ٤٠٠ وحدة من $س_١$ ، ٦٤٠٠ وحدة من $س_٢$ اي أن اجمالى الانتاج ٦٨٠٠ وحدة وهذا الحجم من الانتاج يزيد بمقدار ١٨٠٠ وحدة عن مستوى المخزون المحدد بعدد ٥٠٠٠ وحدة (٦٨٠٠ – ٥٠٠٠ = ١٨٠٠) .

(٣) من ناحية اخرى فانه بالنظر الى صف صافى التغير عند مستوى الاولوية الثانية ($ل_٢$) ، سنجد ان المتغير ($ف_١^-$) له قيمة صافى تغير سالبة، فهل يمكن اختيار ($ف_١^-$) كمتغير داخل حتى يمكن تخفيض الانحراف عن هدف الاولوية الثانية؟حقيقة الامر أن اختيار المتغير ($ف_١^-$) كمتغير داخل في جولة تالية للحل ، سيؤدى الى تخفيض الانحراف عن هدف الاولوية الثانية، ولكن قبل ان يتم هذا الاختيار علينا ان نتساءل عن ماهو أثر اختياره كمتغير داخل على دالة هدف الاولوية الاولى ؟ ان قيمة صافي التغير للمتغير ($ف_١^-$) عند مستوى

الاولوية الاولى = (+١) ، وهذا يعنى ان ذلك المتغير كمتغير داخل في جولة تالية للحل سيؤدى الى وجود انحراف غير مرغوب فيه في هدفالاولوية الاولى ، وحيث أن القاعدة السابقة تقرر انه لاينبغي ان يكون تحسين هدف الاولوية الادنى على حساب هدف الاولوية الاعلى ، لذلك فان الحل الذى يقدمه الجدول الرابع هو الحل الأمثل .

مثال محلول :

تناولنا فى الجزء السابق شرحا وتطبيقا للاسلوب الذى يمكن من خلاله حل مشاكل البرمجة الخطية متعددة الاهداف والذى اطلقنا عليه اسلوب برمجة الاهداف ، وقد تناولنا عند تطبيق هذا الاسلوب مثالا مبسطا لتوضيح خطوات الاسلوب وفهم مغزاه ، ومن ثم يصبح من المفيد فى هذا الجزء ان نتناول مثالا اكثر تعقيدا وأكبر حجما ، ويتضمن تعددا فى اهدافه المتناقضة ،وقد يكون من الافضل لهذا الغرض ان نختار المثال الذى ورد قبل ذلك في مستهل هذا الفصل والذى كان يصف مشكلة شركة انتاج اجهزة الفيديو بحجميه الكبير والصغير،وفيما يلي استعراض لهذا المثال ثم نعمل على صياغته وحله .

يحاول مدير الانتاج باحدى الشركات الانتاجيةوضع جدولة لانتاج الاسبوع القادم من نوعين من منتجات الشركة ،النوع الاول يمثل جهاز فيديو حجمكبير وتعطي الوحدة منه هامش ربح مقداره مائة جنيه ،والنوع الثاني يمثل جهاز فيديو صغير الحجم وتعطى الوحدة منه هامش ربح مقداره ثمانون جنيها ، ويهدف مدير الانتاج الى تحديد المزيج الانتاجي الامثل للاسبوع القادم، علما بأنه قد تبين من المعلومات المتاحة بقسم التسويق أن هناك ارتباطات مع بعض العملاء يتعين الالتزام بها وتتمثل في تسليمهم عدد ١٠٠ جهاز حجم كبير،وعدد ٢٠٠

جهاز حجم صغير فى نهاية الاسبوع القادم ، كذلك فان مدير الانتاج على بينة تامة من أن قوة العمل المتاحة لديه لاتزيد عدد ساعات التشغيل الاسبوعي لها عن ٦٠٠ ساعة عمل، وتحتاج النوعية الاولى من الاجهزة الى ثلاثة ساعات عمل لتجميعها ، وتحتاج النوعية الثانية الى ساعتين عمل فقط . وتهدف الشركة الى تحقيق عدد من الاهداف ذات الاولويات المعينة وهي :

هدف الاولوية الاولى : تحقيق ٢٠٠٠٠ جنيه ارباحا على الاقل.
،، ،، الثانية : انتاج ١٠٠ جهاز فيديو حجم كبير على الاقل .
،، ،، الثالثة : انتاج ٢٠٠ جهاز فيديو حجم صغير على الاقل .
،، ،، الرابعة : تجنب التشغيل لوقت اضافي (الساعات المتاحة ٦٠٠ ساعة عمل).

والمطلوب ايجاد حجم الانتاج الامثل فى ضوء المعلومات السابقة .

الحل :

اولا : اعداد الصياغة الرياضية كمشكلة من مشاكل البرمجة الخطية .

بفرض ان $س_1$ = عدد اجهزة الفيديو من الحجم الكبير والتي سيتم انتاجها .

وبفرض ان $س_2$ = عدد اجهزة الفيديو من الحجم الصغير الذى سيتم انتاجها .

وبناء على ذلك يمكن صياغة الاهداف السابقة كالآتي :

$١٠٠س_1 + ٨٠س_2 \geqslant ٢٠٠٠٠$ (هدف الربح)

$س_1 \geqslant ١٠٠$ (هدف انتاج ١٠٠ جهاز حجم كبير)

$س_2 \geqslant ٢٠٠$ (،، ،، ٢٠٠ ،، ،، صغير)

$٣س_1 + ٢س_2 \leqslant ٦٠٠$ (،، تجنب الوقت الاضافي)

وبعد اضافة متغيرات الانحراف السالبة والموجبة الى كل هدف من هذه الاهداف سنصل الى مجموعة المعادلات التالية :

$١٠٠س_١ + ٨٠س_٢ + ف_١^- - ف_١^+ = ٢٠٠٠٠$ (هدف الربح)

$س_١ + ف_٢^- - ف_٢^+ = ١٠٠$ (انتاج ١٠٠ جهاز كبير)

$س_٢ + ف_٣^- - ف_٣^+ = ٢٠٠$ (انتاج ٢٠٠ جهاز صغير)

$٣س_١ + ٢س_٢ + ف_٤^- - ف_٤^+ = ٦٠٠$ (تجنب الوقت الاضافي)

وحتى يمكن التوصل الى استكمال الصياغة الرياضية باعداد دالة الهدف فانه يتعين ان نقف على اتجاه كل هدف من هذه الاهداف الاربعة وذلك لنتمكن من تحديد تلك الانحرافات غير المرغوب فيها والتي سيتم تضمينها دالة الهدف لتخفيضها .

فمثلا هدف الاولوية الاولى يسعى الى تحقيق أرباح مقدارها ٢٠٠٠٠ جنيه على الاقل ، اذن الانحراف ($ف_١^-$)وهو يمثل مقدار عدم التحقق لهدف الربح يعتبر بمثابة متغير انحراف غير مرغوب فيه .

كذلك الحال فان ($ف_٢^-$) وهو المتغير الذى يمثل عدم تحقيق الحد الادنى لانتاج اجهزة الفيديو كبيرة الحجم يمثل ايضا متغير انحراف غير مرغوب فيه بالنسبة لهدف الاولوية الثانية .

أما بالنسبة لهدف الاولوية الثالثة فانه لايختلف عن هدف الاولوية الثانية ، اذ أن المتغير ($ف_٣^-$) يمثل انحراف غير مرغوب فيه ، لانه المتغير الذى يشير الى مقدار عدم تحقيق الحد الادنى لانتاج اجهزة الفيديو صغيرة الحجم .

أما بالنسبة لهدف الاولوية الرابعة والاخيرة وهو هدف تجنب الوقت الاضافى فان اتجاه قيد هذا الهدف يشير الى ان زيادة التحقق فى المستوى الموضوع لهذا الهدف يعتبر انحراف غير مرغوب فيه ، أى أن متغير الانحراف ($ف_{٤}^{+}$) هو الانحراف الذى ينبغى العمل على تجنبه وفقا لمتطلبات الهدف الرابع .

وبصفة عامة يمكن القول أننا نريد أن نعمل على تخفيض الانحرافات غير المرغوب فيها وفقا لاولويات الاهداف الاربعة .

مما تقدم فان الصياغة الرياضية الكاملة للمشكلة التى يمثلها المثال الحالى كمشكلة برمجة اهداف ستكون على الصورة التالية :

دالة الهدف :تخفيض $ف_{٤}^{+}$ | نهاية صغرى $ف_{٣}^{-}$ | نهاية صغرى $ف_{٢}^{-}$ | نهاية صغرى $ف_{١}^{-}$

بشرط أن : $١٠٠س_{١} + ٨٠س_{٢} + ف_{١}^{-} - ف_{١}^{+} = ٢٠\ ٠٠٠$

$$س_{١} + ف_{٢}^{-} - ف_{٢}^{+} = ١٠٠$$

$$س_{٢} + ف_{٣}^{-} - ف_{٣}^{+} = ٢٠٠$$

$$٣س_{١} + ٢س_{٢} + ف_{٤}^{-} - ف_{٤}^{+} = ٦٠٠$$

$$س_{١}، س_{٢}، ف_{١}^{-}، ف_{١}^{+}، ف_{٢}^{-}، ف_{٢}^{+}، ف_{٣}^{-}، ف_{٣}^{+}، ف_{٤}^{-}، ف_{٤}^{+} \geq صفر$$

ثانيا : اعداد الجدول المبدئي للحل :

بعد اعداد الصياغة الرياضية نبدأ فى اعداد جدول الحل المبدئي ،ولمزيد من التوضيح سنقوم باعداده وفق خطوات مسلسلة كالآتي :

(١) تخطيط هيكل الجدول بالصورة المعتادة لنموذج برمجة الاهداف مع ملاحظة أن هذا المثال يتضمن أربعة أهداف ، أي يتم تخطيط الجدول بحيث يتضمن الجزء الاسفل منه

أربعة اجزاء يخصص لكل اولوية جزء مبتدئين من اعلى بهدف الاولوية الادنى ($ل_٤$) ومتدرجين حتى الاولوية الاولى .

(٢) نبدأ فى شغل عمود المتغيرات الاساسية ،وهنا يثار تساؤل وماهي المتغيرات الاساسية بجدول الحل المبدئي؟ كما هو معروف فان الجدول المبدئي يفترض فيه أو هو أصلا حل يمثل عدم الانتاج ، أي ان المتغيرات القرارية في الجدول المبدئي ($س_١$ ،$س_٢$) ستكون متغيرات غير اساسية قيمة كل منها مساوية للصفر ،كذلك فان حالة عدم الانتاج تعنى انه لايمكن تجاوز الاهداف الموضوعة للارباح وللانتاج ، فمثلا حالة عدم الانتاج تعنى انه لايمكن تجاوز الارباح المستهدفة لانه لن يكون هناك ارباح اصلا ، أي أن انحراف التجاوز لهدف الاولوية الادني ($ف_١^+$) ستكون قيمته صفر ، اذن هو متغير غير اساسي بجدول الحل المبدئي .

أى بصفة عامة يمكن القول أنه طالما ان المتغيرات القرارية قيمتها صفر ($س_١$ ،$س_٢$) وكذلك وكذلك متغيرات التجاوز بكل قيود الاهداف ($ف^+$) قيمتها صفر ، اذن متغيرات عدم التجاوز ($ف^-$) هي المتغيرات الاساسية بالجدول المبدئي ، اذن ستكون المتغيرات الاساسية هي $ف_١^-$ ،$ف_٢^-$ ،$ف_٣^-$ ،$ف_٤^-$. أما قيمة كل متغير من هذه المتغيرات فى الجدول المبدئي فستكون هى مقدار الجانب الايسر لكل قيد هدف توجد به هذه المتغيرات ، أي ان هذه القيم على الترتيب ٢٠٠٠٠ ، ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٦٠٠

(٣) تسجيل الارباح الداخلة عند مستوى كل اولوية وهذه يتم استخلاصها من دالة الهدف . فعند مستوى الاولوية الرابعة نجد ان دالة الهدف بها متغير واحد يخص الاولوية الرابعة وهو متغير الانحراف ($ف_٤^+$) لذلك تكون الارباح الداخلة صفر لكافة المتغيرات الموجودة

بالجدول ماعدا المتغير ($ف_{٤}^{+}$) فاربحه الداخلة هي (١) . وكذلك الحال بالنسبة لباقي الاولويات .

(٤) كذلك يتم تسجيل معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية وفقا للاولويات ، ثم يتم حساب باقى القيم بالجدول والذى تظهر صورته على الشكل التالي :

الجدول المبدئي

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية ل١	ل٢	ل٣	ل٤	المتغيرات الاساسية	القيم	المتغير الداخل س١	س٢	المتغير الخارج ف١-	ف١+	ف٢-	ف٢+	ف٣-	ف٣+	ف٤-	ف٤+
١	صفر	صفر	صفر	ف١-	٢٠٠٠٠	١٠٠	٨٠	١	١-	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	١	صفر	صفر	ف٢-	١٠٠	١	صفر	صفر	١	١-	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	صفر	١	صفر	ف٣-	٢٠٠	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	١	١-	صفر	صفر
صفر	صفر	صفر	صفر	ف٤-	٦٠٠	٣	٢	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	١-
دالة الهدف صفر				ل٤	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
					التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					صافي التغير	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
دالة الهدف ٢٠٠				ل٣	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر
					التكاليف الداخلة	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	١	١-	صفر	صفر
					صافي التغير	صفر	١-	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر
دالة الهدف ١٠٠				ل٢	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					التكاليف الداخلة	١	صفر	صفر	صفر	١	١-	صفر	صفر	صفر	صفر
					صافي التغير	١-	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر
دالة الهدف ٢٠٠٠٠				ل١	الارباح الداخلة	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					التكاليف الداخلة	١٠٠	٨٠	١	١-	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					صافي التغير	١٠٠-	٨٠-	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر

ويمكن ان نستخلص من جدول الحل المبدئي السابق مايلي :

* ان هدف الاولوية الدنيا (تجنب التشغيل لوقت اضافي) مستوفي ومحقق تماما (لاحظ ان دالة هدف الاولوية الرابعة تساوى صفرا)،وهذا بطبيعة الحال امر منطقي بالنسبة للحل الذى يمثله الجدول المبدئي والذى يمثل حالة عدم الانتاج على الاطلاق ،وطالما لايوجد انتاج فان الوقت الاصلي المتاح بخط التجميع لم يستغل اطلاقا ، ومن ثم فلا حاجة اصلا للتشغيل لوقت اضافي . وهذا هو السبب فى ان هدف الاولوية الرابعة محقق تماما بالجدول المبدئي .

* الملاحظة الثانية التي يمكن توضيحها ان دالة الهدف بالاولوية الثالثة تساوى مامقدارة ٢٠٠ ،وهذا يعنى ان جدول الحل المبدئي ،والذى يمثل عدم انتاج أي من المتغيرات القرارية سيترتب عليه عدم امكانية الوفاء بعدد ٢٠٠ فيديو صغير الحجم والتي تم التعاقد عليها مع العملاء ،وكذلك الحال بالنسبة للاولوية الثانية .

* اما بالنسبة لهدف الاولوية الأولى والتى كانت تسعى الى تحقيق ارباح لاتقل عن ٢٠٠٠٠ جنيه ، فاننا سنلاحظ من الجدول المبدئي والذى يمثل حالة عدم الانتاج لأي من المتغيرات القرارية عدم تحقيق أي أرباح مطلقا نتيجة عدم الانتاج ،أي أن الانحراف غير المرغوب فيه بالنسبة لهدف الربح تمثل ٢٠٠٠٠ جنيه وهذا يمكن ملاحظته بوضوح عند دالة هدف الاولوية الاولى .

ثالثا : اختبار مثالية جدول السمبلكس المبدئي :

كما سبق القول فانه يتم اختبار مثالية جداول حل نموذج برمجة الاهداف بذات الطريقة المتبعة في اختبار

مثالية جداول الحل لنموذج البرمجة الخطية ،مع اختلاف واحد هو ان يكون التركيز على صف صافى التغير للاولوية الاعلى اولا • وبناء على ذلك فانه بالنظر الى صف صافي التغير عند الاولوية الاولى ، سنجد ان هناك قيمتين سالبتين ، وهذا يعنى ان الحل الذى يقدمه الجدول المبدئي لايمثل الحل الامثل وانه يحتاج الى التحسين وذلك تطبيقا للقاعدة التى ارسيناها فى البرمجة الخطية والتي كانت تنص على أنه " طالما وجد أن هناك ولو متغير واحد من كافة المتغيرات له قيمة صافى تغير سالبة (بالنسبة لمشاكل التخفيض) فان ذلك يعنى انه يمكن تحسين الحل عن طريق اختبار المتغير ذات اكبر قيمة باشارة سالبة في صف صافى التغير ليكون هو المتغير الداخل "•

رابعا : تحسين الحل :

بعد آن تبين ان الحل بالجدول المبدئي غير أمثل ويتعين تحسينه ،لذلك سنير فى اجراءات تحسين الحل والتي تتمثل في :

١- اختيار المتغير الداخل : سيكون المتغير الداخل هو المتغير ($س_1$) لأنه المتغير ذات اكبر قيمة باشارة سالبة (-١٠٠) في صف صافي التغير عند الاولوية الاولى (هدف الربح)•

٢- تعيين المتغير الخارج : ولتحديد المتغير الخارج سنتبع ايضا نفس القاعدة التى طبقناها في البرمجة الخطية وحيدة الهدف ، وهي ان المتغير الخارج يكون هو المتغير الاساسي الموجود بالقيد الأكثر تحديدا للمتغير الداخل ، أي هو المتغير ذات أقل خارج قسمة من قيم المتغيرات الاساسية على القيم المقابلة بعمود المتغير الداخل • ويلاحظ انه قد تم تدوين العمليات الحسابية اللازمة لتعيين

المتغير الخارج على اقصى يسار الجدول المبدئي وسنجد ان اقل خارج قسمة يقابل المتغير الاساسي ($ف_٢$) وعليه فهو المتغير الذى سيخرج من الحل ليحل محله المتغير الداخل ($س_١$).

٣- تعيين العنصر المحورى (المفتاح) : وهو القيمة الواقعة عند تقاطع عمود التغير الداخل مع صنف المتغير الخارج أي انه القيمة (١).

٤- بعد الانتهاء من اختيار المتغير الداخل ،وتعيين المتغير الخارج ، وتحديد المفتاح ، نبدأ في اعداد الجدول الثاني للحل .

خامسا : الجدول الثاني للحل :

كما سبق القول فان معظم عناصر الجدول الجديد سوف تكون هى نفسها تماما كما كانت بالجدول المبدئي، ولهذا يتم اعداد هيكل الجدول وكتابة عناوين الاعمدة والصفوف دون انتظار حيث انه لن يدخل عليها أي تعديل كذلك يتم تسجيل صفوف الارباح الداخلة عند مستويات الاولويات المختلفة لانها لن تتغير ، يلى ذلك احداث التغيير المطلوب على المتغيرات الاساسية وفق ماتم بالخطوة الرابعة والقيام بالعمليات الحسابية المعتادة للإنتقال من الجدول المبدئي الى الجدول الثاني .وبعد الانتهاء من هذه التعديلات والعمليات الحسابية سيظهر الجدول الثانى على الصورة التالية :

الجدول الثاني

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية ل١	ل٢	ل٣	ل٤	المتغيرات الاساسية	القيم	س١	س٢	ف١-	ف١+	ف٢-	ف٢+	ف٣-	ف٣+	ف٤-	ف٤+
١	صفر	صفر	صفر	ف١-	١٠٠٠٠	صفر	-٨٠	١	-١	-١٠٠	١٠٠	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	صفر	صفر	صفر	س١	١٠٠	١	صفر	صفر	صفر	١	-١	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	صفر	صفر	صفر	ف٣-	٢٠٠	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	١	-١	صفر	صفر
صفر	صفر	صفر	صفر	ف٤-	٣٠٠	صفر	٢	صفر	صفر	-٣	٣	صفر	صفر	١	-١
دالة الهدف				ل٤	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
صفر					التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					صافي التغير	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
دالة الهدف				ل٣	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر
٢٠٠					التكاليف الداخلة	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	١	-١	صفر	صفر
					صافي التغير	صفر	-١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر
دالة الهدف				ل٢	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر					التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					صافي التغير	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
دالة الهدف				ل١	الارباح الداخلة	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
١٠٠٠٠					التكاليف الداخلة	صفر	٨٠	١	-١	-١٠٠	١٠٠	صفر	صفر	صفر	صفر
					صافي التغير	صفر	-٨٠	صفر	١	١٠٠	-١٠٠	صفر	صفر	صفر	صفر

المتغير الخارج ← ف١-

المتغير الداخل ← ف٢+

ومن الجدول الثاني يتضح مايلي :

١- ان هدف الاولوية الرابعة مستوفي ومحقق تماما دون أي انحراف غير مرغوب فيه ، وكذلك الحال بالنسبة لهدف الاولوية الثانية . ويرجع السبب في ذلك الى آن دخول المتغير القراري ($س_1$) كتغير رئيسي في الجدول الثاني للحل وبقيمة مقدارها ١٠٠ وحدة ، يعني انه سيتم انتاج ١٠٠ وحدة من أجهزة الفيديو كبيرة الحجم، وحيث ان هدف الاولوية الثانية هو انتاج ١٠٠ جهاز فيديو كبير الحجم على الاقل ، اذن هدف الاولوية الثانية تحقق بالكامل دون انحرافات غير مرغوب فيها - ومن ناحية آخرى فان انتاج ١٠٠ جهاز فيديو كبير الحجم فعلاوة على انه يحقق هدف الاولوية الثانية ،فانه ايضا وفي نفس الوقت يحقق الاولوية الرابعة ، لأن انتاج ١٠٠ جهاز فيديو كبير الحجم فقط يتطلب ٣٠٠ ساعة تجميع (١٠٠ x ٣ ساعة) . وحيث ان طاقة التجميع المتاحة هي ٦٠٠ ساعة عمل، فان ذلك يعني ان هناك فائض في ساعات العمل مما يكون مبررا لعدم التشغيل الاضافي لهذا القسم ،لأنه من الاصل لم يتم استغلال طاقته المتاحة بأكملها ، وهذا يعني بالتبعية انه لاتوجد انحرافات غير مرغوب فيها لهدف الأولوية وهذا هو الذى جعل الهدف الرابع مستوفي تماما .

٢- كذلك يلاحظ ان هدف الاولوية الثالثة لم يتحقق ،بل والاكثر من ذلك نجد ان مقدار الانحراف غير المرغوب فيه لذلك الهدف ظلت كما كانت عليه في الجدول المبدئي ، وهذا بطبيعة الحال آمر منطقي،لأن جدول الحل الثاني يمثل انتاج اجهزة فيديو كبيرةالحجم فقط ($س_1$) ، مما جعل الانحراف غير المرغوب فيه لذلك الهدف بنفس مقداره الذى كان عليه بجدول الحل المبدئي .

٣- والأمر الآخر الذى يستحق ان نشير اليه هو ان الحل الوارد بالجدول الثاني قد ادى الى تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الأولى (الربح) من ٢٠٠٠٠ جنيه ليكون فقط ١٠٠٠٠ جنيه ، ويرجع السبب في هذا التخفيض الى الكمية التى ستنتج من اجهزة الفيديو كبيرة الحجم والتى ستحقق أرباحا مقدارها ١٠٫٠٠٠ جنيه (١٠٠ x ١٠٠) ،وحيث أن هدف الاولوية الاولى تحقيق ٢٠ ٠٠٠ جنيه على الأقل، اذن الانحراف عن الهدف مقداره (٢٠٠٠٠-١٠٠٠٠) ١٠٠٠٠ جنيه وهذا الرقم هو الذي يظهر كقيمة دالة هدف الاولوية الاولى بالجدول الثاني .

٤- بالنظر الى قيم صف صافي التغير عند الاولوية الاولى يتضح انه مازالت توجد قيما سالبة ،ومعنى ذلك ان الجدول الثاني للحل لايمثل بعد الحل الأمثل ، ومن ثم سيتم تحسين الحل باختيار المتغير ($ف_{٢}^{+}$) كمتغير داخل لانه ذات اكبر قيمة باشارة سالبة ، ومن ثم يتم اعداد العمليات الحسابية لتحديد المتغير الخارج ،الا اننا سنجد ان خارج القسمة الذي يحدد المتغير المرشح للخروج متساوى عند كل من المتغير ($ف_{١}^{-}$) ، والمتغير($ف_{٤}^{-}$) . أي ان هناك حالة تعدد فى المتغيرات المرشحة للخروج ،ولقد سبق بيان خطورة الاختيار العشوائي في هذه الحالة ، ولذلك سيطبق قاعدة (تشارنز وكوبر) والتى سبق التعرض لها عند معالجة بعض الحالات الخاصة في البرمجة الخطية . وبتطبيق هذه القاعدة سيكون المتغير الخارج هو ($ف_{٢}^{-}$) ، ومن ثم سيكون العنصر المحورى (المفتاح) هو القيمة (١٠) والواقعة عند تقاطع صف المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل.

سادسا : الجدول الثالث للحل :

ويتم اعداد الجدول الثالث للحل وفق الخطوات المعتادة والتي اتبعت عند الانتقال من الجدول المبدئي الى الجدول الثاني .

وبعد اجراء التعديلات المطلوبة لتحسين الحل، وبعد استكمال العمليات الحسابية المطلوبة للانتقال من الجدول الثاني الى الجدول الثالث . سيظهر الجدول الثالث في صورته النهائية التالية :

الجدول الثالث

المتغير الخارج (ف٢+) — المتغير الداخل (س٢)

معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية ل١	ل٢	ل٣	ل٤	المتغيرات الأساسية	القيم	س١	س٢	ف١-	ف١+	ف٢-	ف٢+	ف٣-	ف٣+	ف٤-	ف٤+
صفر	صفر	صفر	صفر	ف٢+	١٠٠	صفر	٨/١٠	١/١٠٠	-١/١٠٠	-١	١	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	صفر	صفر	صفر	س١	٢٠٠	١	٨/١٠	١/١٠٠	-١/١٠٠	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	صفر	١	صفر	ف٣-	٣٠٠	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	١	-١	صفر	صفر
صفر	صفر	صفر	صفر	ف٤-	صفر	صفر	-٤/١٠	-٣/١٠٠	٣/١٠٠	صفر	صفر	صفر	صفر	١	-١
دالة الهدف صفر				ل٤	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
					التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					صافي التغير	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
دالة الهدف ٣٠٠				ل٣	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر
					التكاليف الداخلة	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	١	-١	صفر	صفر
					صافي التغير	صفر	-١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر
دالة الهدف صفر				ل٢	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					صافي التغير	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
دالة الهدف صفر				ل١	الارباح الداخلة	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					صافي التغير	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر

ويمكن من خلال فحص وتحليل جدول السمبلكس الثالث أن نلاحظ الآتي :

١- تم تحقيق واستيفاء هدف الاولوية الاولى بالكامل، اذ أن قيمة دالة هدف الاولوية الاولى اصبحت فى ذلك الجدول مامقداره صفر ، وهذا يعنى ان الانحراف غير المرغوب فيه بهدف الأولوية الاولى قد تم التخلص منه تماما ، وعلي ذلك يمكن القول أن الجدول الثالث يقدم ارباحا مقدارها ٢٠٠٠٠ جنيه وهذا مايتطابق مع هدف الاولوية الاولى . ولتوضيح كيف آمكن تحقيق هدف الربح بالكامل ، نعود الى الجدول الثالث لنجد أن قيمة المتغير الاساسي ($س_١$) اصبحت ٢٠٠ وحدة ، وحيث ان هامش الربح للوحدة الواحدة ١٠٠ جنيه ، اذن الارباح المحققة من هذا الكم من الانتاج = ٢٠٠ x ١٠٠ = ٢٠ ٠٠٠ جنيه . وهذا يعنى آن هدف الاولوية الاولى تحقق تماما .

٢- كذلك نلاحظ ان هدف الاولوية الثانية محقق أيضا بالكامل وبدون أي انحراف غير مرغوب فيه ، وذلك لأن معادلة هدف الاولوية الثانية كانت انتاج ١٠٠ جهاز فيديو كبير الحجم على الاقل ،وهذا تم استيفاؤه تماما (وزيادة) لأن قيمة المتغير الاساسي ($س_١$) في جدول الحل الثالث = ٢٠٠ وحدة ، ومعنى ذلك ان هناك انحرافا مرغوب فيه ($ف_٢^+$) قيمته ١٠٠ ،ويظهر ذلك من وضع ($ف_٢^+$) ضمن المتغيرات الاساسية وبقيمة مقدارها ١٠٠.

٣- ان الهدف الوحيد الذى لم يتم تحقيقه بعد هو هدف الاولوية الثالثة ، حيث ان قيمة المتغيرات القرارية بالجدول الثالث هي : $س_١$ = ٢٠٠ ، $س_٢$ = صفر.ونظرا لأن هدف الأولوية الثالثة لم يتم تحقيقه بعد،سنجد أن الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الثانية ($ف_٢^-$) ظهر كمتغير اساسي وبقيمة مقدارها ٢٠٠.

٤- بالنظر الى صف صافى التغير عند مستوى الاولوية الاولى نجد أن قيم صافى التغير لكافة المتغيرات موجبه وصفرية ، وهذا يؤكد الاستيفاء الكامل لهدف الاولوية الاولى .

٥- بالنظر الى صف صافى التغير عند مستوى الاولوية الثانية نجد أن قيم صافى التغير لكافة المتغيرات موجبه وصفرية ، وهذا يؤكد بالتالي الاستيفاء الكامل لهدف الاولوية الثانية .

٦- بالنظر الى صف صافى التغير عند الاولوية الثالثة سنجد أن هناك قيمة واحدة سالبة ، وهذا يشير الى امكانية تحسين استيفاء وتحقيق مستوى الاولوية الثالثة ، فالمتغير ($س_٢$) له قيمة صافى تغير سالبة (وهى القيمة السالبة الوحيدة بصف صافي التغير) عند الاولوية الثالثة ، اذ يمكن تحسين مستوى تحقيق هدف الاولوية الثالثة باختيار المتغير ($س_٢$) كمتغير داخل ، الا انه يجب علينا قبل أن نجزم باختيار المتغير $س_٢$ كمتغير داخل ان ننظر أولا الى الاثر الذى يمكن ان يحققه هذا الاختيار على اهداف الاولوية الاولى والاولوية الثانية ، ففي عمود $س_٢$ سنجد أن ذلك المتغير له قيمة صفرية في صف صافى التغير عند الاولوية الاولى ، وهذا يعنى أن اختيار $س_٢$ كمتغير داخل لن يؤثر على هدف الاولوية الاولى . اذن ليس هناك مايمنع (من وجهة نظر الاولوية الأولى) فى اختياره كمتغير داخل ، كذلك سنجد قيمة صافى التغير لذلك المتغير عند الاولوية الثانية صفر أيضا ، وهذا يعنى كما سبق قوله ان اختيار $س_٢$ كمتغير داخل لن يؤثر على هدف الاولوية الثانية .

٧- خلاصة القول ان اختيار المتغير $س_٢$ كمتغير داخل في جولة تالية للحل لن يؤثر على هدف الاولوية

الاولى (والتى تحرص على عدم المساس بها لأنه تم تحقيقها فعلا) ، ولن يؤثر ايضا على هدف الاولوية الثانية (التى نحرص ايضا على عدم المساس بها لانه تم تحقيقها بالكامل) ، وانما سيكون تأثيره فقط على هدف الاولوية الثالثة ، وهذا التأثير سيكون في صورة تخفيض فى الانحراف غير المرغوب فيه لذلك الهدف ، فكل وحده تضاف من س٢ ستؤدى الى تخفيض دالة هدف مستوى الاولوية الثالثة بمقدار وحدة ، وهذا بطبيعة الحال أمر نسعى اليه كما سبق قوله ، وعلى ذلك سيحل هذا المتغير محل متغير الانحراف (ف $\pm$) كما يتضح من العمليات الحسابية والمدونة بأقصى يسار الجدول السابق ٠

سابعا : الجدول الرابع للحل :

بعد القيام بالعمليات الحسابية المطلوبة لتحسين الحل الوارد بالجدول الثالث ، سيظهر الجدول الرابع للحل على الصورة التالية :

الجدول الرابع

المتغير الخارج: ف٣⁻ ← المتغير الداخل: ف١⁺

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية ل١	ل٢	ل٣	ل٤	المتغيرات الاساسية	القيم		س١	س٢	ف١⁻	ف١⁺	ف٢⁻	ف٢⁺	ف٣⁻	ف٣⁺	ف٤⁻	ف٤⁺
صفر	صفر	صفر	صفر	س٢	١٢٥		صفر	١	$\frac{١}{٨٠}$	$-\frac{١}{٨٠}$	$-\frac{١٠}{٨}$	$\frac{١٠}{٨}$	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	صفر	صفر	صفر	س١	١٠٠		١	صفر	صفر	صفر	١	١-	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	صفر	١	صفر	ف٣⁻	٧٥		صفر	صفر	$-\frac{١}{٨٠}$	$\frac{١}{٨٠}$	$\frac{١٠}{٨}$	$-\frac{١٠}{٨}$	١	١-	صفر	صفر
صفر	صفر	صفر	صفر	ف٤⁻	٥٠		صفر	صفر	$-\frac{٢}{٨٠}$	$\frac{٢}{٨٠}$	$-\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	صفر	صفر	١	١-
دالة الهدف: صفر				ل٤	الارباح الداخلة		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
					التكاليف الداخلة		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					صافي التغير		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
دالة الهدف: ٧٥				ل٣	الارباح الداخلة		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر
					التكاليف الداخلة		صفر	صفر	$-\frac{١}{٨٠}$	$\frac{١}{٨٠}$	$\frac{١٠}{٨}$	$-\frac{١٠}{٨}$	١	١-	صفر	صفر
					صافي التغير		صفر	صفر	$\frac{١}{٨٠}$	$-\frac{١}{٨٠}$	$-\frac{١٠}{٨}$	$\frac{١٠}{٨}$	صفر	١	صفر	صفر
دالة الهدف: صفر				ل٢	الارباح الداخلة		صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					التكاليف الداخلة		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					صافي التغير		صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
دالة الهدف: صفر				ل١	الارباح الداخلة		صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					التكاليف الداخلة		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
					صافي التغير		صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر

ويمكن ان نستخلص من الجدول الرابع الملاحظات التالية :

١- أمكن بالاضافة الى تحقيق هدف الاولوية الأولى ، والاولوية الثانية ، تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه للأولوية الثالثة من ٢٠٠ كما ظهر بالجدول الثالث لتصبح ٧٥ فقط كما هو موضح بالجدول الرابع .

٢- ان قيم المتغيرات القرارية بالجدول الرابع هي :

$س_٢$ = ١٢٥ وحدة

$س_١$ = ١٠٠ وحدة

وهذا الحجم من الانتاج يعطى أرباحا مقدارها = ١٠٠ x ١٠٠ + ٨٠ x ١٢٥ = ٢٠٠٠٠ جنيه ،وبذلك فانه يكون هدف الربح (هدف الاولية الأولى) قد تم تحقيقه تماما ودون انحراف غير مرغوب فيه ($ف^-_١$) ، ولذلك تظهر قيمة ($ف^-_١$) بالجدول الرابع مساوية للصفر .

كما ان هذا الحجم من الانتاج بالنسبة للمتغير القراراى $س_١$ يفى تماما بالأولوية الثانية وهي انتاج ١٠٠ وحدة من اجهزة الفيديو كبيرة الحجم ، أي ان الانحراف غير المرغوب فيه بالنسبة للأولوية الثانية = صفر ، وأيضا الانحراف المرغوب فيه ($ف^+_٢$) يساوى صفر ، وكل ذلك مستخلص من المعلومات الواردة بالحل الذى يتضمنه الجدول الرابع .

أما بالنسبة لهدف الاولوية الثالثة والتي تقضي بانتاج ٢٠٠ جهاز فيديو حجم صغير على الأقل فاننا سنجد أن قيمة المتغير القرارى $س_٢$ بالجدول الرابع = ١٢٥ وحدة ، أي ان هناك انحراف غير مرغوب فيه بالنسبة لهدف الاولوية الثالثة ($ف^-_٣$) مقداره = ٢٠٠ - ١٢٥ = ٧٥ وحدة ، ولذلك سنجد أن قيمة ($ف^-_٣$) بالجدول الرابع ٧٥ وحدة وظهرت ضمن مجموعة المتغيرات الاساسية .

٣- بالنظر الى صف صافى التغير عند كل من الاولوية الاولى والثانية ، نجد أن كافة قيم المتغيرات اما موجبة أو صفرية ، وعليه فليس هناك اي تحسين يمكن ادخاله على دالة هدف كل من هاتين الاولويتين .

٤- وبالانتقال الى صف صافي التغير عند مستوى الاولوية الثالثة ($ل_٣$) نجد أن هناك متغيرين لهما قيما سالبة ، وحيث انه وفقا لمنهج السمبلكس يجب اختيار المتغير ذات اكبر قيمة باشارة سالبة (مشاكل التخفيض) كمتغير داخل ، اذن يعنى ذلك انه وفقا لهذه القاعدة سيرشح المتغير ($ف^-_٢$) لأن قيمته في صف صافى التغير عند مستوى تلك الاولوية ($-\frac{١٠}{٨}$) ، الا ان هناك وضعا يمنعنا من ترشيح ($ف^-_٢$) ليدخل كمتغير داخل فى جولة تالية للحل رغم انطباق القاعدة عليه ، وهذا الوضع يتمثل فى اننا لو نظرنا الى قيمة صافي التغير لهذا المتغير ذاته ($ف^-_٢$) عند مستوى الاولوية ($ل_٢$) سنجد انها (+١) وهذا يعني اجمالا ان زيادة وحدة واحدة من المتغير ($ف^-_٢$) سيؤدى الى تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الثالثة بما مقداره ($\frac{١٠}{٨}$) وحدة ، الا انه فى ذات الوقت سيؤدى الى زيادة الانحراف غير المرغوب فيه بدالة هدف الاولوية الثانية مقداره (١) وحدة . وحيث انه لاينبغى ان نحقق هدف الاولوية الادنى على حساب هدف الاولوية الاعلى لذلك سنرفض ترشيح المتغير ($ف^-_٢$) كمتغير داخل ونختار بدلا منه المتغير ذات القيمة الاقل باشارة سالبة فى صف صافى التغير عند الاولوية الثالثة ، وهو المتغير ($ف^+_١$)لأن اختيار ذلك المتغير الداخل فى جولة تالية للحل سيعمل على

تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الثالثة ، دون ان يؤدى ذلك الى ظهور انحراف غير مرغوب فيه فى اهداف الاولويات الاعلى كما هو الحال للمتغير ($ف_{٢}^{-}$) ٠

٥- وفقا للمناقشة السابقة اذن سيتم اختيار المتغير ($ف_{١}^{+}$) كمتغير داخل فى جولة تالية للحل ، وسيكون المتغير الخارج هو المتغير ($ف_{٤}^{-}$) وفقا للعمليات الحسابية التى أوردناها بأقصى يسار الجدول الرابع ، وعلى ذلك سيكون العنصر المحورى (المفتاح) هى القيمة ($\frac{٢}{٨٠}$) وهى القيمة الواقعة عند تقاطع صف المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل ٠

٦- بعد بناء هيكل الجدول الخامس وتدوين كافة بياناته وتسجيل العمليات الحسابية المختلفة الضرورية لايجاد تحسين للحل ، سيظهر الجدول الخامس للحل على الشكل التالي :

الجدول الخامس

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية (ل١ ل٢ ل٣ ل٤)	المتغيرات الاساسية	القيم	س١	س٢	ف١-	ف١+	ف٢-	ف٢+	ف٣-	ف٣+	ف٤-	ف٤+
صفر صفر صفر صفر	س٢	١٥٠	صفر	١	صفر	صفر	١٢/٨ -	١٢/٨	صفر	صفر	١/٢	١/٢ -
صفر صفر صفر صفر	س١	١٠٠	١	صفر	صفر	صفر	١	١-	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر صفر ١ صفر	ف٣-	٥٠	صفر	صفر	صفر	صفر	١٢/٨	١٢/٨ -	١	١-	١/٢ -	١/٢
صفر صفر صفر صفر	ف١+	٣٠٠٠	صفر	صفر	١-	١	٢٠-	٢٠	صفر	صفر	٤٠	٤٠-
دالة الهدف: صفر	ل٤	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
		التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
		صافي التغيير	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
دالة الهدف: ٥٠	ل٣	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر
		التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	١٢/٨	١٢/٨ -	١	١-	١/٢ -	١/٢
		صافي التغيير	صفر	صفر	صفر	صفر	— —	—	صفر	١	١/٢	١/٢ -
دالة الهدف: صفر	ل٢	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
		التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
		صافي التغيير	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
دالة الهدف: صفر	ل١	الارباح الداخلة	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
		التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
		صافي التغيير	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر

المتغير الخارج

١٠٠

ويتضح من الجدول الخامس للحل مايلي :

١- انه قد تم تحقيق هدف الاولوية الاولى وهدف الاولوية الثانية بالكامل وبدون ظهور انحرافات غير مرغوب فيها ، الا انه بنظرة فاحصة سيتضح أن هدف الاولوية الاولى (الربح) قد بدأ في هذا الجدول (الخامس) ينحرف عن المستوى الموضوع (٢٠٠٠٠ جنيه ارباح) ، وان هذا الانحراف في الاتجاه المرغوب فيه أي بزيادة الربح المحقق عن المستوى الموضوع . ويمكن توضيح ذلك من خلال قيم المتغيرات القرارية بالجدول السادس اذ ظهر كل من المتغير القراري $س_١$ كمتغير اساسي وبقيمة مقدارها ١٠٠ وحدة ، كذلك ظهر المتغير القراري $س_٢$ كمتغير اساسي وبقيمة مدارها ١٥٠ وحدة . وهذا الحجم من الانتاج سيحقق أرباحا مقدارها :

١٠٠ × ١٠٠ + ٨٠ × ١٥٠ = ٢٢٠٠٠ جنيه ،

وهذا القدر من الارباح يزيد عن مستوى هدف الربح الموضوع بمقدار ٢٠٠٠ جنيه (٢٢٠٠٠-٢٠٠٠٠) ،ولذلك نجد أن متغير انحراف التجاوز للاولوية الاولى ($ف^-_١$) ظهر كمتغير اساسي وكانت قيمته ٢٠٠٠جنيه .

٢- ان الانحراف غير المرغوب فيه بهدف الاولوية الثالث قد انخفضت بمقدار ٢٥ وحدة عما كانت عليه بالجدول الرابع .

٣- بالنظر الى صف صافي التغير عند كل من الاولوية الاولى ،والأولوية الثانية ، نجد انه لاتوجد بينهما أي قيمة سالبة ، مما يشير الى الاستيفاء والتحقق الكامل لكليهما ، ومن ثم فليس هناك حاجة الى اجراء أي تحسين عليهما .

٤- يتضح من خلال فحص قيم صف صافي التغير عند مستوى الاولوية الثالث ($ل_٣$) وجود قيمتين سالبتين

احدهما تخص المتغير ($ف^{-}_{٢}$) مقدارها ($-\frac{١٢}{٨}$) ، والقيمة الاخرى للمتغير ($ف^{+}_{٤}$) مقدارها ($-\frac{١}{٢}$) ، ورغم ان قاعدة السمبلكس تنص على ان يكون المتغير صاحب اكبر قيمة باشارة سالبة هو المتغير الداخل ، الا اننا لن نطبق هذه القاعدة بصورة مطلقة (لأن هناك تعدد فى الاهداف) ، اذ ينبغي قبل تطبيقها ان نبحث عن الاثر المحتمل لاختيار هذا المتغير على دالة هدف الاولويات الاعلى ، فاختيار المتغير ($ف^{-}_{٢}$) كمتغير داخل باعتباره ذات اكبر قيمة باشارة سالبة في صف صافي التغير عند الاولوية الثالثة سيؤدى الى اثرين وانعكاسين فى آن واحد احدهما يعمل على تحسين دالة هدف الاولوية الثالثة ، والاثر الثاني وهو اثر سلبى على دالة هدف الاولوية الثانية ، لأن هذا المتغير له معامل موجب في صف صافى التغير للاولوية الثانية ،لذلك سيتم اختيار المتغير ($ف^{+}_{٤}$) كمتغير داخل رغم انه لايعتبر ذات اكبر قيمة باشارة سالبة فى صف صافى التغير عند الاولوية الثالثة ، لأننا نؤكد مرة اخرى على تطبيق القاعدة التى تنص على الا يكون استيفاء هدف الاولوية الاقل على حساب الاولوية الاعلى .

٥- يلاحظ القارىء من التعليقات التى نوردها بعد كل جدول اننا لم نلتفت اطلاقا بفحص أو التعليق على هدف الاولوية الرابعة ، ولم نتعرض له حتى الآن من قريب أو بعيد ، فما هو السبب فى ذلك التناسى ؟ ان الاجابة على ذلك التساؤل سهلة وبسيطة . اذ اننا حتى اعداد الجدول الخامس مشغولين بالاولويات الاعلى من الاولوية الرابعة فما زلنا حتى الجدول الخامس نخفض من الانحراف

غير المرغوب للاولوية الثالثة وبعد ان ننتهي من ذلك نبدأ فى الاتجاه الى الاولوية الرابعة ، وهذا هو السبب وراء عدم التعامل حتى الآن مع هذه الاولوية الرابعة .

٦- وباختيار المتغير ($ف_{٤}^{+}$) كمتغير داخل ، سيكون المتغير الخارج هو ($ف_{٢}^{-}$) ويكون العنصر المحورى (المفتاح) هو القيمة ($\frac{١}{٢}$) .ومن ثم نقوم باعداد الجدول السادس . ويظهر على الصورة التالية بعد تمام كافة العمليات الحسابية المطولة له .

الجدول السادس

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية ل١ ل٢ ل٣ ل٤	المتغيرات الاساسية		القيم	$س_1$	$س_2$	$ف_1^-$	$ف_1^+$	$ف_2^-$	$ف_2^+$	$ف_3^-$	$ف_3^+$	$ف_4^-$	$ف_4^+$
صفر صفر صفر صفر	$س_2$		٢٠٠	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	١	١-	صفر	صفر
صفر صفر صفر صفر	$س_1$		١٠٠	١	صفر	صفر	صفر	١	١-	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر صفر صفر ١	$ف_4^+$		١٠٠	صفر	صفر	صفر	صفر	٣	٣-	٢	٢-	١-	١
صفر صفر صفر صفر	$ف_1^+$		٦٠٠٠	صفر	صفر	١-	١	١٠٠	١٠٠-	٨٠	٨٠-	صفر	صفر
دالة الهدف	$ل_4$		الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
١٠٠			التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	٣	٣-	٢	٢-	١-	١
			صافي التغير	صفر	صفر	صفر	صفر	٣-	٣	٢-	٢	١	صفر
دالة الهدف	$ل_3$		الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر
صفر			التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
			صافي التغير	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر
دالة الهدف	$ل_2$		الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر			التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
			صافي التغير	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
دالة الهدف	$ل_1$		الارباح الداخلة	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر			التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
			صافي التغير	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر

ويمكن ان نقف على مجموعة الحقائق التالية من تحليل بيانات الجدول السادس :

١- انه تم تحقيق واستيفاء كافة اهداف الاولويات الثلاثة الاولى بدون اى انحرافات غير مرغوب فيها .

٢- ان قيم صف صافى التغير عند مستوى الاولويات الثلاثة الاولى (ل ١ ،ل ٢ ،ل ٣) جميعها قيم صفرية أو موجبة ، مما يعنى عدم امكانية اجراء أى تحسين على اهداف تلك الاولويات ،وبطبيعة الحال هذا شىء منطقى لانه تم استيفاؤها جميعا .

٣- بالنظر الى قيم صف صافى التغير عند الاولوية الرابعة سنلاحظ وجود قيمتين سالبتين ، احداهما لمتغير الانحراف (ف-٣) ، والاخرى لمتغير الانحراف (ف-٢) ، وهذا يعنى ان هناك امكانية لتخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الرابعة . ولكننا سبق ان ذكرنا انه لاينبغى ان يكون تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الدنيا على حساب هدف الاولوية العليا . عندئذ سنجد أنه لايمكن اجراء تحسين على هدف الاولوية الرابعة ، لأن اختيار المتغير (ف-٢) ، وهو اكبر قيمة باشارة سالبة فى صف صافى التغير عند الاولوية الرابعة ، لانه وان كان سيعمل على تحسين هدف الاولوية الرابعة ، الا انه فى ذات الوقت سيضر بهدف الاولوية الثانية ،لأن قيمة هذا المتغير في صف صافى التغير عند الاولوية الثانية (+١) ،كذلك الحال اذا تم اختيار المتغير (ف-٣) كمتغير داخل فانه وان كان سيؤدى فعلا الى تحسين هدف الاولوية الرابعة ، الا انه سيضر فى ذات الوقت بهدف الاولوية الثالثة لنفس السبب المشار اليه .

وبناء على التحليل السابق نقرر ان الجدول السادس هو جدول الحل الامثل وملخص نتائجه كالآتي :

بالنسبة لهدف الاولوية الأولى :

تم استيفاء وتحقيق هدف الاولوية الاولى وبأكثر من المستوى الموضوع للهدف ، اذ تبلغ الأرباح المحققة وفق الحل الوارد بالجدول السادس :

١٠٠ x ١٠٠ + ٢٠٠ x ٨٠ = ١٠٠٠٠+١٦٠٠٠=٢٦٠٠٠ جنيه

أي ان تجاوز فى الارباح بالزيادة مقدارها ٦٠٠٠ جنيه ، ولهذا السبب فقد ظهر متغير انحراف التجاوز ($ف_{1}^{+}$) كمتغير اساسي فى الحل الامثل وبقيمة مقدارها ٦٠٠٠ .

بالنسبة لهدف الاولوية الثانية :

تم استيفاء وتحقيق هدف الاولوية الثانية بالكامل اذ يتبين من الجدول السادس ان عدد الوحدات المنتجة من اجهزة الفيديو كبيرة الحجم عدد ١٠٠ جهاز ($س_{1}$) ، وعلى ذلك فان انحراف التجاوز لهذا الهدف ($ف_{2}^{+}$) ظهر كمتغير غير اساسي قيمته صفر .

وبالنسبة لهدف الاولوية الثالثة :

فقد تم ايضا استيفاء وتحقيق هدف الاولويةالثالثة بالكامل ، اذ يتضح من المتغيرات الاساسية الواردة بالجدول السادس ان عدد الوحدات المنتجة من اجهزة الفيديو صغير الحجم ($س_{2}$) عدد ٢٠٠ جهاز ، ولهذا فان انحراف التجاوز لهذا الهدف ($ف_{3}^{+}$) ظهر كمتغير غير اساسي قيمته صفر .

أما بالنسبة لهدف الاولوية الرابعة :

فلم يتم استيفاؤه بالكامل ، اذ ان هناك انحراف غير مرغوب فيه لابد ان يصاحب الحل ومقداره ١٠٠ ساعة عمل ، بمعنى انه لابد من التشغيل الاضافى لمدة ١٠٠ ساعة حتى يمكن تحقيق الاهداف الثلاثة ذات الاولوية العليا ، لذلك ظهر متغير الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية

الرابعة ($ف_{٤}^{+}$) كمتغير اساسي وقيمته ١٠٠ .

ولتأكيد ذلك نقول ان انتاج ١٠٠ جهاز فيديو كبير ، و ١٠٠ جهاز فيديو صغير تحتاج الى وقت تجميع كالآتي : ٣×(١٠٠) + ٢×(٢٠٠) = ٣٠٠+٤٠٠=٧٠٠ ساعة عمل علما بأن ماهو متاح من ساعات العمل ٦٠٠ ساعة فقط . اذن لابد من العمل ١٠٠ ساعة اضافية اذا كنا جادين في تحقيق أهداف الاولويات العليا تماما دون تجاوز غير مرغوب فيه .

تحليل حساسية نتائج حل نموذج برمجة الاهداف :

من المنطقي ان يكون تحليل حساسية نتائج حل نموذج برمجة الاهداف اكثر صعوبة بالمقارنة بتحليل حساسية مشاكل البرمجة الخطية وحيدة الهدف ، وهذه الصعوبة ناشئة بطبيعة الحال من تعدد اهداف مشكلة برمجة الاهداف واختلاف اولويات تلك الاهداف . وبرغم تلك الصعوبة النسبية الا ان متابعة نتائج حل نموذج برمجة الاهداف بتحليل حساسيتها على درجة عالية من الأهمية ، وتعطى تفسيرات غاية في الاهمية ، وفهم عميق لما ستكون عليه النتائج في حالة تغير بعض عناصر المشكلة . وسوف نتناول باختصار تحليل حساسية التغيرات التالية :

اولا : تأثير المتغيرات في المستويات الاصلية الموضوعة للاهداف .

ثانيا : تأثير التبادل النسبى الضمنى بين الاهداف .

ثالثا : تأثير التغيرات في تسلسل اولوية الاهداف .

وفيما يلى نستعرض بالتفصيل كل عنصر من هذه العناصر .

أولا : تأثير التغير في المستوى الموضوع للهدف :

لقد سبق القول في موضع متقدم من هذا الفصل ، ان

نموذج برمجة الاهداف يعتبر بمثابة مدخل استيفـــاء أو تحقيق Satisficing Approach ، بمعنى انه نموذج يسعى الى استيفاء وتحقيق مستويات موضوعة ومحددة لكل هدف ، ووفقا لهذا الفهم فان هذا النموذج لايمكـــن اعتباره مدخل لتعظيم أو تخفيض الاهداف Maximize or minimize كما هو الحال فى نموذج البرمجـة الخطية وحيدة الهدف ، ولذلك فان السؤال الاول الذى نواجهه عند تحليل الحساسية لنموذج برمجة الاهداف هو : ماهو اثر التغيرات التى يمكن ان تحدث فى المستويات الموضوعة لكل هدف ؟ وللاجابة على هذا التساؤل ،فانه يتعين ان يتم ذلك بشكل عملى حتى يتم توضيح الكيفيـة التى يتم بها معالجة هذا العنصر ،لذلك سنستعـــرض فيما يلى جدول الحل الامثل للمشكلة التي سبق ان قمنـا بحلها فى مقدمة هذا الفصل ، وهى المشكلة التى تمثـل حالة احدى الشركات تنتج نموذجين من السلع هما $س_1$ ، $س_2$ هامش ربح الوحدة من النوعية الاولى كانت ١٥جنيها ومن النوعية الثانية ١٠ جنيهات ، وان الشركة المذكورة وضعت اهدافها كالآتي :

الهدف الاول : تحقيق ٧٠٠٠٠ جنيه ربح على الاقل(اولويـة اولى).

الهدف الثاني: تحقيق مستوى مخزون لايزيد عن ٥٠٠٠ وحدة (اولوية ثانية) .

ويذكر القارئ اننا وضعنا تلك الاهداف فى صورة قيود تشابه القيود فى البرمجة الخطية مع اختلافيـــن:

١- الاختلاف الاول يتمثل انه يتم فى نموذج برمجـة الاهداف اضافة متغير انحراف عدم التحقق ($ف^-$) الى قيد الهدف ، وهو يماثل المتغير الراكد بالبرمجة الخطية .

٢- الاختلاف الثاني هو انه يتم ايضا اضافة متغيـــر

انحراف التجاوز (ف$^+$) الى قيد الهدف ، وهو يماثل المتغير المضاف بالبرمجة الخطية .

ومن ناحية اخرى فان المستويات الموضوعةلتلك الاهداف تشابه تماما قيم الجانب الايسر من القيود المعتادة بالبرامج الخطية .

ويذكر القارئ ايضا اننا قد ناقشنا في الفصل الثالث (تحليل الحساسية) كيفية استخدام وضع المتغيرات (الاساسية وغير الاساسية) وكذلك قيم الحل لكل من المتغيرات الراكدة والمضافة لتحديد اقصى زيادة واقصى انخفاض يمكن اجراؤه على معاملات الجانب الايسر من القيد الاصلى (أو ماكنا نطلق عليه طاقة القيد او المورد)والتي لاتؤدى الى تغيير الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية بجدول الحل الاخير .

ويمكن القول بصفة عامة انه يمكن تطبيق نفس المراحل على متغيرات الانحراف فى نموذج برمجة الاهداف وذلك لتحديد الحد الاقصى للزيادة ،وكذلك الحد الادنى للانخفاض فى المستويات الاصلية الموضوعة للاهداف دون أن يغير ذلك من وضع التغيرات الاساسية المثلى بجدول الحل الاخير.

خلاصة ماتقدم انه يلزم لدراسة أثر التغيرات التي يمكن ان تحدث فى المستويات الموضوعة لكل هدف، ان نقوم بتحليل متغيرات الانحراف (التحقق والتجاوز) وفقا لصفتهما فى جدول الحل الأخير اى المتغيرات الانحرافية الاساسية وغير الاساسية . وقبل ان نقوم بهذا التحليل سنورد فيما يلى جدول الحل الاخير للمشكلة التي نعالجها الآن على سبيل المثال .

جدول الحل الأمثل (الجدول الرابع)

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية $ل_1$	$ل_2$	المتغيرات الاساسية	القيم	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$ف_1^-$	$ف_1^+$	$ف_2^-$	$ف_2^+$
صفر	صفر	$س_3$	٤٠٠	١	صفر	٢	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	صفر	صفر
صفر	١	$ف_2^+$	١٨٠٠	صفر	صفر	-١	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-١	١
صفر	صفر	$س_2$	٦٤٠٠	صفر	١	-٣	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	صفر	صفر
دالة الهدف		$ل_2$	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
١٨٠٠			التكاليف الداخلة	صفر	صفر	-١	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-١	١
			صافي التغير	صفر	صفر	١	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-١	١
دالة الهدف		$ل_2$	الارباح الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر			التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر
			صافي التغير	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر

(١) **متغيرات الانحراف غير الاساسية :**

Nonbasic Devistional Variables

أ - وبالنظر الى متغيرات انحراف هدف الربح (الاولوية الاولى) وهى ($ف^{-}_{١}$) ،($ف^{+}_{١}$) نجدها قد ظهرتا في جدول الحل الاخير (الحل الأمثل) كمتغيرات غير اساسية ، حيث انها لم تظهرا بعمود المتغيرات الاساسية ، ولقد سبق ان توصلنا فى الفصل السابق الى الصيغة التى يمكن عن طريقها تحديد أقصى تغير مسموح به فى طاقات القيود بالنسبة لكل من المتغيرات الراكدة غير الاساسية ، والمتغيرات المضافة غير الاساسية ، وهاتان الصيغتان بعد تعديلهما لتتوافقا مع برمجة الاهداف سيكونا على الشكل التالي :

[الحد الاقصى للتغير المسموح به فى مستوى الهدف لمتغير انحراف عدم التحقق غير الاساسي $ف^{-}_{ع}$ والمقابل للمتغير الاساسي ق] = [قيمة المتغير الاساسي ق فى الحل النهائي / معامل القيد ق للمتغير $ف^{-}$ ع]

والمعادلة الثانية هي :

[الحد الاقصى للتغير المسموح به فى مستوى الهدف لمتغير التجاوز غير الاساسي $ف^{+}$ع والمقابل للمتغير الاساسي ق] = [قيمة المتغير الاساسي ق فى الحل النهائي / معامل القيد ق للمتغير $ف^{+}$ع]

وحيث ان لكل هدف فى نموذج برمجة الاهداف متغير عدم تحقق ($ف^{-}_{ع}$) ، ومتغير تجاوز ($ف^{+}_{ع}$) . لذلك فان الحد الاقصى للتغيرات فى مستوى الهدف المعين ، لابد وان يتم حسابه لكل من نوعي الانحراف (عدم التحقق ،والتجاوز) .ولكن هنا يتبادر سؤال منطقى وهو ،أي الحدود المستخرجة

سيتم استخدامها ؟ هل سيتم استخدام حدود عـــدم التحقق ، او حدود التجاوز ؟ الحقيقة وكمـــا سنرى انه لايوجد اختلاف بينهما . اذ سنجد ان كلا المتغيرين سيعطى نفس الحدود .

فبالنسبة لمتغير عدم تحقق هدف الربـــح ($ف_1^-$) فانه سيتم حساب ثلاثة حدود له وذلـــك وفقا لعدد المتغيرات الاساسية الواردة بالجدول الأخير ، وباستخدام المعادلة الاولى سيتم حساب تلك الحدود كالآتي :

المتغيرات الاساسية	القيم	$ف_1^-$	
$س_1$	٤٠٠	$-\frac{١}{٥}$	$-(٤٠٠) \div (-\frac{١}{٥}) = ٢٠٠٠$
$ف_2^+$	١٨٠٠	$\frac{١}{٥}$	$-(١٨٠٠) \div (\frac{١}{٥}) = -٩٠٠٠$
$س_2$	٦٤٠٠	$\frac{٢}{٥}$	$-(٦٤٠٠) \div (\frac{٢}{٥}) = -١٦٠٠٠$

ومن هذه النتائج يتبين ان حدود التغير فيالمستوى الموضوع لهدف الربح هي زيادة مقدارها ٢٠٠٠ جنيه (الرقم الموجب الوحيد) فى المستوى الموضوع ،أو تخفيـــض مقداره ٩٠٠٠ جنيه (اقل رقم باشارة سالبة) ، أىانمستوى هدف الربح الاصلى يمكن ان ينخفض الى ٦١٠٠٠ جنيــــه (٧٠ر٠٠٠ - ٩٠٠٠) ، أو يرتفع الى ٧٢٠٠٠ جنيـــه (٧٠٠٠٠ + ٢٠٠٠) ،دون ان يؤثر ذلك على الوضع النهائي الامثل للمتغيرات الاساسية .

ويلاحظ ان تلك النتيجة التى توصلنا اليها يمكـن ان نحصل عليها أيضا ، اذا ما استخدمنا متغير التجاوز ($ف_1^+$) ،ولاثبات ذلك سنستخدمفيما يلى صيغة المعادلـــة الثانية لتحديد حدود التغيرات كما يلى :

المتغيرات الاساسية	القيم	$ف_1^+$	
$س_1$	٤٠٠	$\frac{1}{5}$	$(٤٠٠) - (\frac{1}{5}) = ٢٠٠٠$
$ف_2^+$	١٨٠٠	$-\frac{1}{5}$	$(١٨٠٠) - (\frac{1}{5}) = -٩٠٠٠$
$س_2$	٦٤٠٠	$-\frac{2}{5}$	$(٦٤٠٠) - (-\frac{2}{5}) = -١٦٠٠٠$

وهى نفس النتائج التى توصلنا اليها من تطبيق المعادلة الاولى على متغير انحراف عدم التحقق ($ف_1^-$) ٠

ب - اما بالنسبة لهدف مستوى الحد الاقصى للمخزون والذى تم صياغته فى صورة انه لايجب ان يزيد مستوى المخزون من انتاج الشركة عن ٥٠٠٠ وحدة ٠ومن الجدول الاخير سنجد أن متغير انحراف عدم التحقق لهذا الهدف ($ف_2^-$) قد ظهر كمتغير غير اساسي فى الحل الامثل ٠ فى حين ان متغير انحراف التجاوز ($ف_2^+$) ظهر كمتغير اساسي ٠

ولقد رأينا فى الجزء السابق كيف يستخدم متغير الانحراف غير الاساسي فى استنتاج حدود التغيرات في مستوى الهدف الاصلي ٠ ولذلك سنقوم بتطبيق المعادلة الاولى بالنسبة لمتغير الانحراف غير الاساسي ($ف_2^-$) :

المتغيرات الاساسية	القيم	$ف_2^-$	
$س_1$	٤٠٠	صفر	غير محدد
$ف_2^+$	١٨٠٠	-١	$-(١٨٠٠) - (-١) = ١٨٠٠$
$س_2$	٦٤٠٠	صفر	غير محدد

وهذه النتائج تشير الى ان المستوى الموضوع لهدف الحد الاقصى للمخزون (٥٠٠٠ وحدة) يمكن ان يزيد بمقدار ١٨٠٠ وحدة ، او ينخفض بأي مقدار (الانخفاض غير محدد) دون ان يؤثر ذلك على الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية بجدول الحل الاخير، وعلى ذلك فان المستوى الموضوع لذلك الهدف يمكن ان ينخفض الى صفر أو يرتفع الى ٦٨٠٠ وحدة دون تغيير المزيج الامثل للمتغيرات الاساسية .

(٢) <u>متغيرات الانحراف الاساسية</u> :

Basic Deviational Variables

يتذكر القارئ انـنا ذكرنا قبل ذلك في الفصل الثالث ان القيود التي يظهر متغيرها الراكد كمتغير اساسي في جدول الحل الأخير، يمكن لثابت هذا القيد (الجانب الايسر للقيد) ان يزيد بأي مقدار دون ان يؤثر ذلك على الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية ، وهذه القاعدة نفسها صحيحة بالنسبة لتخفيض القيود بالمتغيرات المضافة الاساسية، والتغيرات في الاتجاه العكسي محددة بالقيمة الجارية للمتغير المضاف الاساسي، أو المتغير الراكد الأساسي في جدول الحل النهائي.
وعلى ذلك فانه بالنسبة للمتغير الراكد الاساسي فانه يمكن ان ينخفض الجانب الايسر الاعلى للقيد (ثابت القيد) بمقدار يعادل قيمته في جدول الحل الاخير ، وبالنسبة للمتغير المضاف الاساسي ، فان الجانب الايمن للقيد يمكن ان يزيد بأى مقدار يعادل قيمته في جدول الحل النهائي .

وحيث ان ($ف_٢^+$) قد ظهر في جدول الحل الأخير كمتغير انحراف اساسي (وهو متغير مضاف)، وقيمته في الحل الاخير هي ١٨٠٠ ، اذن يمكن القول أن

مستوى الحد الاقصى للمخزون يمكن ان يزيد بمقدار ١٨٠٠ وحدة او ان ينخفض بأي مقدار دون تغير الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية بجدول الحل الاخير.وعلى العموم سواء كنا نقوم بحساب حدود التغير باستخدام متغيرات عدم التحقق أو متغيرات التجاوز فان الحدود المحسوبة للمتغيرات فى المستوى الموضوع للهدف ستكون واحدة فى الحالتين .

ثانيا : التبادل النسبى بين الأهداف :

Relative Tradoffs among Goals

برغم ان برمجة الاهداف لاتحاول ان تجرى تبادلا بين الاهداف ، الا انه فى مقدورنا ان نحدد ضمنيا القيم النسبية لمختلف الاهداف عن طريق تحليل واختبار جدول الحل الاخير ، وذلك لانه سيعطى لمتخذ القرار قدرا كبيرا من المعلومات الهامة تعطيه مرونة فى اتخاذ القرار بناء على هذا الفهم .

ان التبادل النسبى بين الاهداف يعنى الوقوف على الاثر الذى سيتركه تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الدنيا على الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية العليا. لقد سبق ان ذكرنا انه يتعين الا يكون تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الدنيا على حساب ظهور انحراف غير مرغوب فيه لهدف الاولوية الاعلى. وهنا نريد ان نقف على حقيقة اثر تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الدنيا بمقدار وحدة واحدة على الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الاعلى .

بالنظر الى جدول الحل الاخير السابق ، سنرى ان الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولية الثانية

هو مامقداره ١٨٠٠ وحدة ، ويكون التساؤل هـو : الا يمكن تحسين هذا الوضع ؟ وبمعنى آخر الا يمكن تخفيض هذا الانحراف الى مقدار اقل ؟ الاجابة بأنه يمكن تخفيضه ، اذن كيف يتم ذلك ؟ ولماذا لم يتم ذلك ؟ اما كيف يتم ذلك فاننا لو نظرنا الى صف صافي التغير عند الاولوية الثانية سنجد انه فى الامكان تحسين دالة هدف الاولوية الثانية عن طريق اختيار المتغير ($ف^-_1$) كمتغير داخل في جولة تالية للحل حيث ان له قيمة صافي تغير سالبة مما يعنى ان اختياره كمتغير داخل سيؤدى الى تحسين دالة الهدف اى تخفيض الانحراف في هذا الهدف الى مقدار اقل ، اما لماذا لم يتم ذلك ؟ فلقد سبق ان ذكرنا اننا لانقوم باجراء هـذا التحسين لان قيمة صافى التغير لذلك التغير ($ف^-_1$) عند مستوى الاولوية هو (+١) ، بمعنى انه اذا أصبح المتغير ($ف^-_1$) متغير اساسي ،فان القيمة التي سيأخذها ستعادل قيمة عدم تحقيق هدف الربح ذات الاولوية الاعلى ، ومعنى ذلك انه مقابل كل جنيه يفقد في هدف الربح تحصل على تخفيض مقداره ($\frac{١}{٥}$) فى عدد الوحدات المنتجة زيادة عن مستوى الحد الاقصى للمخزون ، أو بمعنى آخر ،ان تخفيض عدد الوحدات المنتجة زيادة عن مستوى الحد الاقصى للمخزون بمقدار وحدة واحدة ، سيكون اثره بمثابة تخفيض في الارباح بمقدار ٥ جنيهات، لذلك يمكننا ان نقرر ان التبادل او التحويل الضمنى بين الهدفين (الربح – مستوى المخزون) هو ٥ جنيهات تخفيض في الارباح مقابل كل وحدة زيادة فى مستوى المخزون ، ولعل القارىء يمكن ان يستخلص مدى أهمية هذه المعلومات لمتخذ القرار فى امداده بحقائق تمكنه من ان يتخذ القرار السليم، فاذا كان مستعدا للتضحية بأرباح مقدارها ٩٠٠٠ جنيه

مقابل عدم زيادة حجم المخزون عن الهدف الموضوع فانه يمكن ذلك الا انه في هذه الحالة يكون قد اعطى لهدف المخزون اولوية اولى وهذا ماسنناقشه في الجزء التالي :

ثالثا : التغيرات في مراتب الاولويات :

Changes in Priority Rankings

قد تؤدي التغيرات في مراتب اولويات مختلف الاهداف الى احداث تأثيرات هامة على الحل الامثل الذى تم التوصل اليه قبل تلك التغيرات، ولذلك فان من مجالات تحليل واختبار الحساسية التي يتعين القيام بها في مشاكل برمجة الاهداف هي اعادة ترتيب اولويات الاهداف لتحديد تأثير التغيرات في مراتب الاولوية على الحل الأمثل .

فعلى سبيل المثال وجدنا في المشكلة الحالية ان هناك هدفين يمثل هذف الربح الاولوية الاولى، ويمثل الحد الاقصى للمخزون الاولوية الثانية ،وبفرض انه قد تم اعادة ترتيب تلك الاولويات ،بأن أخذ هدف الحد الاقصى للمخزون مستوى الاولوية الاولى ، عندئذ نتساءل هل اعادة ترتيب تلك الاولويات يحتاج الى اعادة حل المشكلة من مرة اخرى من بدايتها لاخذ هذه التغيرات في الحسبان ؟ للاجابة على ذلك نقول انه برغم ان اعادة الحل من بدايته امر ممكن ، الا انه ليس من الضروري اجراؤه ، وان اختبار الحساسية كاف للوصول الى المعلومات التي نريدها ، وسنرى كيف يتحقق ذلك .

لقد تبين بكل وضوح ان الجدول الاخير الذىتم التوصل اليه لحل المشكلة الحالية يمثل الحل الامثل ،وذلك لان اي محاولة لتحسين هدف المخزون سيكون حتى على حساب هدف الربح ، وعليه اذا تغيرت

اولويات هذه الاهداف ،فان هذا الجدول لن يكون هو جدول الحل الأمثل ، لأن هدف المخزون سيأخذ الآن اسبقية على هدف الربح ٠

وعلى ذلك اذا اعتبرنا ان هدف المخزون هو الذى يمثل هدف الاولوية الاولى ، وقمنا بتحسين الحل عن طريق ضم المتغير ($ف_{1}^{-}$) الى الحل باعتباره انه المتغير ذات القيمة السالبة الوحيدة بصف صافى التغير لهدف المخزون ، فسيكون المتغير الخارج في هذه الحالة هو المتغير($ف_{2}^{+}$)، وبعد اجراء التحسين سنصل الى جدول جديد يطابق تماما الجدول الثالث للحل لتلك المشكلة وفقا لمستوى الاولويات الاصلية ، ويلاحظ ان ذلك الجدول الجديد هو الجدول الامثل بالنسبة لتغير درجات الاولوية ٠ وسيكون صف صافي التغير لهدف الاولوية الاولى(وهو الآن $ل_{2}$) كله قيما صفرية او موجبة وهذا يشير الى عدم امكانية تحسينه عن طريق ضم المتغير ($ف_{2}^{+}$) الى مجموعة المتغيرات الاساسية ، الا أن اعادة ترتيب الاهداف يمنعنا من عمل ذلك ، لأن المتغير ($ف_{2}^{+}$) له قيمة صافى تغير مقدارها (+١) في هدف الاولوية العليا الجديد (المخزون) ٠

ان هذا المثال البسيط قد أوضح بجلاء انه يمكن اختبار تأثير اعادة ترتيب اولويات الاهداف بقليل من العمليات الحسابية المطلوبة والتي قد لاتخرج عن اتمامها بمجرد النظر ، هذا على الرغم من الاهمية القصوى لذلك التحليل لرجال الادارة ومتخذى القرارات ٠ اذ انه يتيح لهم حلولا بديلة اكثر للاختيار من بينها ٠ وبالنسبة لمثالنا الحالى سيكون امام الادارة بديلين يمكن الاختيار من بينهما وهما :

ترتيب الاولويات		قيم المتغيرات القرارية		مستوى تحقق الهدف	
اولى	ثانية	$س_١$	$س_٢$	الربح	المخزون
الربح	المخزون	٤٠٠	٦٤٠٠	٧٠٠٠٠	٦٨٠٠
المخزون	الربح	٢٢٠٠	٢٨٠٠	٦١٠٠٠	٥٠٠٠

حالة وجود اكثر من هدف له نفس الاولوية :

في بعض الاحيان نجد ان هناك اكثر من هدف من أهداف المشكلة يأخذ نفس مستوى الاولوية ، فمثلا بفرض انه في مشكلة شركة انتاج اجهزة الفيديو ،كان هدف الحد الادني لانتاج اجهزة الفيديو كبيرة الحجم ،وهدف انتاج اجهزة الفيديو صغيرة الحجم ، يأخذان كليهما مستوى الاولوية الثانية ،أي ان ترتيب اولويات حالة تلك الشركة اصبحت كالآتي :

هدف الاولوية الاولى : تحقيق ارباح لاتقل عن ٢٠٠٠٠ جنيه

هدف الاولوية الثانية : انتاج ١٠٠ جهاز فيديو كبير الحجم على الاقل ،وانتاج ٢٠٠جهاز فيديو صغير الحجم على الاقل .

هدف الاولوية الثالثة : تجنب التشغيل لوقت اضافي .

ويمكننا ان نعالج مثل هذه الحالة بأسلوب برمجة الاهداف عن طريق تعيين متغيرى الانحراف المقابلين لنفس مستوى الاولوية ، ومن ثم اضافة قيمة كل منهما الى دالة الهدف لذلك تكون دالة الهدف على الصورة التالية :

$$\text{نهاية صغرى } ف_١^- \;\Big|\; \text{نهاية صغرى } (ف_٢^- + ف_٣^-) \;\Big|\; \text{تخفيض } ف_٤^+$$

ومن هذه الدالة نلاحظ اننا قد اعطينا وزنا متساويا مقداره (١) لكل متغير انحراف عند مستوى

الاولوية الثانية . الا انه ليس من الضروري ان نعطي وزنا متعادلا بل يمكن لمزيد من الدقة ان نعطى اوزانا ترجيحية مختلفة لمتغيرات الانحراف تعكس الاهمية النسبية داخل الاولوية المعينة ، ان ذلك يعتبر ضروري خاصة اذا كانت المتغيرات مقاسة بوحدات غير متماثلة (جنيهات ، وحدات انتاج ، ساعات عمل) ، وذلك كله بغرض تحقيق التكافؤ .

من ناحية اخرى قد يكون من المفضل استعمال اوزان للانحراف لتشير الى تلك المتغيرات التى ليس لها نفس التأثير . فمثلا اذا كانت الشركة قد رأت أن التقصير فى تسليم اجهزة الفيديو كبيرة الحجم أكثر تأثيرا بمقدار ثلاث مرات عن التقصير فى تسليم اجهزة الفيديو صغيرة الحجم ، فانه يمكن تضمين تلك النواحي فى دالة الهدف كالآتي :

تخفيض $ف^{+}_{٤}$ | نهاية صغرى ($٣ف^{-}_{٢} + ف^{-}_{٣}$) | نهاية صغرى $ف^{-}_{١}$

* *

اسئلة وتطبيقات على الفصل الرابع :

١- ماهي الحاجة الملحة التى أوجبت ظهور نموذج برمجة الاهداف ؟ وهل نموذج البرمجة الخطية وحيدة الهدف لم يعد صالحا للتطبيق فى معالجة المشاكل التى تواجه المشروعات ؟ .

٢- بماذا تفسر عدم التمكن من وجود حل ممكن لمشكلة ما من مشاكل البرمجة الخطية ؟ وماهو الاسلوب الذى يمكن الالتجاء اليه لعلاج هذه الحالة ؟

٣- قارن بين خطوات الحل بطريقة السمبلكس فى حالة مشكلة وحيدة الهدف وآخرى متعددة الاهداف .

٤- علل " لماذا اذا تضمن جدول الحل الأمثل واحد أو أكثر من المتغيرات الاصطناعية فى صورة متغير اساسي ،فان المشكلة على الصورة التى تم صياغتها عليها ليس لها حل أمثل .

٥- هل من الضرورى ان يتم وضع أولويات للأهداف فى حالة تعددها فى نموذج برمجة الاهداف ؟ وماهو الاجراء الذى يتبع اذا تبين انها جميعا على نفس القدر من الأهمية ؟ .

٦- ماهو الفرق بين الهدف، والقيد ؟

٧- ماهو مفهومك لمصطلح انحراف التجاوز ، ومصطلح انحراف عدم التحقق ؟

٨- تقوم شركة القاهرة لصناعة الآلات الحاسبة بانتاج حاسبات للجيب ،وقد تمكنت من خلال تجاربها وابحاثها التوصل الى نموذجين من هذه الحاسبات يمتازان برخص اثمانهما،وهى تفكر حاليا فى انتاج هذه الحاسبات خاصة بعد ان تلقت طلبات من العملاء

للتوريد للاسبوع القادم. وقد واجه مدير التخطيط مشكلة تحديد كمية الانتاج من كل من هذين النموذجين فى ضوء الاهداف والطاقات المحددة، ولهذا الغرض تم تجميع البيانات التالية :

النموذج	هامش الربح	قسم التصنيع	قسم التجميع	رقائق الخشب
$س_١$	٧	٣	٢	١
$س_٢$	١٠	٢	٤	—

فاذا علمت ان الادارة العليا للشركة قد حددت أن تكون الخطة الموضوعة تستهدف الآتي :

هدف الاولوية الاولى : تحقيق ارباح مقدارها ١١٦ جنيه على الاقل فى الاسبوع القادم.

هدف الاولوية الثانية : تجنب استخدام اكثر من ١٠ وحدات من رقائق الخشب .

هدف الاولوية الثالثة : انتاج ٨ وحدات على الاقل من النموذج $س_١$.

هدف الاولوية الرابعة : تجنب استخدام اكثر من ٣٦ ساعة من قسم التصنيع .

هدف الاولوية الخامسة : تجنب استخدام اكثر من ٤٠ ساعة من قسم التجميع .

هدف الاولوية السادسة : انتاج ٧ وحدات على الاقل من النموذج $س_٢$.

والمطلوب منك ايجاد المزيج الانتاجي الأمثل في ضوء الاهداف الموضوعة من قبل ادارة الشركة .

٩- بفرض ان احدى الشركات تقوم بانتاج منتجين وكل منتج منهما يمر بعمليتين انتاجيتين في قسمين ، وان طاقة هذين القسمين هى ٣٠ ساعة للقسم الاول ،

٦٠ ساعة للقسم الثاني يوميا ، وان كل وحدة من المنتج الاول تحتاج ٢ ساعة من القسم الاول و ٦ ساعات من القسم الثاني .

اما المنتج الثانى فان كل وحدة منه تحتاج الى ثلاث ساعات من القسم الانتاجي الاول ، و ٤ ساعات من القسم الانتاجي الثاني . والمطلوب ان تحدد للادارة المزيج الانتاجي الامثل فى ضوء الاهداف التى وضعتها الادارة مرتبة ترتيبا تنازليا كالآتي :

أ ـ انتاج ١٠ وحدات على الاقل من المنتجين معا .

ب ـ انتاج ٧ وحدات من المنتج الثاني على الاقل .

جـ ـ تجنب التشغيل الاضافى للقسم الاول .

د ـ تجنب التشغيل الاضافى للقسم الثاني .

هـ ـ انتاج ٤ وحدات على الاقل من المنتج الاول .

* *

الفصل الخامس

طرق خاصة فى البرامج الخطية

*طريقه النقل .

* حالات خاصة لمشاكل النقل .

*مشكله التخصيص .

مشكلـــة النقـــل

* مقدمة

* علاقة مشكلة النقل بالبرامج الخطية

* طرق ايجاد الحل المبدئى الممكن :

** طريقة الركن الشمالى الشرقى.

** طريقة ادنى تكلفة فى الصف.

** طريقة ادنى تكلفة فى العمود.

** طريقة ادنى تكلفة فى المصفوفة.

** طريقة فوجل التقريبية.

** طريقة رسل التقريبية.

* تحديد امثلية الحل :

** طريقة نقطة الارتكاز.

** طريقة التوزيع المعدل.

* حالات خاصة لمشاكل النقل.

* تطبيق طريقة النقل على مجالات ادارية اخرى.

الفصل الخامس

طريقه النقل

The Transportation Method

تعتبر طريقة النقل احد مجالات التطبيق الهامة لاساليب البرمجة الخطية ، حيث أنها كباقى اساليب وطرق البرامج الخطية تتضمن مواقف تخصيص الموارد Resource Allocation ، فمشكلة النقل تتعلق بقرارات تخصيص أو تعيين الطريقة المثلى للانتقال المادى لكميات من السلع توجد فى نقاط معينة يطلق عليها نقاط التوريد او الامداد Supply Points (من المصانع مثلا) الى مواقع اخرى يطلق عليها نقاط الطلب Demand Points (الى المخازن أو الى مناطق التوزيع) وذلك بشرط ان تصل التكلفة الكلية للنقل ادنى مايمكن ، فتكاليف النقل من الأهمية بالنسبة للادارة بحيث أن أي توفير فيها يعود على الشركة بأرباح طائلة .

وتكون المتغيرات القرارية فى ذلك النوع من المشاكل هى كمية السلع التي سيتم نقلها أو شحنها من كل نقطة توريد الى كل نقطة طلب ، ونقاط الامداد والتوريد هنا يمكن اعتبارها بمثابة المصنع أو مجموعة المصانع التى تتبع ادارة واحدة، أى لها مركز رئيسي وتريد ان تقوم بنقل سلعها الجاهزة أو التامة الصنع على عدد من المخازن المحددة للتوزيع على مناطق الاستهلاك لتكون قادرة على تلبية طلبات العملاء والمستهلكون حال ظهورها ، وحيث ان عامل التكلفة في الظروف العادية يمثل الاهمية الكبرى فى مثل هذه المواقف ، اذ يتطلب الامر ان يتم هذا النقل بأدنى تكلفة ممكنة ، ومشكلة القرار هنا ترجع الى أن

المخازن او المستودعات او نقاط الطلب يمكن تموينها وسد احتياجاتها من اى مصنع من المصانع المتاحة ، أي ان هناك عدد من الحلول البديلة ، وكلما زادت المصانع والمخازن زادت بالتالى البدائل المختلفة لنقل الكميات المطلوبة للمخازن المختلفة بحيث تزداد صعوبة تقييم التكاليف المختلفة لهذه البدائل المتاحة .

خلاصة ماتقدم ان مشكلة النقل أو طريقة النقل ماهي الا نموذج رياضي تم تكوينه بشكل خاص مستهدفا تحديد البديل الامثل لنقل وتوزيع كميات معينة من ماهو متاح من مصادر التوريد الى مناطق استهلاك أو مستودعات تحتاج الى تموينها بكميات معينة بحيث تصل تكلفة النقل الى حدها الادنى ، ومعنى ذلك ان العبرة ليست فقط سد احتياجات نقاط الطلب بما يحتاجه من كميات من السلع التامة لانه لو كان الامر كذلك ماكانت هناك مشكلة تحتاج الى حل ، ولكن ان يتم اشباع هذه الاحتياجات مما هو متاح بالمصانع شريطة ان تصل تكلفة النقل الناتجة من نقل تلك الكميات الى ادنى حد ممكن لها .

ويتطلب الامر حتى يمكن تطبيق نموذج النقل أن تكون المشكلة موضوع البحث تتوافر فيها بعض السمات او الخصائص ، بحيث اذا ماتوافرت تلك الخصائص يمكن القول انه يمكن حلها والتعامل معها بنموذج النقل ، اما اذا فقدت احد أو بعض تلك الخصائص يصبح من غير الممكن الاستفادة بنموذج النقل فى حل تلك المشكلة، ويتعين البحث عندئذ عن اسلوب آخر يمكن من خلاله التعامل مع هذه المشكلة . وتلك الخصائص هي :

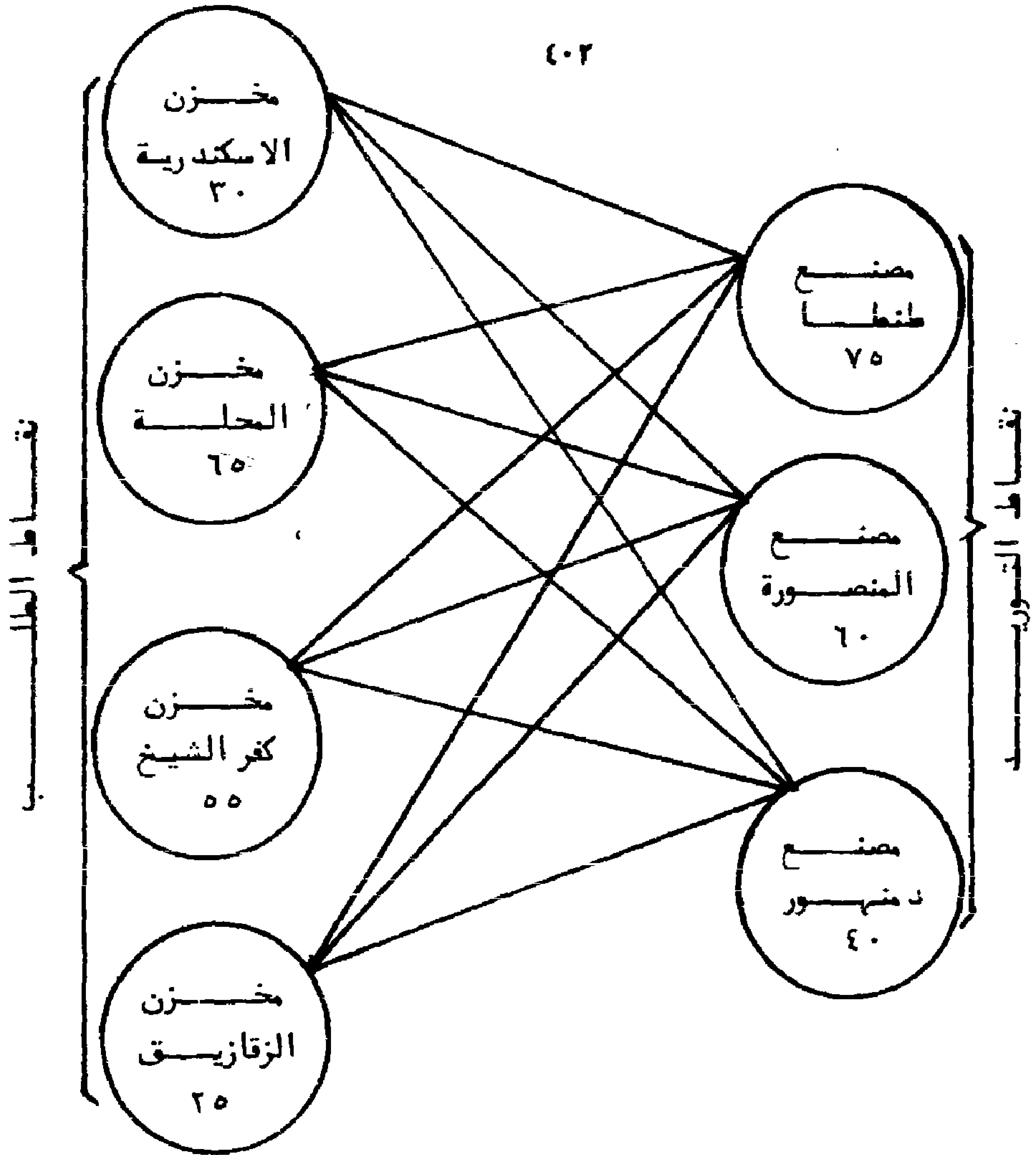
١- وجود عدة نقاط توريد (مصانع مثلا) ذات طاقات محددة ، ووجود عدة نقاط طلب (مخازن ، مناطق توزيع) لها أيضا طاقات استيعابية محددة ،

ويتعين ان تكون طاقات نقاط التوريد وكذلك الطاقات الاستيعابية لمراكز الطلب معروفة ومقاسة كميا بوحدات طبيعية (وحدات ، اوزان)٠ وفي بعض الاحيان تكون الظروف التى تنشأ فيها المشكلة تتسم بأنها ظروف عدم تأكد ، اي ان الكميات المعروضة والمطلوبة غير محددة على وجه الدقة ، الا اننا نؤكد هنا ان هناك نماذج احتمالية تعالج مثل هذه المواقف وتحاول ان تقترب باستخدام الاساليب الاحصائية العلمية الي الحد الذي يصبح فيه تحديد تلك الكميات امرا ممكنا وبدرجة مناسبة من الدقة ٠

٢- توافر عدد من البدائل المتاحة ، أي ان هناك عددا من الطرق التى يمكن استخدامها لنقل وشحن المنتجات من نقاط التوريد الى نقاط الطلب، ويكون القرار الامثل هو الاختيار من بين هذه الطرق البديلة والمفاضلة بينها ليس بشكل جزئي كل على حده ولكن بشكل كلى يعمل على تدنية اجمالي تكلفة النقل للكميات كلها ٠

٣- لابد ان تتوافر وبشكل دقيق بيانات عن تكلفة النقل للوحدة من كل مركز توريد الى كل مركز طلب ،وان تتسم تلك التكلفة بالثبات ونعنى هنا بالثبات ان تأخذ تكلفة النقل علاقة خطية مع الكمية المنقولة ،فاذا كانت تكلفة نقل الوحدة جنيه واحد فان نقل خمسون وحدة هو خمسون جنيها ونقل مائة وحدة هو مائة جنيه ، ذلك مانقصده بالثبات وهو فى ذات الوقت العلاقة الخطية التى تعتبر شرطا لتطبيق طريقة النقل (حيث انها تنتمي لنموذج البرمجة الخطية)٠

والشكل التالي يصور الشروط التالية التي تعتبر العناصر والمتطلبات الاساسية لمشكلة النقل ٠



ويتبين من هذا الشكل أن هناك عدة مصادر توريد محددة الطاقات ، وعدة نقاط للطلب محددة الاحتياجات ، وعدة طرق نقل بديلة تختلف تكلفة النقل على كل منها بسبب تعدد وسائل النقل المتاحة واختلاف المسافات ، وعلى ذلك تصبح مشكلة القرار هى فى تلبية متطلبات كل مخزن وفى حدود طاقة كل مصنع على أساس تخفيض التكاليف الكلية للنقل الى أدنى حد لها .

وحيث ان مشكلة النقل من الطرق الخاصة للبرامج الخطية ، اذن يمكن صياغتها على صورة شكل برمجة خطية (سنرى كيف يمكن ذلك فى جزء لاحق) . وهنا قد يتبادر

الى ذهن القارىء تساؤل منطقي ، وهو طالما انه في الامكان صياغة مشكلة النقل على صورة مشكلة برمجة خطية ، فلماذا اذن نستخدم لحلها أسلوبا خاصا برغم امكانية ذلك بطرق البرمجة الخطية السابقة؟ الحقيقة انه وان كانت مشكلة النقل تندرج تحت طرق البرمجة الخطية ويتم صياغتها بذات الاسلوب المتبع فى البرمجة الخطية ، الا أن لها من الخصائص والسمات مايمكننا من حلها بمنهج خاص يتلاءم مع تلك الخصائص والسمات اكثر ملاءمة من استخدام منهج السمبلكس ،وقد اصطلح على تسمية هذا المنهج الخاص بطريقة النقل ، وهذه الطريقة تعتبر سهلة وميسره وفعاله بما فيه الكفاية اذا ماقورنت بطريقة السمبلكس كما سنرى في جزء لاحق .

من ناحية اخرى فانه قد يعتقد البعض من المقدمة السابقة أن نموذج النقل لايجد له مكانا فى التطبيق الا على تلك الحالات التى تمثل فعلا عملية انتقال مادى للسلع ويكون مطلوب فى تلك الحالة العمل على الوصول بتكلفة النقل الاجمالية الى حدها الأدنى ، ان هذا الاعتقاد وذلك التصور نشأ بلاشك بسبب الاسم الذى يأخذه هذا النموذج (نموذج النقل أو مشكلة النقل)فالحقيقة ان هذا الاسم يعتبر خادع ومضلل Misleading الى حد ما ، حيث أن نوعيات المشاكل التي تطبق عليها طريقة النقل متنوعة ومتعددة جدا، وليست مقصورة فقط كما يفهم من مسماها على الانتقال المادى للسلع والبضائع . فهي صالحة للتطبيق وبنجاح تام على كثير من المشاكل المتنوعة مثل تخطيط الانتاج Production Planning ، وجدولة الآلات Machine Scheduling وتحليل المواقع Location Analysis وجدولة القوى العاملة Work Force Scheduling ، والعديد من نوعيات المشاكل الاخرى . وسوف نعالج في

نهاية هذا الجزء بعض امثلة من هذه المشاكل التي لاتمثل انتقالا ماديا للسلع والبضائع ٠أما عرضنا التالي فسنركزه على تلك المشاكل المتعلقة بالانتقال المادى للسلع والبضائع ٠

وبغرض توضيح مشكلة النقل وكيفية صياغتها كمشكلة برمجة خطية فاننا سنطرح المثال التالى الذى راعينا فيه التبسيط بغرض التوضيح ٠

مثال على مشكلة الانتقال المادى للسلع :

تنتج احدى الشركات الكبرى فى جمهورية مصر العربية منتجا واحدا متماثلا في ثلاثة مصانع نوعية تقع جغرافيا في طنطا ، المنصورة ،دمهور،وتبلغ طاقات المصانع الثلاثة فى السنة القادمة من الوحدات المنتجة الكميات التالية (بالالف وحدة) ، ١٥٠ ،١٢٠ ،٨٠ على الترتيب ٠

ويتم نقل تلك الكميات الى مخازن التوزيع الاربعة التابعة للشركة ليتم تسليمها بعد ذلك الى العملاء، وتبلغ احتياجات تلك المخازن الاربعة عن نفس السنة التخطيطية القادمة مامقداره كالآتي (بالالف وحدة) : مخزن الاسكندرية ٦٠ ، مخزن المحلة ١٣٠ ،مخزن كفر الشيخ ١١٠ ، مخزن الزقازيق ٥٠ ٠

ولقد توفر للشركة المعلومات الكاملة والمتعلقة بتكلفة نقل الوحدة من كل مصنع من المصانع الثلاثة ، الى كل مخزن من مخازن التوزيع الاربعة وكانت هذه التكلفة كما هو مبين من الجدول التالي :

المخزن / المصنع	تكلفة نقل الوحدة الي (بالجنيهات)			
	الاسكندرية	المحلة	كفر الشيخ	الزقازيق
طنطا	٦	١٢	٤	٣
المنصورة	٨	١٥	٧	٨
دمنهور	٣	١١	٢	٥

والمطلوب :

ايجاد جدول الشحن الامثل للفترة التخطيطية القادمة والذى يفى باحتياجات المخازن الأربعة من انتاج المصانع الثلاثة بحيث تصل تكلفة النقل الى ادنى حد ممكن .

الحل :

لقد سبق القول بأن مشكلة النقل (مثل الحالة التي أمامنا الآن) تعتبر نوعا خاصا من مشاكل البرمجة الخطية ،ولتوضيح ذلك سنحاول وضع المشكلة التي يمثلها هذا المثال فى صياغة رياضية على غرار الصياغة الرياضية لمشكلة البرمجة الخطية .

يتعين علينا أولا أن نحدد المتغيرات القرارية التي تتضمنها الصياغة الرياضية ، ان المتغيرات القرارية في مثالنا هذا تمثل كمية السلع الواجب شحنها من كل مصنع الى كل مخزن . وحيث ان كل مصنع يعتبر مورد محتمل للمخازن الاربعة ، وحيث انه يوجد ثلاثة مصانع ،لذلك فان عدد المتغيرات القرارية فى هذه الحالة هي ١٢ (٣×٤) ، وهذا العدد يمثل طرق الشحن المحتملة أو المتغيرات القرارية . أي انه يمكن القول بصفة عامة أن عدد المتغيرات القرارية يعادل عدد نقاط الامداد والتوريد (المصانع) مضروبا فى عدد نقاط الطلب (مخازن التوزيع) .

والجدول التالي يوضح الرموز التى ستعبر عن تلك المتغيرات القرارية :

المخزن / المصنع	الاسكندرية	المحلة	كفر الشيخ	الزقازيق	طاقة المصنع
طنطا	$س_{١١}$	$س_{٢١}$	$س_{٣١}$	$س_{٤١}$	١٥٠
المنصورة	$س_{١٢}$	$س_{٢٢}$	$س_{٣٢}$	$س_{٤٢}$	١٢٠
دمنهور	$س_{١٣}$	$س_{٢٣}$	$س_{٣٣}$	$س_{٤٣}$	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠

ويلاحظ ان المتغير القراري اخذ رمزا ذو قيمة مزدوجة وذلك بسبب ان المتغير القرارى فى هذا النوع من المشاكل يمثل الكمية المنقولة من مصنع ما الى مخزن ما ، وعليه فاذا كنا سنرمز للمتغير القراري بصفة عامة بالرمز الذىاستخدمناه قبل ذلك وهو (س) ، اذن يتطلب الامر ان نذيل ذلك الرمز برقم مزدوج ليشير الى رقم المصنع ورقم المخزن ، فمثلا المتغير القراري ($س_{١١}$) يعبر عن الكمية التى سيتم شحنها من المصنع الاول (طنطا) الى المخزن الاول (الاسكندرية) ، كذلك يشير المتغير القراري ($س_{١٢}$) الى الكمية التى سيتم شحنها من المصنع الثاني (المنصورة) الى المخزن الاول (الاسكندرية) وهكذا.

وحيث ان هدف الشركة هو ان تعمل على نقل انتاج المصانع الثلاثة للوفاء باحتياجات المخازن الأربعة بحيث تصل تكلفة النقل الاجمالية الى حدها الادني أي ان دالة الهدف ستكون كالآتي :

دالة الهدف :

تخفيض ٦ $س_{11}$ + ١٢ $س_{21}$ + ٤ $س_{31}$ + ٣ $س_{41}$ + ٨ $س_{12}$ + ١٥ $س_{22}$ + ٧ $س_{32}$ + ٨ $س_{42}$ + ٣ $س_{13}$ + ١١ $س_{23}$ + ٢ $س_{33}$ + ٥ $س_{43}$

أما القيود المفروضة على تلك الدالة فتتمثل في نوعين من القيود ، النوع الاول يتعلق بنقاط التوريد ، والآخر يتعلق بنقاط الطلب ،بخلاف شرط عدم السلبية ،

قيود نقاط التوريد :

$150 \geq س_{41} + س_{31} + س_{21} + س_{11}$ (مصنع طنطا)

$120 \geq س_{42} + س_{32} + س_{22} + س_{12}$ (مصنع المنصورة)

$80 \geq س_{43} + س_{33} + س_{23} + س_{13}$ (مصنع دمنهور)

أما قيود نقاط الطلب :

$60 \geq س_{13} + س_{12} + س_{11}$ (مخزن الأسكندرية)

$130 \geq س_{23} + س_{22} + س_{21}$ (مخزن المحلة)

$110 \geq س_{33} + س_{32} + س_{31}$ (مخزن كفر الشيخ)

$50 \geq س_{43} + س_{42} + س_{41}$ (مخزن الزقازيق)

شروط عدم السلبية :

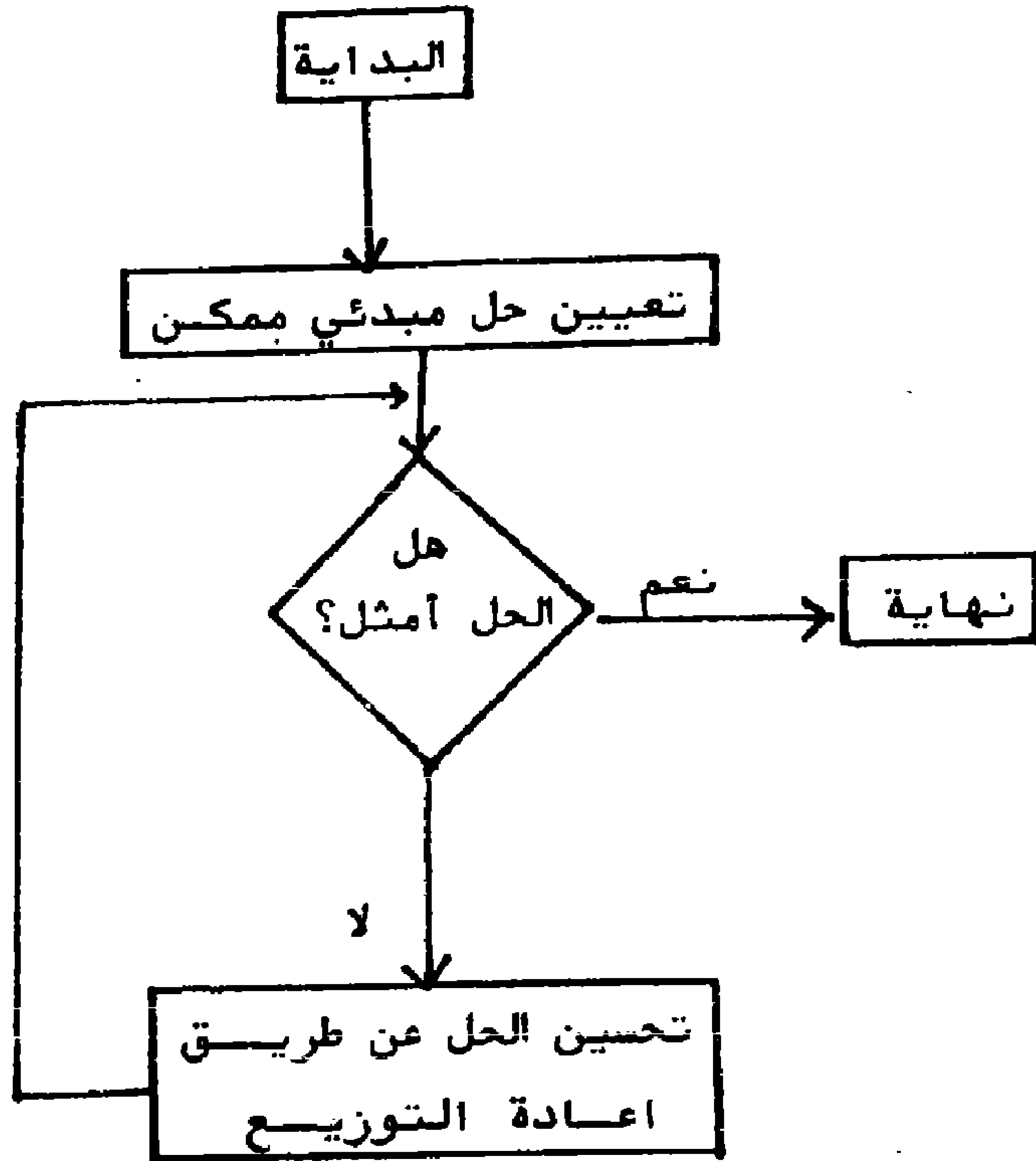
$س_{11}$ ، $س_{21}$ ، $س_{31}$ ، $س_{41}$ ، $س_{12}$ ، $س_{22}$ ، $س_{32}$ ، $س_{42}$ ،
$س_{13}$ ، $س_{23}$ ، $س_{33}$ ، $س_{43}$ $\geq$ صفر

ويتضح من هذه الصياغة الرياضية أن مشكلة النقل البسيطة نسبيا قد قادتنا الى مشكلة برمجة خطية كبيرة نوعا ما ، وتتفاقم المشكلة اذا كان لدينا مشكلة نقل بها ١٠ مصادر توريد و ٥٠ نقطة طلب هنا سنجد أن المشكلة تحتوى على ٥٠٠ متغير قراري (١٠×٥٠) وعدد ٦٠ قيد

(١٠+٥٠) ،وبرغم ان مشكلة بهذا الحجم لاتمثل عبئا عند حلها باستخدام الحاسب الآلى ، الا ان استخدام طريقة النقل فى حلها تعتبر أسهل وأيسر من حلها بطريقة السمبلكس وهذا هو الذى جعلنا نبتعد عن حلها باستخدام اسلوب السمبلكس ونتوصل الى طريقة النقل التي تعتبر افضل بكثير فى التعامل مع تلك النوعية من المشاكل .

الحل باستخدام طريقة النقل :

بعد التقديم السابق سنركز اهتمامنا الآن على حل المثال السابق باستخدام طريقة النقل والتي تعتبر بمثابة منهج حل متخصص ، تم التوصل اليه لمعالجة وحل مشاكل النقل ،ومنهجيا فان طريقة النقل تتشابه الى حد ما فى خطواتها مع طريقة السمبلكس ، فهى تبدأ بحل مبدئي ممكن Initial Feasible Solution ثم يتم اختبار امثليته Optimality ،فاذا كان الحل آمثلا فان خطوات الحل تتوقف ، اما اذا تبين ان الحل المبدئي ليس بعد هو الحل الأمثل يتم العمل على تحسينه عن طريق تغيير نمط الشحن (اى اعادة التوزيع)،ونستمر في اختبار المثالية واعادة التوزيع Reallocating حتى نصل الى جدول الحل الأمثل والشكل التالي يوضح خطوات منهج طريقة النقل .



الخطوة الأولى لطريقة النقل : ايجاد جدول الحل المبدئي الممكن :

ان الخطوة الاولى وفقا لمنهج طريقة النقل هي ايجاد جدول الحل المبدئي الممكن ،ولعله يكون من المناسب أولا أن نتعرف على خصائص وسمات الحل الممكن، ان الحل يعتبر ممكنا اذا كان يقدم جدولا للشحن لايتعدى الطاقات المتاحة للمصانع وفى ذات الوقت يستوفى احتياجات المخازن بدون تجاوز طاقات المصانع ، ومعنى ذلك أن الحل الذى يستوفي قيود التوريد ،وقيود الطلب المختلفة هل هو حل اساسي وممكن فى الوقت نفسه ، فمثلا الجدول التالي يمكن اعتباره جدول حل مبدئي اساس وممكن للمثال الذى نتناوله بالحل ، مع ملاحظة ان شكل الجدول التالى هو التصميم أو الشكل الذى سنستخدمه باستمرار كتصميم عام لجداول الحل لمشكلة النقل ، ويلاحظ منه أننا نضع تكلفة النقل فى مربع صغير داخل الخلايا

الممثلة لطرق الشحن ، أما القيم التى توضع داخل بعض الخلايا فهى تمثل الكمية التى سيتم شحنها عبر هذا الطريق . وبناء على هذا التوضيح سيتم اعداد جدول حل مبدئي ممكن مع مراعاة اننا استبدلنا أسماء المصانع بالرموز أ ، ب ،ج ، ورمزنا للمخازن بالرموز س ، ص ،ع ، ل على التوالي :

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
ا	٦	١٢ / ١٠٠	٤	٣ / ٥٠	١٥٠
ب	٨	١٥ / ٣٠	٧ / ٩٠	٨	١٢٠
ج	٣ / ٦٠	١١	٢ / ٢٠	٥	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠

ويتضح من هذا الجدول انه جدول حل مبدئي اساسي وممكن حيث انه يستوفي قيود التوريد وقيود الطلب ، فاجمالي الكميات المنقولة من كل مصنع تعادل تماما طاقة ذلك المصنع ، كذلك يتضح أن اجمالي الكميات المنقولة الى كل مخزن تعادل تماما الكميات المطلوبة لذلك المخزون أي أن هذا الجدول يستوفي كافة قيود العرض (طاقة المصانع) ، وقيود الطلب (احتياجات المخازن)، ومن ناحية اخرى فانه يمكن حساب تكلفة النقل الاجمالية لنمط الشحن الوارد بالجدول المبدئي عن طريق ضرب الكمية المنقولة × تكلفة نقل الوحدة المرتبطة بتلك الكمية ، ويكون مجموع حواصل الضرب هي اجمالي تكلفة

النقل لذلك الحل ، وفي العادة يتم اعداد هذه العملية الحسابية اسفل الجدول .

اجمالى تكلفة النقل للجدول السابق = ١٠٠x١٢+٥٠x٣+٣٠x١٥
+ ٩٠x٧ + ٦٠x٣+ ٢٠x٢= ٢٦٥٠ جنيه

ولكن السؤال الهام والاساسي هو كيف يمكن ايجاد ذلك الحل المبدئي الممكن ؟ ان الجزء التالي سيتولى بالتوضيح والتفسير التام الاجابة على ذلك السؤال الهام.

طرق اعداد الحل المبدئي الممكن :

الحقيقة انه يمكن ايجاد جدول الحل المبدئي الممكن بأي صورة جزافية ، بمعنى شغل الخلايا بأى كميات وبأي طريقة جزافية او بالصدفة أو أيا كان الاسلوب، ولايوجد من شرط على هذا الحل سوى مراعاة خاصية الحل الممكن وهي استيفاء كافة القيود الخاصة بالعرض والطلب ، ولكن حتى يمكن وضع خطوات محددة ومقننة وبغرض العمل على توحيد من الجميع فى ايجاد ذلك الحل المبدئي ظهرت بعض الطرق المنطقية التى تجعل خطوات ايجاد الحل المبدئي الممكن روتينية ووفق خطوات محدده وموحدة وواجبة الاتباع . تلك الطرق ليست جميعها على نفس درجة الكفاءة فى التوصل الى ذلك الحل المبدئي الممكن، فهناك طرقا كل مايعنيها فقط هو التوصل الى حل اساسي مبدئي ممكن اى مجرد استيفاء قيود العرض والطلب دون اى اعتبار لعامل تكلفة النقل ، وهناك طرق أخرى أكثر كفاءة اذ ان شغلها الشاغل ليس فقط مجرد ايجاد حل مبدئي ممكن ، بل انها تعمل فى ذات الوقت الى ان يكون هذا الحل المبدئي الممكن يقترب ما أمكن من الحل الأمثل ومن ثم يوفر الجهد المبذول فى عدة جولات للحل وصولا للحل الامثل ، اذ انها طرق تأخذ فى اعتبارها بالاضافة الى استيفاء قيود العرض والطلب التوصل الى حل مبدئي ذات اجمالى تكلفة نقل منخفضة ،أي انها تنظر أيضا الى

عامل التكلفة حتى وهي تعمل على ايجاد حل مبدئي ممكن، واجمالا فان الطرق المستخدمة فى ايجاد الحل المبدئي الممكن هي :

١- طريقة الركن الشمالي الشرقي
٢- طريقة ادنى تكلفة فى الصف
٣- طريقة أدنى تكلفة فى العمود .
٤- طريقة ادنى تكلفة فى المصفوفة .
٥- طريقة فوجل التقريبية .
٦- طريقة رسل التقريبية .

وفيما يلي شرح تفصيلي لهذه الطرق لتوضيح كيفية تطبيقها ومدى كفاءة كل منها فى ايجاد الجدول المبدئي الممكن الذى يقترب من جدول الحل الأمثل .

أولا : طريقة الركن الشمالي الشرقي :

North West Corner Method

يجدر بنا ان ننوه فى البداية الى انه يوجد اختلاف فى اسم هذه الطريقة فى كل من اللغة العربية واللغة الانجليزية ، وهذا الاختلاف مرجعه اننا فى اللغة العربية ننظر الى الجدول من اليمين الى اليسار ، بعكس الحال فى اللغة الانجليزية .

وتعتبر طريقة الركن الشمالي الشرقي من أسهل المداخل المستخدمة لايجاد جدول الحل المبدئي الممكن لمشاكل النقل ، ولهذا السبب نجدها أكثر الطرق شيوعا واستخداما . ولقد سميت باسم الركن الشمالي الشرقي لأنها تبدأ بشغل الخلية الواقعة فى اقصى الركن الشمالي الشرقي بالجدول المبدئي، ثم تتابع خطوات شغل باقي الخلايا وفق الاسلوب الذى تسير عليه هذه الطريقة والذى سنوضحه فيما يلى :

يتم ايجاد الجدول المبدئي الممكن وفقا لطريقة الركن الشمالي الشرقي وفقا للخطوات التالية ، علما

بأننا سنطبق تلك الخطوات على المثال الذى بدأنا به هذا الجزء .

١- ابدأ بالخلية الواقعة في اقصى الركن الشمالي الشرقي (وهى الخلية أ س) وضع بها كمية من الوحدات تساوي كمية صفها أو كمية عمودها ايهما أقل . أي يوضع بتلك الخلية الكمية الممثلة لطاقة المصنع (أ) أو طاقة المخزن(س) أيهما اقل ، وحيث ان طاقة المصنع (أ) ١٥٠ وحدة ، وطاقة المخزن (س) هي ٦٠ وحدة ، اذن سيتم شغل الخلية أ س بكمية مقدارها ٦٠ وحدة ، وبذلك يكون المخزن (س) قد حصل على كامل احتياجاته من انتاج المصنع (أ) ،ومازال بهذا المصنع كمية مقدارها ٩٠ وحدة (١٥٠ - ٦٠) .

٢- تحرك الى يسار تلك الخلية او الى أسفلها (حسب مقتضيات الحال) واشغلها بكمية تساوى كمية صفها او كمية عمودها ايهما أقل.ولكن ما الذى يحدد لنا اتجاه الحركة سواء الى اليسار أو الى أسفل ؟ ان اتجاهنا الى اليسار او الى اسفل محدد بالصف أو العمود الذى تم استيفاؤه بالكامل. اذ يوضع كمية مقدارها ٦٠ وحدة فى الخلية أ س يكون المخزن (س) قد استوفى حاجته تماما ومن ثم لايمكن ان تشغل أي خلية بعمود ذلك المخزن بأي كمية ومن ثم فالاتجاه اجباري الى الخلية الواقعة الى اليسار اي ننتقل الى العمود الثاني،وتحديدا الى الخلية أ ص .ونقوم بشغل الخلية أ ص بكمية تساوى كمية صفها (بعد خصم ٦٠ وحدة منها سبق شحنها عبر الخلية أ س) ،أو كمية عمودها (١٣٠) ايهما أقل ، وحيث أن كمية الصف المتبقية من طاقة المصنع هي ٩٠وحدة (١٥٠-٦٠) ، وأن كمية العمود (١٣٠) . اذن يتم شغل الخلية

أ ص بالكمية الاقل وهي ٩٠ وحدة ٠

٣- ثم يتم التحرك الى يسار تلك الخلية أو الى أسفلها (حسب مقتضيات الحال) ويتم شغلها بكمية صفها او كمية عمودها ايهما أقل. ويتم الاستمرار فى هذا العمل حتى يتم مقابلة كل قيود التوريد وقيود الطلب ، وسيظهر جدول الحل المبدئي وخطواته طبقا لطريقة الركن الشمالي الشرقي كالآتي :

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	
ا	٦ ٦٠	١٢ ٩٠	٤	٣	١٥٠	ـ٦٠=٩٠ـ٩٠= صفر
ب	٨	١٥ ٤٠	٧ ٨٠	٨	١٢٠	ـ٤٠=٨٠ـ٨٠= صفر
جـ	٣	١١	٢ ٣٠	٥ ٥٠	٨٠	ـ٣٠=٥٠ـ٥٠= صفر
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠	

س	ص	ع	ل
ـ ٦٠	ـ ٩٠	ـ ٨٠	ـ ٥٠
صفر	٤٠	٣٠	صفر
	ـ ٤٠	ـ ٣٠	
	صفر	صفر	

وستكون التكلفة الاجمالية للنقل وفقا للجدول المبدئي

هي = ٦×٦٠ + ١٢×٩٠ + ١٥×٤٠ + ٧×٨٠ + ٢×٣٠ + ٥٠×٥٠

= ٢٩١٠ جنيها

ويتضح من خطوات طريقة الركن الشمالي الشرقي انها تغفل تماما اعتبارات التكلفة وأن شغلها الشاغل هو التوصل الى حل مبدئي ممكن يعتبر الاساس والمنطلق الذى يتم الارتكاز عليه لجولات تالية نحو تحسين الحل وصولا للحل الامثل .

ثانيا : طريقة أدنى تكلفة فى الصف :

واضح من مسمى هذه الطريقة انها ستكون على عكس طريقة الركن الشمالي الشرقي من حيث اهتمامنا عند ايجاد جدول الحل المبدئي الممكن ، فهى ستدخل في اعتبارها ليس فقط اعتبارات القيود بل وأيضا وستنظر بعين الاعتبار الى التكلفة ايضا ، وتسير هذه الطريقة في الخطوات التالية :

١- نبدأ بالصف الأول من مصفوفة النقل التى تمثل المشكلة المطلوب حلها ، ويتم اختيار تلك الخلية ذات اقل تكلفة فى ذلك الصف (الخلية آل) ويتم شغلها بكمية صفها أو كمية عمودها أيهما أقل . ووفقا لارقام المثال الذى نحن بصدده سيتم شحن تلك الخلية بكمية مقدارها خمسون وحدة ، وهي تمثل احتياجات المخزن (ل) بالكامل، عندئذ يتم استبعاد العمود (آل) من المصفوفة وفى نفس الوقت تخفيض طاقة المصنع (آ) بمقدار خمسون وحدة اي يتبقى بذلك المصنع ١٠٠ وحدة فقط (١٥٠ - ٥٠) .

٢- طالما ان الصف الاول (وهو الذى يمثل المصنع الاول) مازالت به وحدات متاحة فانه يتم النظر مرة اخرى فى ذلك الصف بحثا عن الخلية ذات التكلفة الاقل ، وسنجد ان الخلية (آع) هى الخلية التالية ذات اقل تكلفة نقل بعد استبعاد العمود (ل) ، ويتم شغل تلك الخلية بكمية صفها

(١٠٠) أو كمية عمودها (١١٠) أيهما أقل ، أي سيتم شغل الخلية (أع) بكمية مقدارها (١٠٠)، وبذلك تكون طاقة المصنع أ قد استغلت بالكامل (٥٠ منها للخلية أل ، ١٠٠ للخلية أع) وهذا معناه ان الصف الاول قد استوفي تماما ومن ثم يتم استبعاده . ويتم تخفيض احتياجات المخزن (ع) بالكمية التي شحنت اليه عبر الخلية أ ع وهي كمية مقدارها ١٠٠ وبذلك تكون احتياجات المخزن (ع) قد أصبحت فقط ١٠ وحدات (١١٠-١٠٠).

٣- يتم الانتقال الى الصف الثاني ، ونبحث فيه عن الخلية ذات اقل تكلفة نقل سنجد أنها الخلية (ب ع) ، اذن يتم شحنها بكمية صفها (١٢٠) أوكمية عمودها (١٠) ايهما اقل ، وبذلك يتم شغلها بكمية مقدارها ١٠ وحدات ، بذلك يكون المخزن ع قد استوفى احتياجاته بالكامل فيتم استبعاده ، اما المصنع (ب) فان طاقته المتاحة اصبحت كمية مقدارها ١١٠ فقط (١٢٠-١٠) . وحيث أنه مازالت توجد كمية متاحة بالصف الثاني ، اذن يتم البحث عن الخلية الموجودة بذلك الصف والاقل تكلفة نقل سنجد انها الخلية (ب س) . اذن يتم شغلها بكمية صفها (١١٠) أو كمية عمودها (٦٠) أيهما أقل ، أي انه سيتم شغلها بكمية مقدارها ٦٠ وحدة وبذلك يتم استبعاد العمود (س) لانه تم استيفاء احتياجاته بالكامل ، ويتبقى بالمصنع (ب) كمية مقدارها (١١٠-٦٠) ٥٠ وحدة ، ومن ثم يتم البحث فى ذلك الصف نفسه عن الخلية التالية فى التكلفة فنجد أنها الخلية (ب ص) ويتم شغلها بكمية صفها (٥٠ وحدة) أو كمية عمودها (١٣٠) أيهما أقل. أي يتم شغلها بعدد ٥٠ وحدة .

وهكذا يتم الانتهاء من الصف الأول والثانى حتى الصف الأخير وبذلك يظهر جدول الحل المبدئى الممكن على الصورة التالية :

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦	١٢	٤ / ١٠٠	٣ / ٥٠	١٥٠
ب	٨ / ٦٠	١٥ / ٥٠	٧ / ١٠	٨	١٢٠
جـ	٣	١١ / ٨٠	٢	٥	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠

٦٠ −	٥٠ −	١٠٠ −	٥٠ −
صفر	٨٠	١٠	صفر
	٨٠ −	١٠ −	
	صفر	صفر	

وبذلك نكون قد انتهينا من اعداد الجدول المبدئى الممكن وفقا لطريقة ادنى تكلفة فى الصف، وتكون قيمة دالة الهدف وفقا لهذا الجدول كالآتى :

اجمالى تكلفة النقل = ٣×٥٠ + ٤×١٠٠ + ٧×١٠ + ٨×٦٠

+ ١٥×٥٠ + ١١×٨٠ = ٢٧٣٠ جنيه

وبمقارنة تلك التكلفة بتكلفه الجدول المبدئى الممكن باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى نجد أنها أفضل ، وهذا يؤكد ماسبق قوله ان طريقة الركن الشمالى الشرقى لاتهتم الا بأن تصل الى حل مبدئى ممكن بصرف النظر عن التكلفة ، وهذا ماتراعيه الطريقة الثانية الى حد ما.

ثالثا : طريقة ادني تكلفة فى العمود :

في حين كانت الطريقة الثانية تهتم بأدنى تكلفة فى الصفوف ، فان هذه الطريقة تنظر الى اقل تكلفة فى الاعمدة ، فهى ايضا طريقة تدخل فى اعتبارها عامل التكلفة وليس فقط مجرد حصر اهتمامها فى اعتبارات استيفاء القيود كما كان الحال بطريقة الركن الشمالى الشرقي ، وفيما يلى نستعرض خطوات وملامح هذه الطريقة لنقف على كيفية ايجاد جدول الحل المبدئي الممكن وتكلفة هذا الحل :

١- تبدأ هذه الطريقة بالعمود الأول الذى يمثل المخزن (س) ، ويتم تحديد الخلية ذات أقل تكلفة نقل للوحدة فى هذا العمود ، ويتم شغل تلك الخلية بكمية صفها أو كمية عمودها ، أيهما أقل . وبالنظر الى العمود الأول بالمصفوفة التي تمثل المثال الذى نتعامل معه فى هذا الجزء وهو عمود المخزن (س) نجد أن الخلية (ج س) هى الخلية ذات اقل تكلفة لنقل الوحدة وكمية صفها وهى طاقة المصنع (ج) تبلغ ٨٠ وحدة ، في حين ان كمية عمودها وهى احتياجات المخزن (س) تبلغ ٦٠ وحدة ، اذن يتم شغل الخلية (ج س) بكمية مقدارها ٦٠ وحدة ، وبذلك يكون المخزن (س) قد استوفى احتياجاته بالكامل وعلى ذلك يتم استبعاده ، كذلك نجد أن المصنع (ج) قد انخفضت طاقته بعد شحن ٦٠ وحدة منه الى المخزون (س) وأصبح كل المتاح به ٢٠ وحدة فقط (٨٠-٦٠) .

٢- بعد استبعاد العمود الأول فى الخطوة الأولى (لاستيفاء كافة احتياجاته) ، ننتقل الى العمود الثاني ونبحث فيه ايضا عن الخلية ذات أقل تكلفة

نقل للوحدة ، وسنجد أنها الخلية (ج ص) ،لذلك يتم شغلها بكمية صفها (٢٠) أو كمية عمودهـــا (١٣٠) ايهما أقل ، ولهذا يتم شغل الخلية (ج ص) بكمية مقدارها ٢٠ وحدة ، وبذلك يكون المصنـــع (ج) قد استنفذ طاقته بالكامل فيستبعد فـــي حين ان المخزن (ص) والذى يمثل العمود (ص) مازال فى حاجة الى ١١٠ وحدة (١٣٠–٢٠) لهـــذا لا ننتقل الى العمود الذى يليه الا بعد استيفـــاء كافة احتياجاته ، لهذا نبحث عن تلك الخليـــة الأقل فى تكلفة نقل الوحدة بذلك العمود بخلاف الخلية (ج ص) التى تم شغلها ،فنجد أن الخلية (أص) هى الاقل فى تكلفة نقل الوحدة لهذا يتـم شغلها بكمية صفها (١٥٠) أو كمية عمودها (١١٠) ايهما أقل ،أي يتم شغلها بعدد ١١٠ وحدة ،وبذلك يكون العمود ص الممثل للمخزن ص قد استوفي كـل احتياجاته فيتم استبعاده ٠

٣– ننتقل الى العمود الثالث ونكرر ماتم فـــي الخطوتين الاولى والثانية وهكذا حتى يتـــم استيفاء احتياجات كافة المخازن من انتـــاج المصانع الثلاثة ، وسيظهر جدول الحل المبدئـي الممكن بعد تلك الخطوات على الشكل التالي :

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	
أ	٦	١٢ ‎ ١١٠	٤ ‎ ٤٠	٣	١٥٠	١١٠-٤٠=٤٠-٤٠= صفر
ب	٨	١٥	٧ ‎ ٧٠	٨ ‎ ٥٠	١٢٠	٧٠-٥٠=٥٠-٥٠= صفر
جـ	٣ ‎ ٦٠	١١ ‎ ٢٠	٢	٥	٨٠	٦٠-٢٠=٢٠-٢٠= صفر
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠	
	-٦٠	-٢٠	-٤٠	-٥٠		
	صفر	١١٠	٧٠	صفر		
		-١١٠	-٧٠			
		صفر	صفر			

وتكون تكلفة النقل الاجمالية للجدول المبدئي الممكن وفقا لطريقة أدنى تكلفة فى العمود هي =

اجمالي تكلفة النقل = ٣x٦٠+١٢x١١٠+١١x٢٠+٤x٤٠+٧x٧٠+٨x٥٠

= ٢٧٧٠ جنيه .

وهي اعلى قليلا من تكلفة الجدول المبدئي وفقا لطريقة ادنى تكلفة فى الصفوف ، الا انها احسن كثيرا بالمقارنة بطريقة الركن الشمالي الشرقي ، وهذا طبعا أمر متوقع لان طريقة الركن الشمالي الشرقي لم تأخذ في اعتبارها عند اعداد الجدول المبدئي عامل التكلفة فى حين راعت ذلك هذه الطريقة .

رابعا : طريقة ادنى تكلفة فى المصفوفة :

وفقا لهذه الطريقة فانها لن تكتفى فقط بالنظر الى ادنى تكلفة فى الصف كالطريقة الثانية ، أو ادنى تكلفة فى العمود كالطريقة الثالثة ، وانما يتم التعامل

مع المصفوفة كلها بكامل صفوفها وأعمدتها ، وذلك بغية الوصول الى جدول مبدئي ممكن وايضا اجمالي تكلفة النقل وفقا له في وضع معقول يمكننا من الوصول الى جدول الحل الأمثل بمجهود أقل وفي عدد من جداول تحسين الحل اقل . وتسير هذه الطريقة في الخطوات التالية :

١- يتم البحث في المصفوفة كلها عن تلك الخلية التي تكون فيها تكلفة نقل الوحدة أدنى تكلفة بالمصفوفة كلها . وبالنظر الى المصفوفة التي تمثل المثال الذى نتعامل معه في هذا الجزء ، نجد أن الخلية (ج ع) هي تلك الخلية التي تمثل فيها تكلفة نقل الوحدة ادنى تكلفة في المصفوفة كلها (٢ جنيه للوحدة) ، عندئذ يتم شغل تلك الخلية بكمية صفها (٨٠ وحدة) أو كمية عمودها (١١٠ وحدة) ايهما أقل . أي يتم شغلها بكمية مقدارها ٨٠ وحدة ، ويتم استنزال هذه الكمية من طاقة المصنع (ج) ، والذي يتبين انه استنفذ طاقته بالكامل ، ويتم استنزالها أيضا من احتياجات المخزن (ع) فيصبح هذا المخزن في حاجة فقط الى ٣٠ وحدة (١١٠ - ٨٠) .

٢- يتم بعد ذلك البحث عن الخلية ذات أقل تكلفة نقل للوحدة للمصفوفة كلها بعد استبعاد الصف ج (وهو المصنع ج الذى اصبحت طاقته صفر) ، وسنجد ان الخلية (أ ل) هي الخلية ذات ادنى تكلفة نقل للوحدة في المصفوفة الباقية ،لذلك يتم شغلها بانقص كمية أي كمية صفها (١٥٠) ، أو كمية عمودها (٥٠ وحدة) ايهما أقل . أي سيتم شغلها بكمية مقدارها ٥٠ وحدة ، وباتمام هذه الخطوة يكون المخزن (ل) قد حصل على احتياجاته كلها اي يتم استبعاده من المصفوفة ، كما يتم تخفيض طاقة المصنع (أ) بالكمية التى نقلت

بالخلية (أل) ، أي ستصير طاقة المصنع المتبقية ١٠٠ وحدة فقط (١٥٠–٥٠) .

٣– يتم تكرار العمل بذات الخطوات السابقة ، أي يتم البحث عن الخلية ذات أدنى تكلفة بالمصفوفة المتبقية بعد استبعاد الصف (ج)، والعمود (ل) ، وسنجد انها الخلية (أع) فيتم شغلها بكمية صفها (١٠٠ وحدة) أو كمية عمودها (٣٠وحدة) ايهما أقل ، أي يتم شغلها بعدد ٣٠ وحدة . وهكذا .

٤– يتم تكرار الخطوات السابقة وفي كل مرة يتم استبعاد الصف أو العمود الذى تم استنفاده والتعامل مع باقي المصفوفة ، حتى يتم استيفاء كافة الصفوف والاعمدة .

٥– بانتهاء الخطوات السابقة ، وبعد استيفاء كافة صفوف وأعمدة المصفوفة سيظهر الجدول المبدئي الممكن كالآتي :

المصنع / المخزون	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦ / ٦٠	١٢ / ١٠	٤ / ٣٠	٣ / ٥٠	١٥٠
ب	٨	١٥ / ١٢٠	٧	٨	١٢٠
ج	٣	١١	٢ / ٨٠	٥	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠

٦٠ —	١٠ —	٨٠ —	٥٠ —
صفر	١٢٠	٣٠	صفر
	١٢٠—	٣٠—	
	صفر	صفر	

وتكون قيمة دالة الهدف لهذا الجدول المبدئي الممكن باتباع هذه الطريقة هي :

اجمالي تكاليف النقل للجدول المبدئي الممكن =٢x٨٠ + ٣x٥٠
+ ٤x٣٠ + ٦x٦٠ + ١٢x١٠ + ١٥x١٢٠ = ٢٧١٠ جنيه

وبمقارنة هذه التكلفة بنتائج الطرق السابقة نجد أنها افضل طريقة حتى الآن .

خامسا : طريقة فوجل التقريبية :

Vogel's Approximation Method (VAN)

وتنسب هذه الطريقة الى مكتشفها W.R.Vogel

وتسعى طريقة فوجل التقريبية والتي تعرف بحروفها الأولى اذ تختصر الى VAM ، الى التوصل الى جدول مبدئي ممكن يصل بتكلفة النقل الى حد يقترب من الامثلية بحيث تكون خطوات وجداول تحسين الحل أقل مايمكن. لذلك نجدها تهتم جدا عند اعداد هذا الجدول المبدئي بتكاليف النقل لخلايا المصفوفة ليس فقط كما كان يحدث بالطرق السابقة والتى كانت تهتم ايضا بالتكاليف، ولكنها تنتهج اسلوبا مغايرا اكثر فاعلية ، ويقوم هذا المنهج على فكرة التضحية أو العقوبة أو الجزاء Penalty والذى قد يقترب من مفهوم الفرصة الضائعة .ويتم حساب التضحية أو العقوبة أو الجزاء لكل صف ولكل عمود بالمصفوفة وذلك من خلال حساب الفروق المطلقة بين ادنى تكلفة والتكلفة التالية لها مباشرة لكل صف ولكل عمود ولذلك سيتم اضافة صف جديد للمصفوفة اسفل صف احتياجات المخازن ، وأيضا اضافة عمود جديد يسار عمود طاقة المصنع ، ويسجل بالصف الجديد فروق الاعمدة ،ويسجل بالعمود الجديد فروق الصفوف . ولترتيب استخدام هذه الطريقة يتم السير فى الخطوات التالية :

١- نبدأ بالصف الأول ، ونحدد أقل تكلفة نقل للوحدة به ، والتكلفة التى تليها مباشرة فى ذلك

الصف نفسه ، ونستخرج الفرق بينهما ، ونسجل هذا الفرق امام ذلك الصف فى الخلية التى آضيفت بالعمود الجديد ، ونكرر تلك العملية مع كل صف حتى نفرغ من جميع الصفوف .

٢- ننتقل بعد ذلك الى الاعمدة ،ونبدأ بالعمود الاول ، ونحدد أيضا اقل تكلفة نقل للوحدة به ، والتكلفة التىتليها مباشرة فى العمود نفسه ، ونستخرج الفرق بينهما ، ونسجل هذا الفرق اسفل ذلك العمود فى الخلية التى أضيفت بالصف الجديد ، ونكرر تلك العملية مع كل عمود حتى نفرغ من جميع الاعمدة .

وبتطبيق هاتين الخطوتين على مصفوفة المثال السابق نحصل على الجدول التالي :

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	الفروق
أ	٦	١٢	٤	٣	١٥٠	١
ب	٨	١٥	٧	٨	١٢٠	١
ج	٣	١١	٢	٥	٨٠	١
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠		
الفروق	٣	١	٢	٢		

٣- الخطوة الثالثة هى تحديد اكبر هذه الفروق (صفوفا كانت آو اعمدة) ،وفى حالة التساوى لأكثر من قيمة من قيم تلك الفروق يتم الاختيار جزافيا ،

ثم يتم تحديد الصف أو العمود المقابل لأكبر هذه الفروق . فاذا كان هذا الفرق مقابل أحد الأعمدة مثلا، فانه يتم البحث في هذا العمود عن الخلية ذات اقل تكلفة نقل للوحدة،ويتم شغلها بكمية صفها أو كمية عمودها أيهما اقل ، ثم نحدد الصف أو العمود الذى تم استيفاؤه بشغل تلك الخلية ومن ثم حذفه من المصفوفة .

وقد يكون من المفيد ان تجرى تلك الخطوة على المثال السابق قبل الخوض فى باقى الخطوات حتى يمكن تفهمها اولا بأول ، اذ بالنظر الى المصفوفة السابقة نجد أن اكبر الفروق المحسوبة هى الفروق المقابلة للعمود الأول(س) اذ تبلغ تلك الفروق (٣) ، وان الخلية ذات أقل تكلفة بذلك العمود هى الخلية (ج س) ، اذن يتم شغلها بكمية صفها (٨٠ وحدة) أو كمية عمودها (٦٠وحدة) أيهما اقل . ووفقا لهذه القاعدة سيتم شغلها اذن بعدد ٦٠ وحدة وهي كمية العمود، وبذلك يكون المخزن (س) قد تم استيفاء احتياجاته بالكامل ومن ثم يتم استبعاده من الجولة التالية للحل .

٤- نقوم بجولة تالية للحل ، ولابد ان نبدأ من الخطوة الاولى مرة اخرى على آن يتم أولا استبعاد العمود الاول من المصفوفة حيث تم الانتهاء منه وتلبية احتياجاته بالكامل فى الخطوة الثالثة . وبعد تعديل العرض والطلب اخذا فى الاعتبار التخصيص الذى تم فى الخطوة الثالثة ،وفيما يلى نعيد تصوير المصفوفة بعد تعديلها وفق ماتم ذكره ، وبعد حساب الفروق المطلوبة للصفوف والاعمدة .

المخزن / المصنع	ص	ع	ل	طاقة المصنع	الفروق
أ	١٢	٤	٣	١٥٠	١
ب	١٥	٧	٨	١٢٠	١
جـ	١١	٢	٥	٢٠	٣
احتياجات المخازن	١٣٠	١١٠	٥٠		
الفروق	١	٢	٢		

ويتبين اولا من هذه المصفوفة انه تم استبعاد العمود (س) منها لاستيفائه لاحتياجاته ،وتم تخفيض طاقة المصنع (حـ) من ٨٠ وحدة الى٢٠ وحدة، حيث انه قد تم شحن ٦٠ وحدة من هذا المصنع لتلبية احتياجات المخزن (س) . من ناحية اخرى يلاحظ آن الفروق اسفل الاعمدة ظلت كما هي دون تغيير عن المصفوفة السابقة ، لأنه لم يتم استبعاد صفوف ولكن تم استبعاد عمود ، واستبعاد العمود لايؤثر على فروق الاعمدة ولكن يؤثر على فروق الصفوف . ولهذا السبب نلاحظ وجود تغير فى فروق الصفوف عما كانت عليه فى المصفوفة السابقة .

وبالنظر الى المصفوفة الجديدة نجد أن أكبر فروق موجودة فى صف المصنع (ج) ومقدار هذا الفرق (٣) ، لذلك نختار الخلية (ج ع) لأنها الخلية ذات اقل تكلفة فى صف المصنع (ج) ، ويتم شغلها بكمية صفها (٢٠ وحدة) أو كمية عمودها (١١٠ وحدة) أيهما

أقل ، أي أن يتم شغلها بعدد ٢٠ وحدة وبذلك يكون المصنع (ج) قد استنفذ طاقته بكاملها فيتم استبعاده من المصفوفة الجديدة ويتم تخفيض العمود (ع) بمقدار ٢٠ وحدة لتصبح احتياجات المخزن (ع) ٩٠ وحدة فقط ، ثم يتم حساب الفروق وندخل فى الجولة التالية للحل .

هـ- يتم تصوير المصفوفة بعد احداث التعديلات التي ذكرناها فى الخطوة السابقة عليها ، وتظهر المصفوفة الجديدة كالآتي :

المخزن / المصنع	ص	ع	ل	طاقة المصنع	الفروق
أ	١٢	٤	٣	١٥٠	١
ب	١٥	٧	٨	١٢٠	١
احتياجات المخزن	١٣٠	٩٠	٥٠		
الفروق	٣	٣	٥		

ويتضح من هذه المصفوفة ان اكبر فروق موجودة فى عمود المخزن (ل) ومقدار هذا الفرق (٥)، لذلك يتم اختيار الخلية (أل) لأنها الخلية ذات أقل تكلفة فى عمود المخزن (ل) ، ويتم شغل تلك الخلية بكمية صفها (١٥٠) او كمية عمودها (٥٠) أيهما أقل ، اي يتم شغلها بعدد ٥٠ وحدة ، وبذلك يكون المخزن (ل) قد تم استيفاؤه بالكامل فيتم استبعاده من المصفوفة الجديدة ، ويتم تخفيض طاقة المصنع (أ) بمقدار ٥٠ وحدة ليظهر فى المصفوفة التالية بطاقة قدرها ١٠٠ وحدة فقط . ثم يتم حساب الفروق

الفروق مرة اخرى ويعاد تصوير المصفوفة وندخل في جولة جديدة للحل .

٦- يتم تصوير المصفوفة بعد التعديلات التي حدثت عليها من الخطوة السابقة ، وفيما يلى المصفوفة الجديدة .

المخزن / المصنع	ص	ع	طاقة المصنع	الفروق
أ	١٢	٤	١٠٠	٨
ب	١٥	٧	١٢٠	٨
احتياجات المخزن	١٣٠	٩٠		
الفروق	٣	٣		

ويتضح من هذه المصفوفة ان اكبر فروق موجودة فى كل من العمودين (أ) و (ب) ومقدار هذه الفروق (٨) اى انهما متعادلان فى الفروق ، وكما سبق القول يتم فى هذه الحالة الاختيار الجزافي لأيهما . ويمكن ان نختار الصف (أ) ، عندئذ يتعين اختيار الخلية (أع) لانها الخلية ذات أقل تكلفة في الصف (أ) ويتم شغلها بكمية صفها (١٠٠ وحدة) ، أو بكمية عمودها (٩٠ وحدة) ايهما اقل ، أي يتم شغلها بكمية مقدارها ٩٠ وحدة وهي الكمية الاقل ، وبذلك يكون المخزن (ع) قد حصل على كل احتياجاته ومن ثم يتم استبعاده من المصفوفة الثانية ، كذلك يتم تخفيض طاقة المصنع (أ) بتلك الكمية ومن ثم تصبح طاقته المتاحة حاليا ١٠ وحدات فقط ،ثم يتم

الدخول فى الجولة التالية للحل .

٧- يتم تصوير المصفوفة بعد التعديلات السابقة، مع ملاحظة اننا اهملنا صف وعمود الفروق ،حيث لم يعد لدينا سوى عمود واحد وصفين ، وبالتالي لن ينتج لدينا سوى فرق واحد للعمود الموجود . وفيما يلى شكل المصفوفة المعدل .

المخزن / المصنع	ص	طاقة المصنع
أ	١٢	١٠
ب	١٥	١٢٠
احتياجات المخزن	١٣٠	

ومن هذه المصفوفة يتم شغل الخلية أص بمقدار ١٠ وحدات ، ويتم شغل الخلية ب ص بمقدار ١٢٠وحدة .

وبذلك ننتهى من توزيع الكميات وفقا لطريقة فوجل وفيما يلي المصفوفة التى تظهر الجدول المبدئي للحل وفقا لهذه الطريقة :

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦	١٢ (١٠)	٤ (٩٠)	٣ (٥٠)	١٥٠
ب	٨	١٥ (١٢٠)	٧	٨	١٢٠
ج	٣ (٦٠)	١١	٢ (٢٠)	٥	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠

وتكون قيمة دالة الهدف لهذا الجدول المبدئي الذى تم اعداده بطريقة فوجل التقريبية هي :

اجمالي تكاليف النقل للجدول المبدئي السابق =
١٢x١٠ + ٤x٩٠ + ٣x٥٠ + ١٥x١٢٠ + ٣x٦٠ + ٢x٢٠=٢٦٥٠جنيه
وبمقارنة هذه التكلفة بنتائج كل الطرق السابقة سنجد أن المقارنة فى صالح هذه الطريقة .

سادسا : طريقة رسل التقريبية :

Russel's Approximation Method

وهذه الطريقة ايضا من الطرق التى تأخذ في اعتبارها تكلفة النقل عند ايجاد جدول الحل المبدئي ، ولذلك سنجد أن الحل المبدئي الذي يتم اعداده وفقا لهذه الطريقة سيقترب كثيرا من الحل الأمثل ،بمعنى انه لن يحملنا كثيرا من الجهد المبذول فى عدة جولات للحل، وذلك بالمقارنة مثلا بالجدول المبدئي الناتج من استخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي .

وتتلخص هذه الطريقة فى الخطوات التالية :

١- حساب الفروق المطلقة لكل خلية من خلايا المصفوفة باستخدام المعادلة التالية :
الفروق المطلقة للخلية = تكلفة الخلية - أعلى تكلفة فى صف تلك الخلية - أعلى تكلفة فى عمود تلك الخلية .

٢- بعد حساب الفروق المطلقة لكل خلايا المصفوفة ،يتم اختيار تلك الخلية ذات أكبر رقم باشارة سالبة ،وفي حالة ما اذا اتضح أن هناك اكثر من خلية تشترك في الرقم الاكبر،فان الاختيار بينهما يتم جزافيا ، أو يمكن الرجوع ثانية الى التكاليف الاصلية لتلك الخلايا واختيار الادنى فى التكلفة .

٣- يتم شغل الخلية ذات اكبر رقم مطلق باشارة سالبة بكمية صفها أو كمية عمودها ايهما أقل، والصف او العمود الذى يتم استيفاؤه بالكامل يتم استبعاده فى الجولة التالية للحل ، ويتم اعداد الجولة

التالية للحل بعد عملية الاستبعاد هذه ومع ملاحظة اجراء التعديلات الواجبة فى كميات طاقة المصانع أو احتياجات المخازن وفقا للتخصيص الذى تم في الخطوات السابقة .

٤- يتم السير فى الخطوات السابقة وفى جولات متعاقبة حتى يتم استيفاء كل الاعمدة والصفوف .

ولغرض توضيح كيفية تطبيق خطوات هذه الطريقة ، فاننا سنقوم بتنفيذ خطواتها على مصفوفة المثال الذى طرحناه فى مشكلة النقل والتي كانت تأخذ الشكل التالي:

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦	١٢	٤	٣	١٥٠
ب	٨	١٥	٧	٨	١٢٠
جـ	٣	١١	٢	٥	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠

وفي الجولة الأولى وتطبيقا لخطوات طريقة رسل التقريبية يتم حساب الفروق المطلقة لكل خلية وفقا للمعادلة السابق ذكرها فى الخطوة الاولى .وفيما يلي حساب هذه الفروق صفا صفا :

الصف الأول :

فروق الخلية أ س = ٦ - ١٢ - ٨ = - ١٤

فروق الخلية أ ص = ١٢ - ١٢ - ١٥ = - ١٥

فروق الخلية أ ع = ٤ - ١٢ - ٧ = - ١٥

فروق الخلية أ ل = ٣ - ١٢ - ٨ = - ١٧

الصف الثاني :

فروق الخلية ب س = ٨ — ١٥ — ٨ = — ١٥
فروق الخلية ب ص = ١٥ — ١٥ — ١٥= — ١٥
فروق الجلية ب ع = ٧ — ١٥ — ٧ = — ١٥
فروق الجلية ب ل = ٨ — ١٥ — ٨ = — ١٥

الصف الثالث :

فروق الخلية حـ س = ٣ — ١١ — ٨ = — ١٦
فروق الخلية حـ ص = ١١ — ١١ — ١٥= — ١٥
فروق الخلية حـ ع = ٢ — ١١ — ٧ = — ١٦
فروق الخلية جـ ل = ٥ — ١١ — ٨ = — ١٤

ويتضح من الخطوة الاولى انالخلية (آل) هي الخلية ذات اكبر قيمة فروق مطلقة باشارة سالبة (-١٧)، لذلك ووفقا لخطوات طريقة رسل التقريبية يتم شغل تلك الخلية بكمية صفها (١٥٠) أو كمية عمودها (٥٠) ايهما أقل، اى سيتم شغلها بكمية مقدارها خمسون وحدة وبذلك يكون المخزن (ل) قد تم استيفاؤه لكل احتياجاتهومن ثم يتم استبعاده منالجولة التالية للحل ، كذلك يتم تعديل طاقة المصنع (أ) لتصبح ١٠٠ وحدة فقط بدلا من ١٥٠ وحدة لأننا اخذنا ٥٠ وحدة من هذا المصنع لاستيفاء حاجة المخزن ل . ثم نعيد تصوير المصفوفة بعد اجراء هذه التعديلات ، ونقوم بتكرار الخطوة السابقة أي حساب الفروق المطلقة لخلاياها .

المخزن / المصنع	س	ص	ع	طاقة المصنع
آ	٦	١٢	٤	١٠٠
ب	٨	١٥	٧	١٢٠
جـ	٣	١١	٢	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٣٠٠ / ٣٠٠

الصف الاول :

فروق الخلية آ س = ٦ − ١٢ − ٨ = − ١٤

فروق الخلية آ ص = ١٢ − ١٢ − ١٥ = − ١٥

فروق الخلية آ ع = ٤ − ١٢ − ٧ = − ١٥

الصف الثاني :

فروق الخلية ب س = ٨ − ١٥ − ٨ = − ١٥

فروق الخلية ب ص = ١٥− ١٥ − ١٥= − ١٥

فروق الخلية ب ع = ٧ − ١٥ − ٧ = − ١٥

الصف الثالث :

فروق الخلية حـ س = ٣ − ١١ − ٨ = − ١٦

فروق الخلية حـ ص = ١١− ١١ − ١٥ = − ١٥

فروق الخلية حـ ع = ٢ − ١١ − ٧ = − ١٦

ويتضح من هذه الجولة الثانية فى حساب الفروق أن هناك خليتين كل منهما يمثل اكبر قيمة فروق مطلقة باشارة سالبة وهما الخليتين (حـ س) ، (حـ ع)، والفروق المطلقة لكل منهما (−١٦) ، ومن ثم يمكن الاختيار من بينهما جزافيا ، او يمكن ان نختار أيهما أقل تكلفة نقل في المصفوفة الاصلية ، والتي يظهر منها ان تكلفة النقل

للوحدة الواحدة بالخلية (حـ س) هى ٣ جنيهات فى حين انها للخلية (ج ع) ٢ جنيه فقط ، لذلك سنختار شغل الخلية الاقل فى التكلفة وهى الخلية (ج ع) ويتم شغلها بكمية تساوى كمية صفها (٨٠ وحدة) أو كمية عمودها (١١٠ وحدة) ايهما أقل ، أي سيتم شغلها بكمية مقدارها ٨٠ وحدة ومن ثم يتم استبعاد المصنع (ج) من المصفوفة التالية حيث استنفذت طاقة هذا المصنع بالكامل لتلبية جزء من احتياجات المخزن (ع) الذى يتعين ان يعدل احتياجاته لتصبح ٣٠ وحدة فقط (١١٠ – ٨٠)، ثم نعيد تصوير المصفوفة بعد اجراء هذه التعديلات عليها تمهيدا للدخول فى جولة جديدة للحل يتم فيها تكرار خطوة حساب الفروق المطلقة لكافة خلاياها .

وفيما يلى المصفوفة الجديدة بعد اجراء التعديلات عليها :

المخزن / المصنع	س	ص	ع	طاقة المصنع
ا	٦	١٢	٤	١٠٠
ب	٨	١٥	٧	١٢٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	٣٠	٢٢٠ / ٢٢٠

الصف الاول :

فروق الخلية أ س = ٦ – ١٢ – ٨ = – ١٤

فروق الخلية أ ص = ١٢– ١٢ – ١٥= – ١٥

فروق الخلية أ ع = ٤ – ١٢ – ٧ = – ١٥

الصف الثاني :

فروق الخلية ب س = ٨ – ١٥ – ٨ = –١٥

فروق الخلية ب ص = ١٥ – ١٥ – ١٥ = – ١٥

فروق الخلية ب ع = ٧ – ١٥ – ٧ = – ١٥

ويتضح من هذه الفروق انه توجد خمس خلايا متساوية من حيث اكبر قيمة فروق مطلقة باشارة سالبة (– ١٥) وعليه سيتم الاختيار من بينها وفقا للمعيار الجزافي ، أو المعيار اقلهما تكلفة فى المصفوفة الاصلية ، ووفقا للمعيار الثاني سيتم اختيار الخلية (أ ع) لأنها أقلهم تكلفة نقل • ويتم شغل تلك الخلية بكمية صفها (١٠٠ وحدة) أو كمية عمودها (٣٠ وحدة) أيهما أقل ، أي سيتم شغلها بعدد ٣٠ وحدة ومن ثم يستبعد المخزن ع لاستيفائه بكل احتياجاته ، وتخفض طاقة المصنع (أ) بعدد ٣٠ وحدة لتصبح ٧٠ ، ويعاد تصوير المصفوفة مرة أخرى بعد اجراء هذه التعديلات •

المخزن / المصنع	س	ص	طاقة المصنع
أ	٦	١٢	٧٠
ب	٨	١٥	١٢٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١٩٠ / ١٩٠

الصف الاول :

فروق الخلية أ س = ٦ – ١٢ – ٨ = – ١٤

فروق الخلية أ ص = ١٢ – ١٢ – ١٥ = – ١٥

الصف الثاني :

فروق الخلية ب س = ٨ – ١٥ – ٨ = – ١٥

فروق الخلية ب ص = ١٥ – ١٥ – ١٥ = – ١٥

وتتضح ان هناك ثلاثة خلايا متساوية فى قيمة الفروق المطلقة باشارة سالبة (-١٥) لذلك سيتم اختيار الخلية (ب س) لأنها ذات اقل تكلفة نقل فى المصفوفة الاصلية ، ويتم شغل تلك الخلية بكمية صفها (١٢٠) أو كمية عمودها (٦٠) ايهما اقل . أي سيتم شغلها بعدد ٦٠ وحدة ، ومن ثم يتم استبعاد العمود (س) حيث قد تم استيفاؤه بكامل احتياجاته ، كما يتم تعديل طاقة المصنع (ب) لتصبح ٦٠ وحدة فقط بدلا من ١٢٠ وحدة حيث أنه قد تم شحن ٦٠ وحدة من ذلك المصنع لاستيفاء احتياجات المخزن (س) . ثم يعاد تصوير المصفوفة بعد هذه التعديلات .

المخزن / المصنع	ص	طاقة المصنع
أ	١٢	٧٠
ب	١٥	٦٠
احتياجات المخزن	١٣٠	١٣٠ / ١٣٠

وواضح من هذه المصفوفة انه لاداعى ان نكرر حساب الفروق حيث ان تخصيصات الكميات واضحة ومحددة ولاتحتاج لاي عمليات حسابية ، اذ سيتم شغل الخلية (أص) بعدد ٧٠ وحدة وهى كمية صفها ، وكذلك شغل الخلية (ب ص) بعدد ٦٠ وحدة وهي كمية صفها أيضا .

وعلى ذلك فان الجدول المبدئي الممكن وفقا لطريقة رسل التقريبية سيكون كالآتي :

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦	١٢ / ٧٠	٤ / ٣٠	٣ / ٥٠	١٥٠
ب	٨ / ٦٠	١٥ / ٦٠	٧	٨	١٢٠
جـ	٣	١١	٢ / ٨٠	٥	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠

وتكون قيمة دالة الهدف لهذا الجدول المبدئي الذى تم اعداده بطريقة رسل التقريبية هي :

اجمالي تكاليف النقل للجدول المبدئي السابق = ٧٠x١٢+٣٠x٤ + ٥٠x٣ + ٦٠x٨ + ٦٠x١٥ + ٨٠x٢ = ٢٦٥٠ جنيه

وفيما يلى بيان مقارن لاجمالى تكلفة الحل المبدئي الممكن وفقا للطرق السابقة :

طريقة الركن الشمالي الشرقي	٢٩١٠ جنيه
طريقة ادنى تكلفة فى الصف	٢٧٣٠ جنيه
طريقة ادنى تكلفة فى العمود	٢٧٧٠ جنيه
طريقة ادنى تكلفة فى المصفوفة	٢٧١٠ جنيه
طريقة فوجل التقريبية	٢٦٥٠ جنيه
طريقة رسل التقريبية	٢٦٥٠ جنيه

وبصفة عامة يمكن القول بأن :

١- الطرق التى تراعي تكلفة النقل عند ايجادها للحل المبدئي افضل من طريقة الركن الشمالي الشرقي التي تهملها تماما ،هذا على الرغم من أن الاخيرة سهلة وسريعة فى ايجاد جدول الحل المبدئي ، ولكن العبرة ليست بالسرعة انما بأن يكون ذلك الحل المبدئي

الممكن قريبا ما أمكن من جدول الحل الأمثل حتى لاندخل فى عدة جولات للحل بغرض تحسينه تستهلك كثيرا من الوقت وتزيد من الاعباء الحسابية للحل .

٢- حتى الآن لايوجد هناك معيار للمفاضلة بين هذه الطرق بالنسبة لحل مشكلة بذاتها ، وان تقرير هذا الأمر بصورة قاطعة يستدعي حل المشكلة باستخدام كافة هذه الطرق ، ولكننا نميل الى تطبيق أي من الطريقتين الاخيرتين وهما طريقة فوجل التقريبية ، وطريقة رسل التقريبية . ولقد ظلت طريقة فوجل ولفترة طويلة منذ عام ١٩٥٨ بمثابة الطريقة المفضلة لايجاد الحل المبدئي . اما طريقة رسل فلم تكن متاحة للاستخدام الا منذ عام ١٩٦٩ ، ولكن على الرغم من حداثتها النسبية ، وعلى الرغم من أنها تعتمد على جولات متتالية للحل ، وعلى الرغم كذلك من عدم استنادها حتى الآن على برهان نظري، الا أنها أصبحت الطريقة المفضلة في معظم الأحوال لأنها تقترب بالحل المبدئي الى الحل الأمثل .

٣- سنلاحظ فى أي من الطرق الستة السابقة أن شغل أي خلية كان يعنى دائما اما استنفاذ مصدر ، أو اشباع حاجة ، او الاثنين معا وتلك سمة من السمات المميزة لمشكلة النقل .

تحديد الأمثلية Determining Optimality

وفقا لمنهج طريقة النقل الذى اشرنا اليه في مقدمة هذا الجزء ، فان ايجاد جدول الحل المبدئي الممكن يعتبر بمثابة الخطوة الأولى من خطوات حل مشكلة النقل ، وتكون الخطوة الثانية هي تحديد ما اذا كان جدول الحل المبدئي الذى تم التوصل اليه من الخطوة الاولى يمثل الحل الأمثل أم لا ؟ ، بمعنى اختبار أمثلية

الحل . فاذا ماتضح ان الحل أمثل فقد توصلنا الى حل المشكلة ، اما اذا ماتبين ان الحل غير أمثل فان الامر يتطلب الاستمرار فى العمل نحو تحسينه ، ونود أن نوضح هنا من البداية ان اختبار المثالية يعتبر في حد ذاته نقطة انطلاق نحو تحسين الحل ، بمعنى ان هذا الاختبار لاتقتصر نتائجه على الحكم بأن الحل الحالي امثل أم لا ؟ ، بل انه يتعدى هذه الحدود ويوضح لنا الطريق الذى نتبعه نحو تحسين ذلك الحل .

كذلك يتعين ان نوضح منذ البداية ايضا ان اختبار المثالية لمشكلة النقل هو فى أساسه ومفهومه نفس الاختبار الذى سبق اتباعه فى طريقة السمبلكس ، أي انه منهجيا يسير بنفس الخطوات المتبعة فى تحسين الحل المبدئي لطريقة السمبلكس ، فقد كانت مثالية جدول السمبلكس تتحدد بتقييم كل متغير غير أساسي من حيث مقارنة المكسب الذى يمكن ان نحققه من جعل ذلك المتغير اساسيا (الارباح الداخلة) مقارنة بالتضحية التي سنتحملها فى سبيل احداث هذا التغيير (التكاليف الداخلة) وعندما نصل الى النقطة التي نجد فيها أن أيا من المتغيرات غير الاساسية لاتقدم تحسنا اضافيا للحل ، نكون بذلك قد وصلنا الى الحل الأمثل .

ان ذلك المدخل سيكون هو نفسه المدخل المتبع في تحديد امثلية الحل لجولات مشكلة النقل ، فالمتغيرات غير الاساسية فى مشكلة النقل هى تلك الخلايا التى لم يتم شغلها بالجدول (الخلايا الفارغة) ، ولذلك يتم مقارنة تكلفة النقل لكل خلية فارغة وسنطلق عليها تكلفة النقل المباشرة ، بصافى التغير فى تكلفة الطرق الاخرى الذى سيحدث لو فكرنا فى شغل تلك الخلية الفارغة ، وسنطلق عليها أصطلاح التكاليف غير المباشرة ، وسيكون الحل امثل اذا كانت التكلفة المباشرة للخلايا الفارغة (متغيرات غير أساسية) تزيد عن صافى التخفيض فى التكاليف

غير المباشرة الناشئة من اعادة الشحن عبر الخلايا الاخرى (الطرق الآخرى) .

وقبل الدخول فيتفاصيل الطرق المتبعة فى اختبار المثالية ، يهمنا ايضا ان نغطى مفهوم الامثلية بمزيد من الوضوح ، لذلك سنواصل توضيح مفهوم القاعدة السابقة بمثال مبسط بدلا من تطبيقه على المصفوفة الأصلية اختصارا للعمليات الحسابية المطلوبة ، ثم ننقل هذا المفهوم بعد استيعابه للتطبيق على المشكلة الاصلية .

بفرض ان المصفوفة التالية تمثل جدول الحل المبدئي الممكن لمشكلة نقل ومطلوب اجراء اختبار المثالية عليها وفقا للقاعدة التي طرحناها فى هذا الجزء .

المخزن / المصنع	ب١	ب٢	طاقة المصنع
أ١	٣ / ٥٠	٦ / ١٠	٦٠
أ٢	٤	١٠ / ٦٠	٦٠
احتياجات المخزن	٥٠	٧٠	١٢٠ / ١٢٠

ويتضح من هذا الجدول المبدئي ان المتغيرات الاساسية (الخلايا المشغولة) هي : أ١ ب١ ، أ١ ب ٢، أ٢ ب ٢

أما الطريق الوحيد او الخلية الوحيدة غير المشغولة (المتغير غير الاساسي) فهى الخلية أو الطريق أ٢ ب ١ ، ووفقا للقاعدة السابقة: اذا كان الحل الذى تقدمه تلك المصفوفة هو الحل الامثل فانه من الضروري ان نجد ان تكلفة النقل بالخلية (أ٢ ب ١) اكبر من التخفيض او الوفر الناتج من اعادة الشحن على الطرق

والخلايا الاخرى . ولكن كيف يمكننا حساب ذلك ؟ فيمايلي نوضح كيف يمكن اجراء العمليات الحسابية بهدف المقارنة المطلوبة والتى تقررها تلك القاعدة .

دعنا نتخيل اننا قررنا شغل الخلية الفارغة (أ$_{١}$ ب $_{٢}$) لنرى تأثير ذلك على صافى التغير الذى يعتبر بمثابة المؤشر على اختبار المثالية ، فاذا فكرنا مثلا في شغل الخلية (أ$_{٢}$ ب $_{١}$) وليكن بوحدة واحدة فان صف أ$_{٢}$ (طاقة المصنع الثاني) ستزيد الى ٦١ وحدة، ونحن نفترض ان طاقات المصنع محددة ، اذن ليس هناك من حل سوى ان يتم تخفيض الخلية المجاورة (أ$_{٢}$ ب $_{٢}$) بمقدار وحدة لاحداث التوازن الذى اختل بشغل الخلية (أ$_{١}$ ب$_{٢}$) بوحدة ، ولكن شغل الخلية (أ$_{٢}$ ب $_{١}$) بوحدة واحدة لايؤثر فقط على صفها ولكنه اثر على عمودها، اذ بشغلها بوحدة واحدة يترتب عليه ان تزداد احتياجات المخزن بوحدة واحدة (تصبح ٥١)، وهذا لايصح اذ يتعين الابقاء على متطلبات المخازن كما هي ، لذا يتعين تخفيض الكمية المنقولة بالخلية (أ$_{١}$ ب $_{١}$) بوحدة واحدة لاحداث التوازن ، ولكن تخفيض الكمية المنقولة بالخلية (أ$_{١}$ ب $_{١}$) بمقدار وحدة واحدة وان كان قد اعاد التوازن الى العمود (ب$_{١}$)، الا انه احدث خللا بالصف (أ$_{١}$) اذ ستكون طاقة المصنع (٥٩) وهذا غير حقيقي ويتطلب العمل على اعادة التوازن مرة أخرى عن طريق اضافة وحدة واحدة الى الخلية (أ$_{١}$ ب ٢) . والسؤال الآن ان عمليات اعادة التوازن هذه والتى فرضتها عملية شغل الخلية (أ$_{٢}$ ب $_{١}$) بوحدة واحدة اليس لها انعكاس وتأثير على التكلفة ؟ . وماهي النتيجة النهائية او المحصلة النهائية لاعادة التخصيص من زاوية التكاليف؟ للاجابة على ذلك نقول ان هذه التعديلات لابد وان تنعكس تكاليفيا والامر يحتاج الى قياس هذا الانعكاس والتأثير، ولكن دعنا نحدد بصورة اوضح التغيرات التى تمت :

شغل الخلية $أ_٢$ $ب_١$ بوحدة واحدة يترتب عليه التغيرات التالية مجتمعة :

- تخفيض الخلية $أ_١$ $ب_١$ بوحدة واحدة
- زيادة الخلية $أ_١$ $ب_٢$ بوحدة واحدة
- تخفيض الخلية $أ_٢$ $ب_٢$ بوحدة واحدة

ولكن ماهو الانعكاس من ناحية التكاليف لنقرر عما اذا كانت المحصلة فى صالح هذا التغير ام لا ؟ .

ان الترجمة التكاليفية لهذه التغيرات يمكن حسابها كالآتي :

شغل الخلية $أ_٢$ $ب_١$ بوحدة واحدة سيؤدى الى زيادة التكلفة بمقدار + ٤ جنيه

تخفيض الخلية $أ_١$ $ب_١$ بوحدة واحدة سيؤدى الى تخفيض التكلفة بمقدار − ٣ جنيه

زيادة الخلية $أ_١$ $ب_٢$ بوحدة واحدة سيؤدى الى زيادة التكلفة بمقدار + ٦ جنيه

تخفيض الخلية $أ_٢$ $ب_٢$ بوحدة واحدة سيؤدى الى تخفيض التكلفة بمقدار −١٠ جنيه

المحصلة النهائية للتغيير − ٣ جنيه

وهذا معناه انه اذا فكرنا فى شغل الخلية الفارغة $ا_٢$ $ب_١$ بمقدار وحدة واحدة فان ذلك سيترتب عليه انخفاض تكلفة النقل لذلك الحل المبدئي بمقدار ٣ جنيه وهذا يعنى ان ذلك الحل المبدئي غير آمثل ، اذ يمكن تخفيض تكلفته عن طريق شغل الخلية $ا_٢$ $ب_١$ والذى اتضح انه من المصلحة ان نقوم بشغلها ، ومن ناحية اخرى اذا كان فى استطاعتنا توفير ثلاثة جنيهات عن كل وحدة يتم نقلها عبر الطريق $ا_٢$ $ب_١$ ، فان التوفير فى التكلفة سيتم تعظيمه لشحن اقصى كمية ممكنه على ذلك الطريق، ولكن ماهو الحد الاقصى لعدد الوحدات التي يمكن أن

ننقلها عبر ذلك الطريق ؟ او بمعنى آخر كم عدد الوحدات التي يمكن ان نشغل بها الخلية (أ٢ ب١) ؟

ان تحديد الكمية (الحد الاقصى) التي يمكن أن تنتقل الى الخلية (أ٢ ب١) تتحدد ايضا من خلال حركة التغيرات التى استخدمناها فى حساب المحصلة النهائية لتكلفة التغيير . فلقد ذكرنا قبل ذلك أن شغل الخلية (أ٢ ب١) سيترتب عليه تغييرات فى الخلايا الاخرى من تخفيض وزيادة ويمكن ان نعبر عن التخفيض والزيادة باشارة (+) ، اشارة (–) وهذا ما يوضحه الشكل التالي :

	ب١	ب٢
أ١	٣ (–) ٥٠	٦ (+) ١٠
أ٢	٤ (+)	١٠ (–) ٦٠

ومن هذا الشكل يمكن استنتاج ان اضافة اي كمية الى الخلية أ٢ ب١ سيقابلها تخفيض كل من الخليتين (أ١ ب١) ، (أ٢ ب٢) بنفس الكمية ، وحيث ان هناك قيدا بعدم السلبية لذا يتعين ان ننقل اقصى كمية الى الخلية أ٢ ب١ شريطة الا يترتب على ذلك ان تصبح كميات احدى الخلايا سالبة ، معنى ذلك انه لايمكن نقل كمية مقدارها ٦٠ وحدة، لأن ذلك معناه تخفيض الخلية أ١ ب١ بمقدار ٦٠ وحدة، وحيث ان كل الكمية الموجودة بها هي ٥٠ وحدة اذن ستنقلب تلك الخلية الى كمية سالبة (٥٠ – ٦٠ = – ١٠) وهذا غير صحيح حسب شرط عدم السلبية ، اذن اقصى كمية يمكن نقلها هى تلك الكمية التى لايترتب عليها ان تتحول اي خلية يتم تخفيضها وفقا للتغييرات الى كمية سالبة . ومعنى ذلك كله ان كمية الوحدات التى سيتم نقلها الى الخلية عند اعادة التخصيص هي أقل كمية شحن حالية عند الخلايا التى ستنخفض (أي

الخلايا التى علاماتها سالبة فى خط السير المرسوم) .

وتطبيقا لهذه القاعدة على المثال المبسط السابق، سنجد ان هناك خليتين علاماتهما سالبة وهما أ١ ب١ ، أ٢ ب٢ ، كمية الاولى ٥٠ وحدة ، وكمية الثانية ٦٠وحدة اذن الحد الاقصى الذي يمكن نقله الى الخلية أ٢ ب١ هو ٥٠ وحدة . وفيما يلي تصوير للمصفوفة وفقا للاسلوب الذى اتبعناه .

	ب١	ب٢
أ١	(٣) ٥٠ – ٥٠	(٦) ١٠ + ٥٠
أ٢	(٤) صفر + ٥٠	(١٠) ٦٠–٥٠

←

	ب١	ب٢
أ١	(٣) صفر	(٦) ٦٠
أ٢	(٤) ٥٠	(١٠) ١٠

تكلفة الجدول المبدئي =
٣x٥٠+٦x١٠+١٠x٦٠=٨١٠جنيه

تكلفة الجدول بعد التحسين =
٦x٦٠+٤x٥٠+١٠x١٠=٦٦٠جنيه

ومن خلال هذه المقارنة سنجد ان الحل الثاني قد أدى الى انخفاض فى اجمالى تكلفة النقل بما قيمته ١٥٠ جنيه (٨١٠–٦٦٠) ، وهو تخفيض متوقع ، حيث اننا سنقوم بنقل ٥٠ وحدة الى الخلية أ٢ ب١ والتي تبين من قبل ان أي وحدة يتم نقلها عبر تلك الخلية ستعمل على تخفيض التكلفة بما قيمته ٣ جنيهات للوحدة الواحدة . اذن اجمالى التخفيض المتوقع هو = ٣x٥٠ = ١٥٠ جنيه .

هذا المثال البسيط يوضح الخطوات الاساسية في اختيار امثلية الحل لمشكلة النقل ، وكذا خطوات تحسين الحل اذا ما اتضح ان جدول الحل غير أمثل .

لقد وضح لنا من العرض السابق مفهوم اختيار المثالية وتحسين الحل لمشاكل النقل ، ولكن يتعين هنا أن نستعرض الطرق التي يمكن استخدامها لاختبار المثالية

حتى يمكن تلمس خطواتها وملامحها ومنهجها واختيار تلك الطريقة التى يمكن ان نعتبرها أسهل وأيسر في التطبيق ، و يمكن ان يتم اجراء اختبار المثالية لمشاكل النقل باحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الاولى : طريقة نقطة الارتكاز (حجر الوطء)

Stepping Stone Method

الطريقة الثانية : طريقة التوزيع المعدل

Modified Distribution (MODI) Method

وفيما يلى المنهج الذى تبنته كل طريقة فى اختبار المثالية .

طريقة نقطة الارتكاز (حجر الوطء) :

عندما تكون مشكلة النقل المطلوب حلها واختبار مثالية جولاتها كبيرة بالمقارنة بمشكلة المثال السابق (المكون من أربع خلايا) سنجد ان تصور نمط التغيير المطلوب احداثه لاعادة التخصيص صعبا بعض الشيء، ولهذا توجد بعض الطرق التى تعالج هذا التصور بطريقة أسهل، واحدى هذه الطرق يطلق عليها طريقة نقطة الارتكاز، أو كما يتم ترجمتها فى بعض المراجع العربية باسم (حجر الوطء) ، وسوف نرى السبب وراء تسميتها بهذا الاسم عند توضيح مفهومها واجراءاتها .

وقبل ان نسترسل فى توضيح عمل طريقة نقطة الارتكاز سنبين اولا مدى التعقيد الذى يصاحب اختبار المثالية وتحسين الحل عندما تكون المشكلة كبيرة نسبيا، ولهذا الغرض سنعود الى مثالنا الاصلى الذى بدأنا به مشكلة النقل والذى كان الجدول التالي يمثل الحل المبدئي لها بطريقة الركن الشمالى الشرقي .

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
آ	٦ / ٦٠	١٢ / ٩٠ −	٤	٣ +	١٥٠
ب	٨	١٥ / ٤٠ +	٧ / ٨٠ −	٨	١٢٠
ج	٣	١١	٢ / ٣٠ +	٥ / ٥٠ −	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠

وبفرض أننا نرغب في اختبار مثالية هذا الجدول المبدئي ، فان ذلك يتطلب اختبار مثالية كافة الخلايا الفارغة (المتغيرات غير الاساسية).وتقضي طريقة نقطة الارتكاز ان يتم تقييم تلك الخلايا غير المشغولة وغير المستغلة وذلك بغرض الوقوف على أثر شغل كل منها على التكاليف ، فاذا تبين ان شغل خلية ما بوحدة واحدة مثلا سيترتب عليه خفض تكاليف النقل ،فان جدول النقل يتم اعادة تعديله للاستفادة من ذلك ،وسبق القول ان عملية التقييم هذه تتم من خلال تحديد خط سير الزيادات و التخفيضات ومن ثم المحصلة النهائية ، الا اننا سنفاجئ عندما تكبر المصفوفة أن هناك صعوبة فى تحديد خط السير ، ولذلك هناك بعض الاعتبارات الواجب ملاحظتها عند تحديد خط السير وهي :

١- يجب أن يكون خط السير أو مايطلق عليه مسار الحلقة المغلقة Closed Loop فى صورة خطوط افقية ورأسية وليس فى صورة متقاطعة أو قطرية ، أى يتعين أن تكون زوايا المسار كلها زوايا قائمة.

٢- ان يمر خط السير بخلايا مشغولة حتى يمكن تصور النقل منها ، ولكن هذا لايمنع المرور بخلايا

مشغولة دون الانتقاص منها او المرور بخلايا فارغة دون الاضافة اليها وذلك حفاظا على كميات الصفوف والأعمدة .

٣- يراعى دائما الحفاظ على توازن الصفوف والاعمدة ، بمعنى اذا تم شغل خلية معينة فيتعين انقاص صفها وعمودها بذات الكمية المنقولة اليها لتستمر حالة التوازن التي كانت موجودة قبل اجراء هذا التعديل .

٤- ينبغى ان نلاحظ ان مسار الحلقة المغلقة عبارة عن مضلع مغلق جميع اركانه يتشكل من خلايا اساسية (أي خلايا مشغولة) ، عدا واحدة فقط وهي الخلية التي يراد تقييمها. ويمكن الاثبات والبرهنة على انه يوجد مضلع مغلق واحد لكل خلية غير اساسية (فارغة) ،اى لايكون هناك سوى مسار حلقة مغلقة واحدة لكل خلية غير أساسية فى الحل .

وتفصيلا فان طريقة محور الارتكاز (حجر الوطء) ترتكز على تقييم الخلايا غير الاساسية وفقا لمفهوم الحلقة المغلقة، اذ يتم اختبار الاثر المحتمل على قيمة دالة الهدف (اجمالي تكلفة النقل) عند تحويل الخلية الفارغة (غير الاساسية) والتي نقوم بتقييمها الى خلية اساسية ، ويتم ذلك عن طريق رسم المسار، وتحديد التغيرات الموجبة والتغيرات السالبة أو مايطلق عليه سلسلة الزوائد والنواقص (+ ،-) ، ويمكن ان نقوم بذلك بسهولة عن طريق وضع اشارة (+) فى الخلية المطلوب تقييمها (لأن اعادة التوزيع اذ تم سينتج عنه اضافة كمية الى تلك الخلية)، ثم نبدأ باستكمال المسار وبوضع الاشارة (-) فى اول خلايا المسار ثم نستمر فى استكمال الزوائد والنواقص وفقا لذلك المسار . مع ملاحظة أن اختلاف الاتجاه سواء مع عقارب الساعة أو عكسها لايؤدى

الى اختلاف النتيجة .

ولتوضيح العمليات السابقة حسابيا وعمليا نعود الى جدول الحل المبدئي السابق ، والذى يتضح منه وجود ستة خلايا غير اساسية (فارغة) هي الخلايا :

ا ع ، ا ل ، ب س ، ب ل ، جـ س ، جـ ص

ويتم تقييم اثر شغل كل خلية من تلك الخلايا علىالتكلفة ويتم ذلك على خطوتين الاولى تحديد المسار، والثانية حساب صافى التغيرات فى التكلفة ، وفيما يلى تطبيق لهاتين الخطوتين على كل خلية فارغة كالآتي :

الخلية أ ع :

المسار : من (ب ع) الى (ب ص) الى (أص) الى(أع)

صافى التغير فى التكلفة = ـ ٧+ ١٥ = ١٢ + ٤ = صفر جنيه

الخلية أل :

المسار: من (حـ ل)الى(جـ ع) الى (ب ع) الى (ب ص) الى (اص) الى (ال).

صافى التغير فى التكلفة = ـ٥ +٢ ـ ٧ + ١٥ ـ ١٢ +٣ = ـ٤ جنيه .

الخلية ب س :

المسار: من (أس) الى(أص) الى (ب ص) الى (ب س)

صافى التغير فى التكلفة= ـ ٦+١٢ـ ١٥+٨ = ـ ١ جنيه

الخلية ب ل :

المسار: من (ب ع) الى (جـ ع) الى (جـ ل) الي (ب ل)

صافي التغير فى التكلفة= ـ٧ + ٢ ـ ٥ + ٨ = ـ ٢ جنيه

الخلية جـ س :

المسار: من (آس) الى (أص)الى (ب ص) الى (ب ع) الى (جـ ع) الى (جـ س)

صافى التغير فى التكلفة= ـ٦+١٢ـ١٥+٧ـ٢+٣ = ـ ١ جنيه

الخلية ج ص :

المسار : من (ب ص)الى(ب ع) الى (ج ع) الى (ج ص)
صافى التغير فى التكلفة = - ١٥ + ٧ - ٢ + ١١ = ١ جنيه

وباستعراض قيم صافى التغير في التكلفة للخلايا الستة التى تم تقييمها يتضح ان هناك قيما موجبة وقيما صفرية وقيما سالبة وهذا يعنى مايلي :

١- قيمة صافى التغير فى التكلفة ذات الاشارة الموجبة تعنى ان النقل الى ذلك الخلية غير ناجح لانه يترتب عليه ارتفاع فى التكاليف ، فمثلا يتبين ان الخلية (ج ص) صافى التغير لها هو ١ جنيه ،وهذا يعنى ان اى وحدة يتم نقلها عبر تلك الخلية ستؤدى الى زيادة التكلفة الاجمالية للنقل بمقدار جنيه ، ومن ثم فاننا نرفض النقل على اي خلية يكون صافي التغير لها قيمة موجبة .

٢- قيمة صافى التغير الصفرية تعنى ان النقل عبر تلك الخلية لن يترتب عليه اى تأثير على التكلفة الاجمالية للنقل ولن يعمل على تحسين دالة الهدف . وان كان لهذه القيمة الصفرية معنى ومغزى هام جدا لمتخذ القرار وسنوضحه فى موضع لاحق من هذا الفصل.

٣- أما قيمة صافى التغير فى التكلفة ذات الاشارة السالبة والتي ظهرت عند الخلايا (ال = -٤)، (ب س= -١) ، (ب ل = -٢) ، (ج س = -١) فانها تعنى ان النقل عبر تلك الخلايا ناجح وسيترتب عليه انخفاض فى التكاليف بمقدار صافى التغير لكل وحدة يتم نقلها . ومعنى ذلك انه اذا ظهرت قيما سالبة لصافي التغير لأي خلية فارغة فان ذلك يعنى ان الحل الحالي غير أمثل .

وبتطبيق هذه القاعدة على الجدول المبدئي السابق

نستطيع ان نقول انه جدول غير أمثل لوجود قيم صافي تغير سالبة للخلايا الفارغة (المتغيرات غير الاساسية)• ومن ثم يتعين تحسين الحل •

تحسين الحل :

ما الذى يمكن عمله عندما يتبين من اختبار المثالية ان الحل غير أمثل ؟ ان مايمكن عمله فى تلك الحالة ان نقوم بنفس الاجراء الذى اتبعناه عندما تبين أن الحل غير أمثل لمشاكل البرمجة الخطية ،أي العمل على تحسين ذلك الحل ، وفى مشاكل النقل يكون تحسين الحل عن طريق النقل عبر طريق (أو خلية) غير مستخدمة فى جدول الحل غير الامثل • ويسير تحسين الحل فى الخطوات التالية :

الخطوة الاولى : تحديد المتغير الداخل •
الخطوة الثانية : تحديد اكبر قيمة للمتغير الداخل•
الخطوة الثالثة : تعديل نمط النقل بالجدول المبدئي، وحساب تكلفته الجديدة •

وفيما يلى العمليات الحسابية لهذه الخطوات •

الخطوة الاولى : تحديد المتغير الداخل :

بعد ان تبين ان جدول الحل المبدئي غير أمثل، اذن يتعين اختيار الخلية الفارغة (المتغير غير الاساسي) التى سيتم اختيارها للنقل من خلالها (أي لتصبح متغيرا أساسيا) والتي يتم تسميتها بالمتغير الداخل اسوة بالبرمجة الخطية التي تسير على نفس المنهج ، لقد كان اختيار المتغير الداخل فى مشاكل البرمجة الخطية ذات هدف التخفيض (اخترنا مشاكل التخفيض لانها تعمل فى نفس اتجاه دالة الهدف لمشاكل النقل) ، يتم على أساس ذلك المتغير ذات اكبر قيمة باشارة سالبة فى صف صافى التغير • وهذا هو نفس المعيار الذى سيتم وفقا له اختيار المتغير الداخل،

أي ان الخلية التى سيتم اختيارها للنقل من خلالها هي تلك الخلية ذات اكبر قيمة صافي تغير باشارة سالبة لانها الخلية التى ستقدم اقصى توفير ممكن فى التكلفة بالمقارنة بباقى الخلايا التي لها قيمة صافى تغير سالبة .

وبتطبيق هذا المعيار فان الخلية التى سيتم اختيارها كمتغير داخل هى الخلية (آل) ، حيث يبلغ صافى التغير لها (-٤) وهى اكبر قيمة باشارة سالبة .

الخطوة الثانية : تحديد اكبر قيمة للمتغير الداخل :

بعد ان تم اختيار الخلية (ال) كمتغير داخل أو طريق رئيسي جديد فان الخطوة التي تلي ذلك هي تقرير عدد الوحدات التي يمكن شحنها عبر ذلك الطريق ، لقد سبق القول فى موضع متقدم من هذا الجزء انه يتعين ان ننقل الى تلك الخلية اقصى كمية ممكنة شريطة الا يترتب على هذا التعديل فى نمط الشحن ظهور خلايا بكميات سالبة احتراما لشرط عدم السلبية ، ومعنى ذلك ان اقصى كمية يمكن أن تنقل عبر الخلية الممثلة للمتغير الداخل (آل) تتحدد على أساس اقل مقدار فى الخلايا التى ينقل منها فى خط السير المحدد بسلسلة الزوائد والنواقص . ولهذا الهدف سيتم كتابة سلسلة الاشارات (+ ، -) فى الخلايا التى تمثل خط السير لتلك الخلية ، وبالرجوع الى مصفوفة الحل المبدئي ، سنجد اننا وضعنا بالفعل سلسلة الزوائد والنواقص ، ويتبين منها ان اقصى كمية يمكن نقلها عبر الخلية (آل) مقدارها خمسون وحدة ، وهى أقل الكميات بالخلايا التى وضعت بها الاشارة السالبة ،وذلك تجنبا لظهور خلايا بكميات سالبة .

الخطوة الثالثة :تعديل نمط النقل بالجدول المبدئي،وحساب تكلفته الجديدة :

بعد اختيار المتغير الداخل من الخطوة الاولى وهو

(ال) ، وبعد تحديد اقصى كمية يمكن نقلها عبر تلك الخلية (٥٠ وحدة) . تأتي الخطوة الثالثة لتعديل نمط النقل الذى كان بالجدول المبدئي ليتضمن هذه التعديلات . وستتضمن هذه الخطوة مايأتي :

١- اضافة ٥٠ وحدة الى الخلية التى تم اختيارها للنقل عبرها (ال) .

٢- خصم واضافة ذات الكمية (٥٠) الى الخلايا الواقعة على مسار سلسلة الزوائد والنواقص . بمعنى عندما نجد ان اشارة الخلية موجبة يتم اضافة ٥٠ وحدة بالاضافة الى الكمية الموجودة بها ، وعندما نجد ان اشارة الخلية موجبة يتم اضافة ٥٠ وحدة بالاضافة الى الكمية الموجودة بها ، وعندما نجد ان الخلية بها اشارة سالبة تخصم من الكمية الموجودة بها خمسون وحدة .

٣- الكميات الموجودة بخلايا غير واقعة على سلسلة الزوائد والنواقص لايلحقها اي تعديل بل تنقل كما هي بالجدول الجديد .

وفيما يلى الجدول الثاني للحل بعد اجراء كافة خطوات تحسين الحل السابقة :

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦ − ٦٠	١٢ + ٤٠	٤	٣ ٥٠	١٥٠
ب	٨	١٥ − ٩٠	٧ + ٣٠	٨	١٢٠
جـ	٣ +	١١	٢ − ٨٠	٥	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠

وبناء على تعديل نمط النقل الذى يظهر بالجدول الثاني للحل فان تكاليف النقل الكلية طبقا للجدول الثاني للحل تحسب كالآتي :

تكاليف النقل الكلية = ٦x٦٠+١٢x٤٠+٣x٥٠+١٥x٩٠+٧x٣٠+٢x٨٠

= ٢٧١٠ جنيه ٠

وبمقارنة تلك التكلفة بتكلفة الجدول المبدئي الذى تم اعداده بطريقة الركن الشمالى الشرقي نجد أن تكلفة الجدول الثاني تقل عن تكلفة الجدول المبدئي بمقدار ٢٠٠ جنيه (٢٩١٠-٢٧١٠) ،أي ان تحسين الحل واعادة نمط الشحن ادى الى انخفاض فى التكلفة بمقدار ٢٠٠ جنيه ،وطبعا هذا التخفيض كان متوقعا ،حيث انه سيتم نقل ٥٠ وحدة الى الخلية (أل) ، وقد تبين من اختبار المثالية ان كل وحدة يتم نقلها عبر تلك الخلية تعمل على تخفيض فى التكلفة مقداره ٤ جنيه ، اذن التخفيض الكلي = ٥٠وحدة x ٤جنيه = ٢٠٠ جنيه ٠

<u>اختبار مثالية الحل بالجدول الثاني</u> :

بعد التوصل الى الجدول الثاني للحل يبقى السؤال مطروحا ٠ هل الجدول الثاني يقدم الحل الامثل أم يحتاج الى تحسين ؟ وهذا يتطلب اختبار مثالية الحل الذى يقدمه الجدول الثاني ، ويتم ذلك باتباع الاسلوب السابق توضيحه ، وفيما يلى تقييم اثر شغل كل خلية من الخلايا غير الاساسية (الفارغة) التى ظهرت بالجدول الثاني ٠

<u>الخلية آع</u> :

المسار : من (آص) الى (ب ص) الى (ب ع) الى (آع)

صافى التغير فى التكلفة = -٧+١٥-١٢+٤ = صفر جنيه

<u>الخلية ب س</u>:

المسار: من (ب ص) الى (أص) الى (آس) الى (ب س)

صافى التغير فىالتكلفة = -١٥+١٢ - ٦+٨ = - ١ جنيه

الخلية ب ل :

المسار : من (أل) الى (أص) الى (ب ص) الى (ب ل)
صافى التغير فى التكلفة = -٣ + ١٢ -١٢- ١٥ + ٨ = ٢ جنيه

الخلية جـ س :

المسار: من (جـ ع)الى (ب ع) الى (ب ص)الى (أص) الى (أس) الى (جـ س) .
صافى التغير فى التكلفة= -٢+٧- ١٥+١٢ - ٦+٣= - ١ جنيه .

الخلية جـ ص :

المسار: من (جـ ع) الى (ب ع) الى (ب ص) الى (جـ ص)
صافى التغير فى التكلفة= -٢+٧ - ١٥ + ١١ = ١ جنيه

الخلية جـ ل :

المسار: من (أل) الى (أص) الى (ب ص)الى (ب ع) الى (جـ ع) الى (جـ ل) .
صافي التغير في التكلفة = ـ ٣+١٢ـ١٥+٧ـ٢+٥=٤ جنيه

وباستعراض قيم صافى التغير فى التكلفة للخلايا الستة التى تم تقييمها يتبين ان هناك خليتين لهما قيمة صافى تغير سالبة وهذا يعنى ان الجدول الثاني غير آمثل ويحتاج الى تحسين .

تحسين الحل :

١- اختيار المتغير الداخل . وسنجد ان كلا من الخليتين ذات صافى التغير السالب مرشحتان للدخول .ويمكن الاختيار الجزافى بينهما ،او يمكن اختيار الخلية التي يمكن ان يتم نقل كمية اكبر اليها وهذا يتضح من الخطوة التالية .

٢- اذا تم اختيار الخلية (ب س) كمتغير داخل ستكون اقصى كمية يمكن ان تنقل عبرها هي ٦٠ وحدة ، اما اذا تم اختيار الخلية (حـ س) لتكون هي المتغير

الداخل فيمكن أن يتم نقل عدد ٦٠ وحدة أيضاً ، أى أنهما متساويان فى كل المعايير هنا يتم الاختيار الجزافى بينهما ، ولنختار الخلية (جـ س)

٣- تعديل نمط النقل بالجدول الثانى وفقاً للتغيرات التى استلزمها تحسين الحل ، وعلى ذلك سيظهر الجدول الثالث بالشكل التالى:

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	(٦)	(١٢) ١٠٠	(٤)	(٣) ٥٠	١٥٠
ب	(٨)	(١٥) ٣٠	(٧) ٩٠	(٨)	١٢٠
جـ	(٣) ٦٠	(١١)	(٢) ٢٠	(٥)	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠

وتبلغ تكاليف النقل الكلية للجدول التالى = ١٠٠×١٢ + ٥٠×٣ + ٣٠×١٥ + ٩٠×٧ + ٦٠×٣ + ٢٠×٢ = ٢٦٥٠ جنيه

ومرة أخرى نعود لاختبار مثالية الحل الذى يقدمه الجدول الثالث.

الخلية (أس) :

المسار : من (أص) إلى (ب ص) إلى (ب ع) إلى (جـ ع) إلى (جـ س) إلى (أ س)

صافى التغير فى التكلفة = -١٢ +١٥ -٧ +٢ -٣ +٦ = ١ جنيه

الخلية (أ ع) :

المسار : من (أص) إلى (ب ص) إلى (ب ع) إلى (أ ع)

صافى التغير فى التكلفة = -١٢ +١٥ -٧ +٤ = صفر جنيه

الخلية (ب س) :

المسار : من (ب ع) إلى (جـ ع) إلى (جـ س) إلى (ب س)

صافى التغير فى التكلفة = -٧ +٢ -٣ +٨ = صفر جنيه

الخلية (ب ل) :

المسار : من (أ ل) إلى (أ ص) إلى (ب ص) إلى (ب ل)

صافى التغير فى التكلفة =-٣+١٢-١٥+٨=٢ جنيه

الخلية (ج ص) :

المسار : من (جـ ع) إلى (ب ع) إلى (ب ص) إلى (جـ ص)

صافى التغير فى التكلفة =-٢+٧-١٥+١١=١ جنيه

الخلية (ج ل) :

المسار : من (أ ل) إلى (أ ص) إلى (ب ص) إلى (ب ع) إلى(جـ ع) إلى (جـ ل)

صافى التغير فى التكلفة =-٣+١٢-١٥+٧-٢+٥=٤ جنيه

ومن هنا يتبين أن جدول الحل الثالث هو الجدول الأمثل حيث أن قيمة صافى التغير لجميع الخلايا الفارغة إما صفرية أو موجبة .

طريقة التوزيع المعدل لاختبار المثالية

بالاضافة إلى الطريقة الأولى التى استخدمناها فى اختبار المثالية وهى طريقة نقطة الارتكاز (حجر الوطء)، توجد طريقة ثانية لاجراء هذا الاختبار مبنية على استخدام المتغيرات الثنائية Daul variables يطلق عليها طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution Method واختصاراً تعرف باسم (MODI)، وهى بالمقارنة بطريقة نقطة الارتكاز تعتبر أسهل وأكفأ ومنطقية لاختبار مثالية أى حل ممكن لمشكلة النقل. إذ يمكن باستخدامها اجراء اختبار المثالية دون الحاجة إلى رسم مسارات محور الارتكاز، من ناحية أخرى فإن قيود الثنائية لمشكلة النقل تتصف بأن لها تكوين خاص يتيح اجراء اختبار المثالية بسهولة وسرعة .

وقد يكون من المفيد للقارئ أن يقف على الأساس المنطقى العلمى لهذه الطريقة قبل أن ندخل فى استخدامها فى التطبيق الفعلى خاصة وأنه قد سبق أن تعرضنا فى الفصل الثالث من هذا الكتاب إلى مفهوم الثنائية فى البرامج الخطية، ومن ثم سيكون تناول المنطق

العلمى لهذه الطريقة قد سبقه فهم كاف للأساس الرياضى الذى تبنى عليه.

ولتوضيح مغزى ومفهوم طريقة التوزيع المعدل سنستعرض أولاً الصياغة الأولية، والصياغة الثنائية لمشكلة النقل الواردة بالمثال الذى نتعامل معه فى هذا الجزء .

سبق القول فى الفصل الثالث أنه يوجد لكل قيد فى المشكلة الأولية متغير ثنائى يقابله فى المشكلة الثنائية . لذلك يكون من الافضل قبل الدخول فى تفصيلات هذه الطريقة أن نحدد قيود المشكلة والرموز التى سنستخدمها للتعبير عن المتغيرات الثنائية لها .

إن قيود المشكلة الأولية بمشكلة النقل تنقسم إلى نوعين من القيود (راجع الصياغة الرياضية لمشكلة النقل كنوع من مشاكل البرمجة الخطية بمقدمة هذا الفصل) :

النوع الأول : وهو الذى يتعلق بطاقة التوريد أو الانتاج لكل مصنع (العمود الاخير)

النوع الثانى : يتعلق باحتياجات الطلب عند كل مخزن توزيع (الصف الاخير) وحيث أن هذا التقسيم سيظل أيضاً هو التقسيم المتبع عند إعداد الصياغة الثنائية لذلك فإننا سنستخدم الرمز (م و) كمتغير ثنائى يقابل المصنع (و) ، والرمز (ن ط) كمتغير ثنائى يقابل المخزن (ط) .

وحيث أن القيد الثنائى يقابل متغير قرارى فى المشكلة الأولية (والمتغير القرارى فى مشكلة النقل هو طريق النقل أو الخلايا)، اذن يمكن القول أن كل قيد فى الصياغة الثنائية يقابل خلية من خلايا المصفوفة ، أى يقابل طريق نقل معين ، ويكون الجانب الأيمن من القيد الثنائى عبارة عن مجموع المتغيرين الثنائيين (م و) والذى يمثل المصنع (و) ، (ن ط) والذى يمثل المخزن (ط)، أما الجانب الأيسر للقيد (ثابت القيد) فإنه يمثل تكلفة النقل للوحدة من المصنع إلى المخزن

والتى يمكن أن نرمز لها بالرمز (ت وط) ، ولذلك فإن قيود الثنائية ستأخذ الشكل التالى :

م و + ن ط ≥ ت وط

وهذا القيد الثنائي بهذا الشكل يعنى أن الايراد الحدى الناتج من عملية النقل من المصنع و (م و) ، مضافاً اليه الايراد الحدى الناتج من عملية النقل إلى المخزن ط (ن ط) أقل من أو يساوى تكلفة النقل للوحدة من المصنع (و) إلى المخزن (ط) (ت و ط) .

ويتعين أن نلاحظ خاصية هامة ، وهى أنه عند أى حل ممكن للمشكلة الأولية (الاصلية) سنجد أن الفروق بين الجانب الايمن والجانب الايسر لقيود المشكلة الثنائية تعادل تماماً قيم صافى التغير للمتغيرات الأولية ، وحيث أن قيم صافى التغير للمتغيرات الاساسية تكون دائما مساوية للصفر، لذلك سنجد أن الجانب الايمن والجانب الايسر لكل قيد ثنائي يقابل متغيراً أساسياً متعادلان ومتساويان ، وعلى ذلك إذا كان الحل يتضمن عملية نقل من المصنع (و) إلى المخزن (ط) [أى أنه يمثل متغيراً أساسياً] ، ومن ثم أخذت المتباينة الثنائية لها الصياغة التالية :

م و + ن ط ≥ ت وط

فانها تصبح معادلة متعادلة الطرفين بسبب أن ذلك القيد الثنائي يقابل متغير اساسى اى خلية مشغولة و تكون المعادلة كالآتى:

م و + ن ط = ت و ط

وهذا الوضع مهم جداً لأنه يسمح لنا مباشرة بايجاد قيم المتغيرات الثنائية .

وفى المقابل لا يمكن معادلة جانبى القيد الثنائى لخلية غير مشغولة لأنها تعتبر متغير غير أساسى وقيمة صافى التغير لها لا تكون مساوية للصفر .

خلاصة ما تقدم أن القيد الثنائى للخلايا المشغولة يتحول إلى معادلة تلقائية لأن صافى التغير لتلك الخلية = صفر ، أما القيد الثنائى

للخلايا الفارغة (المتغيرات غير الاساسية) تستمر متباينة ويكون الفرق بين جانبيها يمثل صافى التغير لها. وفيما يلى الصياغة الرياضية لمشكلة النقل التى وردت بالمثال الأصلى ، وسنورد هذه الصياغة بشكليها أى الصياغة الأولية ، والصياغة الثنائية

أولاً : الصياغة الأولية للمشكلة :

الهدف : تخفيض ٦أس + ١٢أص + ٤أع + ٣أ ل + ٨ب س + ١٥ ب ص + ٧ب ع + ٨ ب ل + ٣جـس + ١١ جـص + ٢جـص + ٢ جـ ع + ٥ جـ ل

بشرط أن :

أ س + أص + أ ع + أ ل ≥ ١٥٠ (طاقة المصنع أ)

ب س + ب ص + ب ع + ب ل ≥ ١٢٠ (طاقة المصنع ب)

جـ س + جـص + جـ ع + جـ ل ≥ ٨٠ (طاقة المصنع جـ)

أ س + ب س + جـ س ≥ ٦٠ (احتياجات المخزن س)

أص + ب ص + جـص ≥ ١٣٠ (أحتياجات المخزن ص)

أ ع + ب ع + جـ ع ≥ ١١٠ (احتاجات المخزن ع)

أ ل + ب ل + جـ ل ≥ ٥٠ (احتياجات المخزن ل)

جميع المتغيرات ≤ صفر (شرط عدم السلبية) .

ثانياً : الصياغة الثنائية للمشكلة : (م المصنع ، ن المخزن)

الهدف : تعظيم ١٥٠ م١ + ١٢٠ م ٢ + ٨٠ م ٣ + ٦٠ ن ١ + ١٣٠ ن ٢ + ١١٠ ن ٣ + ٥٠ ن٤

بشرط أن :

م ١ + ن١ ≥ ٦ (أ ←— س)

م ١ + ن٢ ≥ ١٢ (أ ←— ص)

م ١ + ن٣ ≥ ٤ (أ ←— ع)

م ١ + ن٤ ≥ ٣ (أ ←— ل)

م٢ + ن١ ≥ ٨ (ب ←— س)

م٢ + ن٢ ≥ ١٥ (ب ←— ص)

م٢ + ن٣ ≥ ٧ (ب ←— ع)

م٢+ن٤ ≥ ٨ (ب ——> ل)

م٣+ن١ ≥ ٣ (جـ ——> س)

م٣+ن٢ ≥ ١١ (جـ ——> ص)

م٣+ن٣ ≥ ٢ (جـ ——> ع)

م٣+ن٤ ≥ ٥ (جـ ——> ل)

وفيما يلى شرح توضيحى لكيفية اختبار المثالية بطريقة التوزيع المعدل بالتطبيق على الجدول المبدئى لمشكلة النقل للمثال الذى طرحناه فى مقدمة هذا الفصل ، وفيما يلى نعيد تصوير ذلك الجدول المبدئى والذى تم اعداده بطريقة الركن الشمالى الشرقى لنرى كيف يمكن تطبيق اختبار المثالية عليه وفقاً لهذه الطريقة .

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦ / ٦٠	١٢ / ٩٠	٤	٣	١٥٠
ب	٨	١٥ / ٤٠	٧ / ٨٠	٨	١٢٠
جـ	٣	١١	٢ / ٣٠	٥ / ٥٠	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠

ويتبين من هذا الجدول المبدئى انه سيتم وفقاً له الشحن عبر ستة طرق ، أى أن هذا الجدول المبدئى يحتوى على ستة متغيرات اساسية (الخلايا المشغولة) ، والقيود الثنائية المقابلة لتلك المتغيرات الأولية الأساسية هى : (يلاحظ أن تلك القيود أخذت صورة معادلات متساوية الجانبين بسبب ما ذكرناه من أن قيم صافى التغير لتلك المتغيرات الاساسية تساوى صفر) .

م ١ + ن ١ = ٦ (أ ——> س)

م ١ + ن ٢ = ١٢ (أ ——> ص)

م ٢ + ن ٢ = ١٥ (ب ——> ص)

م ٢ + ن ٣ = ٧ (ب ——————> ع)

م ٣ + ن ٣ = ٢ (جـ ——————> ع)

م ٣ + ن ٤ = ٥ (جـ ——————> ل)

ويمكن أن نلحظ من هذه المعادلات أن عددها ستة معادلات وتحتوى على سبعة متغيرات مجهولة القيمة هى (م ١ ، م ٢ ، م٣ ، ن١ ، ن٢ ، ن٣ ، ن٤) ، وحتى يمكن ايجاد قيم تلك المتغيرات الثنائية يتطلب الامر تحديد قيمة إحدى هذه القيم المجهولة اذ يصبح بعدها من السهل ا الحصول على قيم المتغيرات الستة الأخرى ، وهذا يعنى أنه لابد من إفتراض قيمة اختيارية لمتغير واحد من تلك المتغيرات السبعة المجهولة القيمة ، عندئذ يكون هناك تساوى بين عدد المعادلات وعدد المتغيرات المجهولة القيمة الامرالذى يمكننا من ايجاد هذه القيم ، ولذلك يمكن اختيار أحد المتغيرات الثنائية السبعة وإعطائه تحكمياً قيمة صفرية (وذلك بصرف النظر عن ذلك المتغير الثنائى الذى سيتم اختياره) .

وبفرض أننا أخترنا أن يكون قيد طاقة المصنع الأول (م ١) = صفر،عندئذ يمكن إيجاد قيم المتغيرات الثنائية الستة المجهولة كالآتى :

من المعادلة الأولى (م ١ +ن١ = ٦) ستكون قيمة ن ١ = ٦

ومن المعادلة الثانية (م١ + ن٢ =١٢) ستكون قيمة ن ٢ = ١٢

ومن المعادلة الثالثة (م٢ +ن٢ = ١٥) ستكون قيمة م ٢ = ٣

ومن المعادلة الرابعة (م٢ + ن ٣ = ٧) ستكون قيمة ن ٣ = ٤

ومن المعادلة الخامسة (م ٣ +ن٣ =٢) ستكون قيمة م ٣ = -٢

ومن المعادلة السادسة (م ٣ + ن ٤ = ٥) ستكون قيمة ن ٤ = ٧

ويمكن إيجاد هذه القيم بصورة عملية مبسطة ومرتبة – وأن كانت تقوم على نفس الاساس– أثناء جولات الحل وبدلاً من انفصالها عنها كالاتى :

١– طالما اخترنا أن يكون قيد طاقة المصنع الأول = صفر ، إذن يتم أمام صف المصنع الأول وعلى يسار المصفوفة وتحت صف جديد يكون

عنوانه تكلفة الصف وضع القيمة صفر .

٢- يتم إضافة صف جديد اسفل المصفوفة ويكون عنوانه تكلفة العمود .

٣- لايجاد قيم تكاليف الصفوف والاعمدة(المتغيرات الثنائية) نطبق المعادلة التالية :

تكلفة النقل بالخلية المشغولة = تكلفة صف تلك الخلية + تكلفة عمود تلك الخلية = مجموع تكلفتى صفها وعمودها

وفيما يلى نوضح كيف يمكن ايجاد هذه القيم :

- نبدأ بأول خلية بالصف الأول فإذا كانت مشغولة نطبق عليها المعادلة السابقة وفعلاً سنجدها مشغولة وبتطبيق المعادلة عليها ينتج الآتى :

٦(تكلفة النقل بتلك الخلية) = تكلفة صفها + تكلفة عمودها

٦ = صفر + تكلفة عمودها

٦ = تكلفة عمودها

إذن نكتب أسفل العمود س أمام تكلفة العمود القيمة ٦ وهى نفس القيمة التى حصلنا عليها للمتغير الثنائى ن ١ .

- تم نتحرك للخلية التالية بالصف الاول فنجدها مشغولة فنطبق عليها المعادلة وتكون العمليات الحسابية كالاتى :

(الخلية أ ص) ١٢ (تكلفة النقل بالخلية) = صفر + تكلفة عمودها

١٢ = تكلفة عمودها

إذن تكلفة العمود الثانى = ١٢ ونكتبها أسفل العمود الثانى ، ونلاحظ أيضاً أنها نفس القيمة للمتغير الثنائى ن ٢

- ثم نتحرك فى نفس الصف الأول سنجد أن باقى الخلايا بذلك الصف فارغة إذن نتركها وننتقل إلى الصف الثانى فنجد أن أول خلية به فارغة نتركها أيضاً، بعد ذلك نجد أن الخليلة التالية (ب ص) مشغولة إذن نطبق المعادلة عليها (الخلية ب ص) ١٥ (تكلفة النقل بالخلية = تكلفة صفها+ ١٢ (سبق الحصول عليها)

إذن تكلفة الصف الثانى = ٣

- وهكذا حتى يتم استكمال باقى تكاليف الصفوف والاعمدة ، ويظهر ذلك من خلال التعديلات التى أجريناها على الجدول المبدئى والذى يظهر على الشكل التالى :

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٦ ‏/ ٦٠	١٢ ‏/ ٩٠	٤ ‏/ (صفر)	٣ ‏/ (-٤)	١٥٠	صفر
ب	٨ ‏/ (-١)	١٥ ‏/ ٤٠	٧ ‏/ ٨٠	٨ ‏/ (-٢)	١٢٠	٣
جـ	٣ ‏/ (-١)	١١ ‏/ (١)	٢ ‏/ ٣٠	٥ ‏/ ٥٠	٨٠	-٢
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠	
تكلفة العمود	٦	١٢	٤	٧		

٤- يمكن الحصول على قيمة صافى التغير للخلايا الفارغة بفرض اختبار مثاليتها من المعادلة التالية :

قيمة صافى التغير للخلية الفارغة = تكلفة النقل بتلك الخلية - (تكلفة صفها + تكلفة عمودها) .

وفيما يلى نقوم بتطبيق هذه المعادلة للحصول على قيم صافى التغير للخلايا الفارغة بالجدول المبدئى ، وبعد حسابها يتم تسجيلها داخل الخلية موضوعة فى دائرة لتميزها عن الكميات المنقولة بالخلايا المشغولة :

صافى التغير للخلية أ ع = ٤ - (صفر + ٤) = صفر

صافى التغير للخلية أ ل = ٣ - (صفر + ٧) = -٤

صافى التغير للخلية ب س = ٨ - (٣ + ٦) = -١

صافى التغير للخلية ب ل = ٨ - (٣ + ٧) = -٢

صافى التغير للخلية جـ س = ٣ - (-٢ + ٦) = -١

صافى التغير للخلية جـص = ١١- (-٢ + ١٢) = ١

ولو قارنا تلك النتائج بما سبق أن وصلنا اليه من حساب صافى التغير فى التكلفة بطريقة نقطة الارتكاز سنجد أنهما متطابقتان تماماً ، ولذلك فإن قاعدة اختبار المثالية ستكون هى نفسها التى اتبعت فى طريقة نقطة الارتكاز ، أى إذا اتضح أن هناك قيم صافى تغير سالبة لأى خلية من الخلايا الفارغة يكون الحل غير أمثل ويحتاج إلى تحسين، وبتطبيق تلك القاعدة على الخلايا الفارغة بالجدول المبدئى السابق يتضح أن هناك أربعة خلايا منها لها قيم صافى تغير سالبة ،إذن الحل الموجود بالجدول المبدئى السابق يعتبر حل غير أمثل ويتعين العمل فى جولات تالية لتحسين هذا الحل .

ويجدر أن نلفت النظر هنا أن خطوات تحسين الحل هى نفسها التى اتبعناها فى الجزء السابق ، وبإتباع تلك الخطوات فإنه يمكن تحسين جدول الحل الحالى كالآتى :

تحسين الحل :

١- تعيين المتغير الداخل ، وهى الخلية ذات أكبر قيمة باشارة سالبة من قيم صافى التغير أى أنها الخلية (أ ل) .

٢- تحديد أقصى كمية يمكن نقلها بتلك الخلية ، ولهذا الغرض يتم كتابة سلسلة الاشارات (+ ، -) فى الخلايا التى تمثل خط السيرلتلك الخلية [من (أ ص) إلى (ب ص) إلى (ب ع) إلى (جـ ع) إلى(جـ ل) إلى(أ ل)] ، وتحديد أقل كمية من الكميات الموجودة بالخلايا التى وضعت بها الاشارة السالبة ، وسنجد أن تلك الكمية هى خمسون وحدة .

٣- تعديل نمط الشحن بالجدول المبدئى بوضع خمسون وحدة بخلية المتغير الداخل (أ ل) ، ثم اضافة نفس الكمية أو خصمها من الكميات الموجودة بخط السير وفقا للاشارة الموضوعة بتلك الخلايا، و أن تبقى الكميات التى توجد بعيداً عن خط السير على ماهى عليه .

وبعد اجراء هذه الخطوات يتم تصوير جدول تحسين الحل وحساب تكلفته واختبار مثاليته باضافة عمود إضافى وصف إضافى لحساب تكلفة الصف وتكلفة العمود تمهيداً لتحديد قيمة صافى التغير للخلايا الفارغة .

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٦ / ٦٠	١٢ / ٤٠	٤ / (صفر)	٣ / ٥٠	١٥٠	صفر
ب	٨ / (١-)	١٥ / ٩٠	٧ / ٣٠	٨ / (٢)	١٢٠	٣
جـ	٣ / (١-)	١١ / (١)	٢ / ٨٠	٥ / (٤)	٨٠	٢-
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠	
تكلفة العمود	٦	١٢	٤	٣		

ويتضح أيضاً أن هذا الجدول لايمثل الحل الأمثل ، لذا يتم تحسينه وفق الخطوات السابقة، وفيما يلى جدول تحسين الحل :

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٦ / (١)	١٢ / ١٠٠	٤ / (صفر)	٣ / ٥٠	١٥٠	صفر
ب	٨ / (صفر)	١٥ / ٣٠	٧ / ٩٠	٨ / (٢)	١٢٠	٣
جـ	٣ / ٦٠	١١ / (١)	٢ / ٢٠	٥ / (٤)	٨٠	٢-
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠	
تكلفة العمود	٥	١٢	٤	٣		

وبتفحص قيم صافى التغير للخلايا الفارغة بالجدول الثالث يتبين أنها جميعاً إما موجبة أو صفرية ، وهذا يعنى أن الجدول الثالث يمثل الحل الامثل وتكون تكلفة النقل فى هذا الجدول هى :

اجمالى تكلفة النقل = ١٠٠ × ١٢ + ٥٠×٣+٣٠×١٥ + ٩٠×٧ + ٦٠ × ٣ + ٢٠×٢ = ٢٦٥٠ جنيه.

وبمقارنة جدول الحل الامثل واجمالى تكلفته بالجدول الامثل السابق التوصل اليه بطريقة نقطة الارتكاز نجد أنهما متطابقان من حيث نمط الشحن وتكلفة النقل .

مثال محلول :

فيما يلى الجدول المبدئى لمشكلة نقل وقد تم اعداده بطريقة فوجل التقريبية والمطلوب اختبار مثاليته مستخدماً :

١- طريقة محور الارتكاز .

٢- طريقة التوزيع المعدل.

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦	١٢ / ١٠	٤ / ٩٠	٣ / ٥٠	١٥٠
ب	٨	١٥ / ١٢٠	٧	٨	١٢٠
جـ	٣ / ٦٠	١١	٢ / ٢٠	٥	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠

الحل :

أولاً : إستخدام طريقة محور الارتكاز فى اختبار مثالية الجدول السابق :

وفقاً لطريقة محور الارتكاز يتم تقييم أثر شغل كل خلية من

الخلايا الفارغة ويتم ذلك على خطوتين ، الأولى تحديد مسار الخلية ، والثانية حساب صافى التغير فى التكلفة . وفيما يلى تطبيق لهاتين الخطوتين على الخلايا الفارغة كالاتى :

الخلية (أ س) :

المسار : من (أ ع) إلى (جـ ع) إلى (جـ س) إلى (أ س)

صافى التغير فى التكلفة = -٤ +٢-٣+٦ = ١ جنيه

الخلية (ب س) :

المسار : من (جـ س) إلى (جـ ع) إلى (أ ع) إلى (أ ص) إلى (ب ص) إلى (ب س)

صافى التغير فى التكلفة =-٣ + ٢ -٤+ ١٢ -١٥ + ٨ = صفر جنيه

الخلية (ب ع) :

المسار : من (أ ع) إلى (أ ص) إلى (ب ص) إلى (ب ع)

صافى التغير فى التكلفة = -٤ + ١٢ -١٥ + ٧ = صفر جنيه

الخلية (ب ل) :

المسار : من (أ ل) إلى (أ ص) إلى (ب ص) إلى (ب ل)

صافى التغير فى التكلفة = -٣ +١٢ -١٥ + ٨ = ٢ جنيه

الخلية (جـ ص) :

المسار : من (جـ ع) إلى (أ ع) إلى (أ ص) إلى (جـ ص)

صافى التغير فى التكلفة = -٢ +٤ -١٢ + ١١ = ١ جنيه

الخلية (جـ ل) :

المسار : من (أ ل) إلى (أ ع)إلى (جـ ع) إلى (جـ ل)

صافى التغير فى التكلفة = -٣+٤ -٢+٥ = ٤ جنيه

وحيث أن كل قيم صافى التغير فى التكلفة لجميع الخلايا الفارغة إما موجبة أو صفرية ، إذن يمكن القول أن الحل المبدئى الذى تم ايجاده باستخدام طريقة فوجل التقريبية هو الحل الامثل . ولعله من المناسب قبل أن نترك هذه النقطة أن نؤكد مرة أخرى على أن طريقة فوجل تعمل دائماً على تقريب الحل المبدئى من الحل الأمثل بعكس الحال

مع طريقة الركن الشمالى الشرقى ، إذ تبين عند اختبار مثالية الحل المبدئى الذى توصلنا اليه باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى أنه حل غير أمثل واحتاج إلى جولتين لتحسين الحل.

ثانياً : اختبار مثالية الحل باستخدام طريقة التوزيع المعدل :

سيتم اختبار المثالية وفق هذه الطريقة بتطبيق الخطوات التالية .

١- اعادة كتابة مصفوفة الجدول المبدئى بعد اضافة عمود جديد على يسارها عنوانه تكلفة الصف ، كذلك اضافة صف جديد اسفلها بعنوان تكلفة العمود .

٢- وضع القيمة (صفر) أمام أول صف فى العمود الجديد كتكلفة للصف الاول . ثم يتم إيجاد باقى قيم تكلفة الصفوف وكذلك قيم تكلفة الاعمدة من خلال تطبيق المعادلة التالية :

تكلفة النقل بالخلية المشغولة = مجموع تكلفتى صفها وعمودها .

فمثلاً الخلية أ ص مشغولة وتكلفة النقل بها ١٢ جنيه وتكلفة صفها صفر إذن تكلفة عمودها = ١٢

١٢= صفر + تكلفة عمودها

∴ تكلفة العمود الثانى = ١٢ وهكذا لباقى الخلايا المشغولة

٣- حساب قيمة صافى التغير للخلية الفارغة ، ويتم ذلك بتطبيق المعادلة :

صافى التغير للخلية الفارغة = تكلفة النقل بتلك الخيلة – (مجموع تكلفتى صفها وعمودها) فمثلاً صافى التغير للخلية الفارغة أ س = ٦ – (صفر + ٥) = ١

وهكذا بالنسبة لباقى الخلايا الفارغة .

وفيما يلى الجدول المبدئى بعد اعداد العمليات الحسابية السابقة:

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٦ (١)	١٢ ١٠	٤ ٩٠	٣ ٥٠	١٥٠	صفر
ب	٨ (صفر)	١٥ ١٢٠	٧ (صفر)	٨ (٢)	١٢٠	٣
جـ	٣ ٦٠	١١ (١)	٢ ٢٠	٥ (٤)	٨٠	٢ـ
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠	
تكلفة العمود	٥	١٢	٤	٣		

ويتضح من الجدول السابق أن قيم صافى التغير للخلايا الفارغة كلها قيم موجبة أو صفرية وهذا يعنى أن هذا الجدول يمثل الحل الامثل ولايحتاج الأمر لتحسينه .

حالات خاصة لمشاكل النقل

عند حل مشكلة النقل قد تواجهنا بعض الحالات الخاصة التى تحتاج إلى إجراء عمل تحوير ما على طريقة وخطوات الحل لتتناسب مع طبيعة الحالة الخاصة ، والجزء التالى سيتناول بعض التعقيدات التى قد تنشأ عن حل مشكلة النقل ، وهذه الحالات إجمالاً هى :

أولاً : حالة تعدد الحلول المثلى .

ثانيـاً : مشكلة الحل المنتكس.

ثالثـاً : مشكلة النقل ذات هدف التعظيم .

رابعـاً : حالة عدم توازن العرض الكلى مع الطلب الكلى .

خامساً : حالة الطرق الممنوع النقل عليها .

وفيما يلى مناقشة تفصيلية لكيفية معالجة والتعامل مع كل واحدة من الحالات السابقة :

أولا: حالة تعدد الحلول المثلى: Multiple Optimal Solutions

كما سبق و أوضحنا فى الفصل الثانى أنه قد يحدث تعدد فى الحلول المثلى لمشاكل البرمجة الخطية ، كذلك فإنه قد يكون هناك أكثرمن حل واحد أمثل لمشكلة النقل ، ويمكن التعرف على وجود أكثر من حل واحد أمثل لمشكلة النقل عندما تظهر خلايا غير اساسية (طرق غير مستغلة) لها قيمة صافى تغير مساوية للصفر ، لأن هذا يعنى أنه يمكن التوصل إلى حل أمثل آخر باختيار ذلك الطريق غير الرئيس كمتغير داخل ، والدخول فى جولة تالية لتحسين الحل ، نصل منها إلى حل أمثل جديد ، ولكن نذكر هنا أن كافة الحلول المثلى المتعددة لذات المشكلة سيكون لها جميعاً نفس قيمة دالة الهدف والا فلا يمكن وصفها بأنها حالة لها تعدد فى الحلول المثلى .

ولتوضيح ذلك تطبيقياً وعملياً ، نتناول فيما يلى الجدول المبدئى السابق مباشرة والذى تم اعداده بطريقة فوجل التقريبية والذى يظهر على الشكل التالى (والذى يظهر فيه قيم صافى التغير للخلايا الفارغة فى دوائر) .

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	[٦] (١)	[١٢] ١٠	[٤] ٩٠	[٣] ٥٠	١٥٠
ب	[٨] (صفر)	[١٥] ١٢٠	[٧] (صفر)	[٨] (٢)	١٢٠
جـ	[٣] ٦٠	[١١] (١)	[٢] ٢٠	[٥] (٤)	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠

ويتضح من هذا الجدول أنه يمثل الحل الأمثل حيث أن قيم صافى التغير للخلايا الفارغة كلها قيم موجبة أو صفرية . إلا إننا نستطيع الدخول فى جولات تالية للحل ليس بغرض تحسينه فهو حل أمثل

ولكنه للوصول منه إلى حلول مثلى أخرى ، فسنجد مثلاً أن قيمة صافي التغير للخلية (ب س) تساوى صفر ، وهذا يعنى أنه إذا تم شغل تلك الخلية والنقل عليها فإن تكلفة الحل ستزيد بمقدار صفر ، أى لن تزيد تكلفة الحل ، وطالما سيتغير نمط الشحن مع زيادة في التكلفة ، إذن يعتبر النمط الجديد للشحن بمثابة حل أمثل آخر، ونفس الشيء للخلية (ب ع) . وفيما يلى سنوضح كيف يمكن الحصول على حل أمثل آخر باختيار الخلية (ب س) كمتغير داخل والدخول في جولة تالية للحل نصل منها إلى حل أمثل جديد.

باختيار الخلية (ب س)كمتغير داخل جديد ، إذن يتعين تحديد أقصى كمية يمكن شحنها عبر تلك الخلية ، وهذا يتحدد عن طريق تحديد المسار إلى تلك الخلية ، ان المسار لتلك الخلية هو : - (جـ س) ، + (جـ ع) ، - (أ ع) ، + (أص) ، - (ب ص) ، + (ب س) وحيث أن أقل كمية في الخلايا ذات الاشارة السالبة على ذلك المسار هى ٦٠ وحدة والموجودة بالخلية (جـ س) . إذن يتم نقل كمية مقدارها ٦٠ وحدة إلى الخلية (ب س) ، ثم يتم اعداد المصفوفة الجديدة وحساب التكلفة واختبار مثاليتها ، كما هو مبين من الجدول التالي :

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٦ (١)	١٢ ٧٠	٤ ٣٠	٣ ٥٠	١٥٠	صفر
ب	٨ ٦٠	١٥ ٦٠	٧ (صفر)	٨ (٢)	١٢٠	٣
جـ	٣ (١)	١١ (صفر)	٢ ٨٠	٥ (٣)	٨٠	١ -
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠	
تكلفة العمود	٥	١٢	٤	٣		

تكلفة الحل = ٧٠×١٢ + ٣٠×٤ + ٥٠×٣ + ٦٠×٨ + ٦٠×١٥ + ٨٠×٢ = ٢٦٥٠ جنيه،

وبذلك نكون قد وصلنا إلى حل أمثل ثانى بنفس التكلفة ، ويمكن أن نصل إلى حل أمثل ثالث إذا تم اختيار الخلية (ب ع) كمتغير داخل لأن لها قيمة صافى تغير صفرية ، كذلك يمكن ايجاد حل أمثل رابع باختيار الخلية (جـ ص) كمتغير داخل لذات السبب . أى أن مشكلة النقل التى نتعامل معها فى هذا المثال لها أكثر من حل أمثل.

إن وجود عدة حلول مثلى لنفس المشكلة يعتبر من المعلومات الغاية فى الاهمية لمتخذ القرار ، إذ سيكون لديه عدة حلول تعطيه مرونة كبيرة لاختيار الحل الأمثل الذى يتناسب مع الظروف المتغيرة ، فإذا تبين للادارة مثلاً وجود اصلاحات على الطريق (جـ س) لا تمكن الادارة من استخدامه لشحن كميات من المصنع (جـ) إلى المخزن (س) ، إذن يمكن للادارة أن تأخذ بالحل الأمثل الثانى الذى يتحاشى المرور عبر هذا الطريق . ولذلك يتعين أن تقف الادارة على الحل أو الحلول المثلى المتعددة لمشكلة النقل حتى تتخذ القرار ونمط النقل الذى يتواكب ويتلائم مع ما هو موجود وسائد من ظروف عند اتخاذ القرار ومواجهة أى تغيرات تحدث فى تلك الظروف .

ثانياً : مشكلة الحل المنتكس Degeneracy

سبق أن تناولنا فى الفصل الثانى من هذا الكتاب معنى الحل المعتل أو المنتكس ، وقد تبين أن ما نقصده بالحل المنتكس هو ذلك الحل الذى تكون فيه قيمة أحد المتغيرات الاساسية مساوية للصفر ، أى أنه يشترط لايجاد حل أساسى ممكن وغير منتكس أن يوجد فى الحل عدد من المتغيرات الموجبة (أكبر من الصفر)يتساوى مع عدد قيود المشكلة .

وفى مشاكل النقل يتعين أن تكون عدد المتغيرات الاساسية (الخلايا المشغولة) تعادل (عدد الاعمدة + عدد الصفوف -١) ، وعليه فإن الحل فى مشكلة النقل يعانى من مشكلة الانتكاس إذا كان عدد الخلايا المشغولة يقل عن هذا الحد ، ويعتبر الانتكاس أو الحل غير الاساسى بمثابة مشكلة تؤدى إلى نوع من التعقيد، إذ أن هذه الحالة تؤدى إلى تعذر تتابع مسار الحلقة المغلقة عند حساب قيم صافى التغير

للخلايا الفارغة (غير الاساسية) . ونود أن نشير هنا إلى أن هذه الحالة كثيرة الحدوث فى مشاكل النقل ، ولذلك فقد آثرنا ضرورة توضيح كيفية التعامل معها عند حدوثها . وقد يكون من المفيد أولاً أن نفسر السبب الذى يترتب عليه نشأة حالة الانتكاس فى مشاكل النقل .

الحقيقة إن مشكلة الانتكاس يتسبب في وجودها أحد وضعين هما :

١- تنشأ مشكلة الانتكاس بسبب أن يأخذ شغل الخلايا وفق طريقة الركن الشمالي الشرقى أحياناً اتجاهاً غير معتاد ، بمعنى أن خط السير عند شغل الخلايا لا يأخذ مساراً منكسراً قائم الزوايا بل قد يأخذ اتجاهاً قطرياً، هنا يكمن السبب فى ظهور مشكلة الانتكاس . ولتوضيح ذلك عملياً سنجرى تعديلاً بسيطاً على مثالنا السابق وذلك بأن نجعل طاقة المصنع (ب) أربعون وحدة فقط ، وطاقة المصنع (جـ) مائة وستون وحدة . ثم نرى ما يحدث عند ايجاد الجدول المبدئي الممكن باستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقى وهذا ما يوضحه الجدول التالى .

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	[٦] ٦٠	[١٢] ٩٠	[٤]	[٣]	١٥٠
ب	[٨]	[١٥] ٤٠	[٧] ؟	[٨]	٤٠
جـ	[٣]	[١١] ؟	[٢] ١١٠	[٥] ٥٠	١٦٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠

ويتضح من هذا الجدول أن مسار طريقة الركن الشمالي الشرقى قد أخذ مساراً فى اتجاه غير معتاد ، إذ بعد تخصيص عدد ٤٠ وحدة على

الخلية (ب ص) كان يتعين وفقاً للوضع الطبيعى أن نغادر تلك الخلية فى اتجاه افقى إلى المخزن التالى إذا كان قد تم استيفاء المخزن السابق (ص) ، أو نغادر الخلية فى اتجاه رأسى لأسفل إلى المصنع التالى إذا كان قد تم استيعاب كل طاقة المصنع (ب) ، أما فى الحالة التى أمامنا الآن فقد حدث الوضعين معاً فى وقت واحد ، أى تم استيفاء المخزن (ص) ، واستعياب كل طاقة المصنع (ب) ، إذن لن نتحرك أفقياً على يسار تلك الخلية ، ولن نتحرك أسفلها ، ومن ثم سنكون مضطرين إلى التحرك قطرياً إلى الخلية(جـ ع) مباشرة (أى خليط من الافقى والرأسى) وذلك للوصول إلى المخزن الجديد والمصنع الجديد ، ويتضح أن التخصيص سيسير بعد ذلك سيراً طبيعياً كما هو معتاد ، ونكون بذلك قد أعددنا جدول الحل الممكن ، وهو حل ممكن لأنه لا يتعارض مع قيود الطاقة أو قيود الاحتياجات ، ولكنه جدول منتكس ، لأن عدد الخلايا المشغولة به (٥ خلايا) فى حين أنه يتعين وفقاً لشروط الحل الاساسى أن تكون عدد المتغيرات الاساسية (الخلايا المشغولة) ستة خلايا(عدد الصفوف + عددالاعمدة -١) . إذن يمكن القول أنه برغم أن هذا الحل المبدئى يعتبر ممكناً Solution is Feasible ، إلا أنه حل منتكس Degenerate .

٢- قد تنشأ حالة الانتكاس بعد اجراء اختبار المثالية ثم تعديل نمط الشحن لتحسين الحل ، فقد يترتب على تعديل هذا النمط أن يتم اضافة خلية يتم النقل عليها باعتبارها متغير داخل وفى نفس الوقت يتم خروج متغيرين معاً مما يترتب عليه أن تكون عدد الخلايا الاساسية غير متوافقة مع شرط الحل الاساسى . ولتوضيح هذا الوضع نعيد جدول الحل المبدئى لذات المثال الذى نتعامل معه فى هذا الجزء مع اجراء تعديلات مقصودة بهدف التوضيح وهى تعديل طاقة المصنع (ب) لتصبح ٩٠ وحدة والمصنع (جـ) ليصبح ٨٠ وحدة ، كذلك جعل احتياجات المخزن (ع) ثمانون وحدة وفيما يلى الجدول المبدئى الممكن بعد اجراء هذا التعديل مع تضمينة كافة

الحسابات اللازمة لاختبار مثاليته:

المصنع / المخزن	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٦ / ٦٠	١٢ / ٩٠	٤ / (صفر)	٣ / (-٤)	١٥٠	صفر
ب	٨ / (-١)	١٥ / ٤٠	٧ / ٥٠	٨ / (-٢)	٩٠	٣
جـ	٣ / (-١)	١١ / (١)	٢ / ٣٠	٥ / ٥٠	٨٠	-٢
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	٨٠	٥٠	٣٢٠ / ٣٢٠	
تكلفة العمود	٦	١٢	٤	٧		

تكلفة الحل = ٦٠×٦ + ٩٠×١٢+٤٠×١٥+٥٠×٧+٣٠×٢+ ٥٠×٥= ٢٧٠٠ جنيه

ويتبين من هذا الجدول أنه حل مبدئى ممكن وأساسى ولكنه ليس حل أمثل لوجود قيم صافى تغير سالبة . لذا سيتم تحسين الحل ، واختيار الخلية (أ ل) متغير داخل ويتم شغلها بأقل كمية فى الخلايا السالبة بخط السير وهو [- (أ ص) ، + (ب ص) ، - (ب ع) ، + (جـ ع)، - (جـ ل) ، + (أ ل)] أى أن أقصى كمية هى خمسون وحدة (لاحظ أن تلك الكمية موجودة بخليتين أى تعدد فى المتغيرات المرشحة للخروج). وفيما يلى الجدول الثانى للحل:

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	[٦] ٦٠	[١٢] ٤٠	[٤]	[٣] ٥٠	١٥٠
ب	[٨]	[١٥] ٩٠	[٧]	[٨]	٩٠
جـ	[٣]	[١١]	[٢] ٨٠	[٥]	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	٨٠	٥٠	٣٢٠ / ٣٢٠

تكلفة الحل = ٦٠ × ٦ + ٤٠ × ١٢ + ٥٠ × ٣ + ٩٠ × ١٥ + ٨٠ × ٢ = ٢٥٠٠ جنيه.

ويتبين من هذا الجدول أنه أفضل من حيث التكلفة من الجدول المبدئي ، إلا أنه جدول حل غيرأساسي، اذ يتضح أن عدد الخلايا المشغوله أصبحت فقط خمسه خلايا وهذا يتعارض مع شرط الحل الاساسي (عدد الصفوف+عددالاعمدة ـ ١) .وهذا هو السبب الثاني الذي تنشأ عنه ظاهرة الانتكاس . إذ يدخل متغير واحد داخل إلى الحل ويخرج في الوقت نفسه متغيرين خارجين فتقل بذلك عدد الخلايا المشغولة (المتغيرات الاساسية) ويصبح الحل غير اساسي .

طريقة علاج مشكلة الحل المنتكس :

يمكن علاج حالة الانتكاس في مشاكل النقل باستخدام ما يمكن أن نطلق عليه استخدام التخصيص الوهمي (الاصطناعي) Using an Artificial Allocation ، وهذا يعني عمل تخصيص وهمي لعدد من الخلايا الاضافية لكسر حالة الانتكاس ، وهذا العدد المقترح اضافته كتخصيص وهمي يعادل الفرق بين العددالحالي من الخلايا الاساسية (المشغولة) وبين العدد المفروض توافره وفقاً لشرط الحل الاساسي (عدد الصفوف + عدد الاعمدة -١) ، على أن تعامل تلك الخلايا الاضافية على أنها ضمن الحل الاساسي وأن تكون كمية كل خلية منها صغيرة جداً

تصل إلى الصفر.

ونظراً لأن حالة الانتكاس بالمثال المعروض أمامنا الأن (سواء الحالة الأولى أو الثانية) يتطلب شغل خلية واحدة (وهميا) وجعلها ضمن الحل الاساسى ليستقيم الحل ، فإننا سنفترض أننا اخترنا الخلية (ب ع) لحالة الانتكاس التى نشأت بسبب الاتجاه غير المعتاد لطريقة الركن الشمالى الشرقى ، واعتبرناها مخصصة ومشغولة بكمية صغيرة جداً ويرمز لها بالرمز (ش) ، وبذلك يظهر جدول الحل المبدئى الممكن كحل أساسى على الشكل التالى :

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٦ / ٦٠	١٢ / ٩٠	٤ / (صفر)	٣ / (٤-)	١٥٠	صفر
ب	٨ / (١-)	١٥ / ٤٠	٧ / ش	٨ / (٢-)	٤٠	٣
جـ	٣ / (١-)	١١ / (١)	٢ / ١١٠	٥ / ٥٠	١٦٠	٢-
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠	
تكلفة العمود	٦	١٢	٤	٧		

ان هذا التخصيص الوهمى للخلية (ب ع) قد مكننا من اجراء اختبار المثالية كما هو واضح بعمود تكلفة الصف ، وصف تكلفة العمود وقيم صافى التغير التى وضعت فى دوائر ، وبدون هذا التخصيص ما كان فى الامكان اجراء اختبار المثالية ،ثم يتم مواصلة السير فى خطوات تحسين الحل كالمعتاد .

ثالثاً : مشكلة النقل ذات هدف التعظيم :

Maximization Problems

بالرغم من أن كل مشاكل النقل التى كانت بالامثلة التى

تناولناها فى الاجزاء السابقة كانت ذات هدف تخفيض اجمالى تكاليف النقل ، إلا أنه توجد مشاكل نقل أيضاً تتسم بأنها تهدف إلى الوصول إلى الحل الأمثل والذى يعمل على تعظيم دالة الهدف ، ولكن فى هذه الحالة لن تكون معاملات الهدف تمثل تكاليف نقل الوحدة من مصدر انتاجى معين إلى مخزن توزيع معين ، ولكنها ستكون معاملات مطلوب تعظيمها أى أرباح أو كفاءة أو فاعلية إلى غير ذلك من الاهداف التى يرى المشروع العمل على زيادتها إلى أقصى حد ممكن .

وبناء على ما تقدم يمكن القول أن نموذج النقل صالح للتطبيق على نوعيات مختلفة من المشاكل سواء كان هدفها تخفيض التكاليف ، أو تعظيم الارباح . طالما أن المشكلة تتسم بسمات وخصائص تمثل متطلبات هذه الطريقة ، ولعل هذا يؤكد ما سبق أن قلناه فى مقدمة هذا الجزء من أن اطلاق اسم «مشكلة النقل " على هذه الطريقة هو غير حقيقى ومضلل ويوحى بأنها حبيسة الاستخدام والتطبيق لمشاكل النقل . وفيما يلى توضيح لكيفية تعامل طريقة النقل والخطوات المتبعة فى حالة ما إذا كانت المشكلة تهدف إلى تعظيم دالة الهدف .

مثال :

بفرض أنه توجد احدى الشركات الضخمة التى تعمل فى مجال الانتاج الزراعى ، ولها ثلاثة مزارع ضخمة أحداها فى مديرية التحرير بشمال الاسكندرية ،والثانية بمنطقة الصالحية ، والثالثة بمنطقة الخطارة بمحافظة الشرقية ، وهذه الشركة تبيع منتجاتها فى السوق المحلى لجمهورية مصر العربية ، ولبعض الدول العربية ، ولبعض دول حوض البحر الابيض المتوسط ، وأن ادارة الشركة ترغب أن تحدد أفضل طريقة لتخصيص منتجاتها من محصول القمح على تلك الاسواق الثلاثة الرئيسية ، وعلى أن تكون الكميات المخصصة جميعها لاتزيد عن المحصول المتاح بمزارعها الثلاثة ، ولاتزيد أيضاً عن الكميات المطلوبة للأسواق الثلاثة السابقة . علماً بأن ربح الطن الذى يمكن توليده يتوقف على تكلفة الانتاج لذلك المحصول فى كل مزرعة ،

وتكاليف النقل من المزارع إلى الاسواق ، وكذلك سعر السوق الذى يمكن البيع به (وهذا يختلف باختلاف السوق) . ويوضح الجدول التالى كمية العرض المتاحة بكل مزرعة والكمية المطلوبة لكل سوق ، وربح الطن من كل مزرعة إلى كل سوق :

الأسواق / المزارع	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض
مديرية التحرير	١٤	٢٠	١٤	١٤٠
الصالحية	١٥	١٩	١٤	١٢٠
الخطارة	١٦	١٨	١٢	٤٠
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠ / ٣٠٠

الحل :

توجد عدة طرق تستخدم في التعامل مع مشاكل النقل ذات هدف التعظيم ، الا أننا سنركز فى الجزء التالى على طريقتين فقط ،احداهما تعمل على تحويل المشكلة من مشكلة ذات هدف **تعظيم** إلى مشكلة مقابلة ذات هدف **تخفيض** حتى يمكن تطبيق الخطوات العادية لمنهج طريقة النقل عليها دون أى تغيير ، والطريقة الثانية تسير أيضاً فى الخطوات العادية على أن يتم خلالها إجراء تعديلين أولهما فى طريقة اختبار المثالية وثانيهما تعديل في مرحلة تحسين الحل . وفيما يلى شرح تفصيلى للطريقتين السابقتين .

الطريقة الأولى : تخفيض تكاليف الفرص :

Minimizing Opportunity Costs وتهدف هذه الطريقة إلى تحويل مشكلة النقل ذات هدف التعظيم إلى مشكلة تخفيض حتى يمكن السير فى نفس الخطوات المعتادة لحل مشكلة النقل ومن ثم تبسيط العمل إلى

أدنى حد ممكن ، ولكن كيف يتم اجراء عملية التحويل هذة ؟ الحقيقة أنه يمكن بسهولة تحويل مشكلة النقل ذات هدف التعظيم إلى مشكلة تخفيض ، عن طريق جعل المعاملات الموجودة بالمصفوفة لا تمثل إرباحاً ، بل تمثل هدفاً يراد تخفيضه ، وليكن هذا الهدف هو تكاليف فرص ، أى بدل أن تمثل تلك المعاملات أرباح نجعلها تمثل تكاليف فرص ، عندئذ يصبح الهدف هو العمل على تخفيض تكاليف الفرص أى استطعنا تحويلها إلى مشكلة ذات هدف تخفيض. فبالنظر للمصفوفة الاصلية سنجد أن أفضل خلية ذات أعلى أرباح هى الخلية التى تمثل شحن القمح من مديرية التحرير إلى أسواق الدول العربية حيث يصل الربح إلى أقصى حد له (٢٠ جنيه للطن) ،ولكن ماذا لو أننا لم نستغل هذا الطريق ؟ ان ذلك معناه أننا سنضطر إلى الشحن عبر خلايا أخرى أقل ربحية وبذلك تكون قد ضاعت فرصة مقدارها الفرق بين أعلى ربح (٢٠جنيه) وربح أى خلية أخرى ، وبناء على هذا المفهوم فإنه يمكن تحويل مشكلة النقل ذات هدف التعظيم إلى مشكلة تخفيض عن طريق طرح أرباح كل طرق خلايا النقل من أكبر ربح بالمصفوفة ، وحيث أن أكبر ربح بالمصفوفة هو٢٠ جنيه ،وهويمثل ربح الطن من مبيعات مزرعة مديرية التحرير إلى الدول العربية ، وبعد اتمام هذا الاجراء ، فإن القيم الناتجة تمثل تكاليف الفرص لانها تقابل اختلافات الربح المتولد عن كل خلية .

وبعد تنفيذ هذا الاجراء والحصول على تكاليف الفرص ، تكون المشكلة التى أمامنا هى تخفيض تلك التكاليف ، ومن ثم نسير بعد ذلك فى نفس الخطوات التى اتبعناها فى مشاكل النقل ذات هدف تخفيض التكلفة . الا أنه يجدر أن ننوه هنا أن هناك اختلاف بسيط فى السير بخطوات الحل العادية وهذا الاختلاف هو عند حساب أرباح الحل لكل جدول ، إذ عند حساب أرباح الحل يتم التعامل مع الارباح الاصلية بالمصفوفة الاصلية ، وليس مع تكاليف الفرص بجداول الحل . وسنبين ذلك فى حينه .

وسنسير الآن فى خطوات الحل لهذا المثال . والجدول التالى يمثل جدول الحل المبدئى بطريقة الركن الشمالى الشرقى وخطوات اختبار مثاليته من حيث تكلفة الصف وتكلفة العمود ، وصافى التغير للخلايا الفارغة .

الجدول المبدئى

المزرعة \ السوق	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصف
مديرية التحرير	٦ / ١٠٠	صفر / ٤٠	٦ / (١)	١٤٠	صفر
الصالحية	٥ / (٢-)	١ / ٦٠	٦ / ٦٠	١٢٠	١
القطارة	٤ / (٥-)	٢ / (١-)	٨ / ٤٠	٤٠	٣
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠ / ٣٠٠	
تكلفة العمود	٦	صفر	٥		

الارباح وفقاً للحل المبدئى = ١٠٠×١٤ + ٤٠ × ٢٠ + ٦٠ × ١٩ + ٦٠×١٤ + ٤٠ × ١٢ = ٤٦٦٠ جنيه .

(ويلاحظ انه عند حساب ربح الحل تم ضرب كمية كل خلية × ربحها الاصلى من المصفوفة الاصلية وقبل تحويلها إلى تكلفة فرصة) .

ويتضح من الجدول المبدئى أنه حل غير أمثل ويحتاج إلى تحسين ، وتتبع نفس خطوات تحسين الحل من حيث تعيين المتغير الداخل ،و تحديد اقصى كميه تنقل عبر خلية المتغير الداخل ، ثم اعادة نمط الشحن . وفيما يلى الجدول الثانى لتحسين الحل :

الجدول الثانى

المزرعة / السوق	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصف
مديرية التحرير	[٦] ٦٠	[صفر] ٨٠	[٦] (١)	١٤٠	صفر
الصالحية	[٥] (٢-)	[١] ٢٠	[٦] ١٠٠	١٢٠	١
الخطارة	[٤] ٤٠	[٢] (٤)	[٨] (٥)	٤٠	٢ -
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠ / ٣٠٠	
تكلفة العمود	٦	صفر	٥		

الارباح وفقاً للجدول الثانى = ٦٠×١٤ + ٨٠ × ٢٠ + ٢٠×١٩ + ١٠٠×١٤ + ٤٠×١٦

=٤٨٦٠ جنيه

الجدول الثالث

المزرعة / السوق	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصف
مديرية التحرير	[٦] ٤٠	[صفر] ١٠٠	[٦] (١-)	١٤٠	صفر
الصالحية	[٥] ٢٠	[١] (٢)	[٦] ١٠٠	١٢٠	١ -
الخطارة	[٤] ٤٠	[٢] (٤)	[٨] (٣)	٤٠	٢ -
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠ / ٣٠٠	
تكلفة العمود	٦	صفر	٧		

الارباح وفقاً للجدول الثالث = ٤٠×١٤ + ١٠٠ × ٢٠ + ٢٠×١٥ + ١٠٠×١٤ + ٤٠

×١٦ =٤٩٠٠ جنيه

الجدول الرابع

السوق / المزرعة	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصف
مديرية التحرير	٦ (١)	صفر ١٠٠	٦ ٤٠	١٤٠	صفر
المالحية	٥ ٦٠	١ (١)	٦ ٦٠	١٢٠	صفر
الخطارة	٤ ٤٠	٢ (٣)	٨ (٣)	٤٠	١ـ
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠ / ٣٠٠	
تكلفة العمود	٥	صفر	٦		

الارباح وفقاً للجدول الرابع = ١٠٠×٢٠ + ٤٠ × ١٤ + ٦٠×١٥ + ٦٠×١٤ + ٤٠×١٦

= ٤٩٤٠ جنيه

وواضح أن الجدول الرابع هو جدول الحل الامثل . وبذلك نكون قد تغلبنا على مشكلة النقل ذات هدف التعظيم وذلك باتباع مدخل تكاليف الفرص .

الطريقة الثانية : تعديل اختبار المثالية : Revising the Optimality CHeck والطريقة الثانية التى يمكن اتباعها للتعامل مع مشكلة النقل ذات هدف التعظيم ، هى طريقة تعديل اختبار المثالية ، ومضمون هذه الطريقة أنه يتم التعامل مع تلك النوعية من المشاكل بذات الخطوات التى اتبعت فى مشكلة النقل ذات هدف التخفيض مع اختلاف واحد بسيط ، وهذا الاختلاف يتركز فى خطوة اختبار مثالية الحل ، فنحن نعلم أنه فى مشاكل النقل ذات هدف التخفيض عند تحسن الحل يتم اختيار الخلية ذات أكبر قيمة صافى تغير باشارة سالبة ليتم شغلها فى جولة تالية للحل ، اذن من المنطقى أن ناخذ بعكس هذا الاتجاه فى مشاكل التعظيم أى يتم اختيار الخلية ذات أكبر صافى تغير باشارة موجبة لتكون هى المتغير الداخل ، خلاصة القول أن الحل يسير على نفس المنوال فى الخطوات العامة

لمشاكل النقل ما عدا خطوة اختبار المثالية التى يتم اجراؤها وفق التعديل المشار اليه . وفيما يلى جداول الحل الخاصة بالشركه الزراعية السابقه مستخدمين طريقة تعديل اختبار المثالية .

الجدول المبدئى (الركن الشمالى الشرقى)

المزرعة / السوق	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصف
مديرية التحرير	١٤ ، ١٠٠	٢٠ ، ٤٠	١٤ ، (١_)	١٤٠	صفر
الصالحية	١٥ ، (٢)	١٩ ، ٦٠	١٤ ، ٦٠	١٢٠	١_
الخطارة	١٦ ، (٥)	١٨ ، (١)	١٢ ، ٤٠	٤٠	٣_
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠ / ٣٠٠	
تكلفة العمود	١٤	٢٠	١٥		

إجمالى الارباح = ١٠٠X ١٤+٤٠ X ٢٠+٦٠ X ١٩+٦٠ X ١٤+٤٠ X١٢ = ٤٦٦٠ جنيه

الجدول الثانى

المزرعة / السوق	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصف
مديرية التحرير	١٤ ، ٦٠	٢٠ ، ٨٠	١٤ ، (١_)	١٤٠	صفر
الصالحية	١٥ ، (٢)	١٩ ، ٢٠	١٤ ، ١٠٠	١٢٠	١_
الخطارة	١٦ ، ٤٠	١٨ ، (٤_)	١٢ ، (٥_)	٤٠	٢
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠ / ٣٠٠	
تكلفة العمود	١٤	٢٠	١٥		

إجمالى الارباح = ٦٠X١٤+٨٠X٢٠+٢٠X١٩+١٠٠X١٤+٤٠X١٦=٤٨٦٠ جنيه

الجدول الثالث

المزرعة \ السوق	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصف
مديرية التحرير	[١٤] ٤٠	[٢٠] ١٠٠	[١٤] (١)	١٤٠	صفر
الصالحية	[١٥] ٢٠	[١٩] (-٢)	[١٤] ١٠٠	١٢٠	١
الخطارة	[١٦] ٤٠	[١٨] (-٤)	[١٢] (-٣)	٤٠	٢
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠ / ٣٠٠	
تكلفة العمود	١٤	٢٠	١٤		

إجمالي الارباح= ٤٠x١٤+١٠٠x٢٠+٢٠x١٥+١٠٠x١٤+٤٠x١٦=٤٩٠٠جنيه

الجدول الرابع

المزرعة \ السوق	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصف
مديرية التحرير	[١٤] (-١)	[٢٠] ١٠٠	[١٤] ٤٠	١٤٠	صفر
الصالحية	[١٥] ٦٠	[١٩] (-١)	[١٤] ٦٠	١٢٠	صفر
الخطارة	[١٦] ٤٠	[١٨] (-٣)	[١٢] (-٣)	٤٠	١
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠ / ٣٠٠	
تكلفة العمود	١٥	٢٠	١٤		

إجمالي الارباح = ١٠٠x٢٠+٤٠x١٤+٦٠x١٥+٦٠x١٤+٤٠x١٦=٤٩٤٠جنيه

ويمثل الجدول الرابع الحل الأمثل وسنجد أن نمط الحل وأرباحه هي نفس النتيجة التي سبق التوصل اليها باستخدام الطريقة الاولى وهي طريقة تكلفة الفرص.

رابعاً : حالة عدم تعادل العرض والطلب Unbalanced Supply and Demand

لقد تضمنت الامثلة التي أوردناها في مشكلة النقل افتراض أنه يوجد دائما تعادل وتوازن بين كمية العرض وكمية الطلب ، فقد وجدنا في أمثلتنا السابقة جميعها أن مجموع طاقات المصانع أو المزارع متعادلة ومتطابقة مع احتياجات المخازن أو طلبات الاسواق ، ولكن الواقع والحقيقة أن هذا الوضع لا يحدث إلا في القليل النادر ، ففي الحياة العملية والواقع التطبيقي نجد أن الكميات المعروضةليست متعادلة تماماً مع الكمية المطلوبة ،اذ غالباً ما نجد أن طاقة الشركات أكبر من متوسط الطلب ، حيث أن بناء الطاقة في الاساس يتم على أساس مقابلة ذروة الطلب، وفي أحيان أخرى تكون طاقة الشركة مساوية لمتوسط مستويات الطلب ، أي أن الشركة تقوم ببناء مخزون من سلعها التامة ، أثناء فترات انخفاض الطلب لمواجهة فترات ذروة الطلب ، وهذه أمور تؤدي إلى أن العرض يكون غير متوازن في خلال بعض الفترات .

وحيث أن منهج الحل وفقاً لطريقة النقل يتطلب وجود تعادل بين العرض والطلب ، بمعنى أنها مبنية على فرض وجود هذا التعادل ، لذلك فإنه عند مواجهة مشكلة نقل لا يتحقق فيها هذا التعادل بمعنى أن يكون العرض أكبر من الطلب أو العكس ، فإن الأمر يستلزم لامكان تطبيق خطوات منهج طريقة النقل أن نحقق هذا الافتراض ولو وهمياً ، ولهذا فإنه يتم التعامل مع هذه الحالة وبقصد ايجاد ذلك التعادل عن طريق اضافة نقطة توريد وهمية Dummy Supply Point أي اضافة صف وهمي ليعبر مثلاً عن مصنع وهمي له طاقة تمثل الفرق بين الطلب والعرض ومن ثم تتعادل الكميتان ، أو عن طريق اضافة نقطة

طلب وهمية Dummy demand point ، أى اضافة عمود وهمى ليعبر مثلاً عن مخزن وهمى له احتياجات تمثل الفرق بين العرض والطلب ومن ثم نعود لحالة التعادل بين العرض والطلب ، اى أن نقطة التوريد الوهمية ، أو نقطة الطلب الوهمية بمثابة الزيادة فى العرض عن الطلب، أو الزيادة فى الطلب عن العرض ، فمثلاً إذا كان إجمالى الطلب يزيد عن العرض المتاح بمقدار ٥٠ وحدة ، فإنه ينبغى اضافة نقطة عرض وهمية بطاقة مقدارها خمسون وحدة ، وبالمثل إذا كان اجمالى العرض يزيد عن الطلب بمقدار ١٠٠ وحدة ، فإنه يمكن ببساطة اضافة نقطة طلب وهمية مقدارها ١٠٠ وحدة . ويكون السؤال المطروح الآن ، إذا ما تم اضافة صف وهمى أو عمود وهمى فما هى مقدار التكلفة (أو الارباح) للوحدة الواحدة والتى ستوضع فى خلايا هذا الصف أو ذلك العمود ؟ للاجابة على ذلك نقول : حيث أنه لن يتم شحن أو نقل من أو إلى تلك الخلايا فإنه لا يهم مقدار التكاليف (أو الأرباح) التى يتم تحديدها لتلك الطرق الوهمية ، ولهذا فإننا نفضل أن نستخدم دائما تكلفة مقدارها (صفر) ، أو أرباح مقدارها أيضاً (صفر) لتلك الطرق الوهمية . ولقد عاملنا كافة الخلايا الوهمية معاملة واحدة فجميعها يأخذ قيمة تكلفة (أو أرباح) واحدة حيث أنه لا يتعين تفضيل خلية على غيرها ، ثم أخترنا القيمة الصفرية تسهيلا للعمليات الحسابية التى تتطلبها خطوات حل مشكلة النقل .

وبعد اضافة الخلايا الوهمية إلى المشكلة الاصلية فإنه يتم حلها بذات الخطوات العادية المتبعة فى حل مشكلة النقل ، ويتم معاملة تلك الخلايا الوهمية كما وأنها خلايا حقيقية وبلا أدنى تفرقة . وبغرض التوضيح نسوق المثال التالى :

مثال :

الجدول التالى موضح به تكاليف النقل من المصانع إلى المخازن ، والكميات المتاحة فى كل مصنع والكميات المطلوبة لكل مخزن :

البيان	الكميات المتاحة	تكاليف نقل الطن		
		المخزن س	المخزن ص	المخزن ع
المصنع أ	٩٥ طن	٦جنيه	٩ جنيه	١٢ جنيه
المصنع ب	٦٥ طن	٣ جنيه	١ جنيه	٣جنيه
الكميات المطلوبة للمخازن		٤٥ طن	٦٠ طن	٩٠ طن

أوجد جدول الشحن الذى يخفض جملة التكاليف ويحقق احتياجات المخازن فى ضوء ما هو متاح من كميات .

الحل :

يتبين من هذا المثال أن مجموع الكميات المتاحة بالمصنعين = ٩٥+ ٦٥ = ١٦٠ طن ، كما يتبين أن مجموع الكميات المطلوبة للمخازن الثلاثة = ٤٥+٦٠ +٩٠= ١٩٥طن ومعنى ذلك عدم وجود تعادل بين العرض والطلب ، إذ أن العرض يقل بمقدا ٣٥ طن عن مجموع الاحتياجات (١٩٥-١٦٠= ٣٥) ، لذا يتعين لأيجاد هذا التعادل أن يتم اضافة صف جديد يمثل مصنع وهمى طاقته ٣٥ طن وأن نجعل جميع خلايا هذا الصف تكلفة كل منها = صفر .

وبعد اجراء التعديلات السابقة يتم السير فى خطوات الحل المعتادة كما هو مبين بجداول الحل التالية :

الجدول المبدئى

المصانع \ المخازن	س	ص	ع	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٦ / ٤٥	٩ / ٥٠	١٢ / (١)	٩٥	صفر
ب	٣ / (٥)	١ / ١٠	٣ / ٥٥	٦٥	٨_
جـ وهمي	صفر / (٥)	صفر / (٢)	صفر / ٣٥	٣٥	١١_
احتياجات المخزن	٤٥	٦٠	٩٠	١٩٥ / ١٩٥	
تكلفة العمود	٦	٩	١١		

تكلفة النقل بالجدول المبدئى = ٤٥ x ٦ + ٥٠ x ٩ + ١٠ x ١ + ٥٥ x ٣
+ ٣٥ x ٠ = ٨٩٥ جنيه

ويتبين من الجدول المبدئى أن صافى التغير للخلايا الفارغة جميعها موجبة . أى أن الحل المبدئى هو الحل الامثل ، ويمكن توضيح نتيجة الحل كالاتى :

من الجدول المبدئى يتضح أنه سيتم الوفاء باحتياجات المخازن كالاتى :

- الوفاء باحتياجات المخزن (س) بالكامل ومن المصنع (أ).
- الوفاء باحتياجات المخزن (ص) بالكامل منها خمسون طن من المصنع (أ)وعشرة أطنان من المصنع (ب).
- الوفاء بجزء فقط من احتياجات المخزن ع مقداره عدد ٥٥ طن من المصنع (ب) ، وباقى احتياجاته يأخذها من المصنع الوهمى (جـ) وهذا طبعاً اشباع غير حقيقى . أى أن هناك عجز مقداره عدد (٣٥) طن لن يمكن الوفاء بها للمخزن (ع) نظراً لعدم التوازن بين العرض والطلب مقداره (٣٥) طن كما سبق القول .

مثال:

المصفوفة التالية تمثل مشكلة نقل ، والمطلوب ايجاد الحل الأمثل والذى يعمل على تخفيض اجمالى تكلفة النقل الى أدنى حد لها .

المخزن / المصنع	س	ص	ع	طاقة المصنع
أ	٧	٥	٨	٥٠
ب	٢	٦	٤	٧٠
جـ	٧	١١	٦	٦٠
احتياجات المخزن	٨٠	٥٠	٣٠	١٨٠ / ١٦٠

الحل :

يتبين من المصفوفة السابقة أن مجموع طاقات المصانع يزيد عن مجموع احتياجات المخازن بعدد ٢٠ وحدة . لذا يتعين أولاً وقبل السير فى خطوات الحل المعتادة أن تحدث التعادل ، ويتم ذلك عن طريق اضافة عمود وهمى يمثل مخزن تبلغ إحتياجاته ٢٠ وحدة ونضع تكلفة نقل للوحدة بكل من خلايا ذلك العمود مقدارها صفر ، وبعد اجراء هذا التعديل سيظهر جدول الحل المبدئى باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى كالاتى :

(الجدول المبدئى باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى)

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل وهمى	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٧ ، ٥٠	٥ ، (-٦)	٨ ، (-٨)	صفر ، (-١٠)	٥٠	صفر
ب	٢ ، ٣٠	٦ ، ٤٠	٤ ، (-٧)	صفر ، (-٥)	٧٠	-٥
جـ	٧ ، (١٠)	١١ ، ١٠	٦ ، ٣٠	صفر ، ٢٠	٦٠	-١٠
احتياجات المخزن	٨٠	٥٠	٣٠	٢٠	١٨٠ / ١٨٠	
تكلفة العمود	٧	١١	١٦	١٠		

اجمالى تكلفة الحل = ٥٠x٧+٣٠x٢+٤٠x٦+١٠x١١+١٠x٦+٣٠x٢٠ صفر =

٨٤٠جنيه .

ويتبين أن جدول الحل المبدئى غير أمثل ، لذا سيتم اختيار الخلية (أل) لشغلها (على الرغم من أنها خلية وهمية) بذات الاسلوب المتبع .

وفيما يلى الجدول الثانى :

الجدول الثانى

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل وهمى	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٧ ، ٣٠	٥ ، (-٦)	٨ ، (-٨)	صفر ، ٢٠	٥٠	صفر
ب	٢ ، ٥٠	٦ ، ٢٠	٤ ، (-٧)	صفر ، (٥)	٧٠	-٥
جـ	٧ ، (١٠)	١ ، ٣٠	٦ ، ٣٠	صفر ، (١٠)	٦٠	-١٠
احتياجات المخزن	٨٠	٥٠	٣٠	٢٠	١٨٠ / ١٨٠	
تكلفة العمود	٧	١١	١٦	صفر		

تكلفة النقل بالجدول الثانى =٣٠X٧+٢٠X صفر+٥٠X٢+ ٢٠X٦+ ٣٠X ١+

٣٠X٦ = ٦٤٠جنيه .

ويتبين من الجدول الثانى أنه يحتاج الى تحسين باختيار الخلية (أ ع) كمتغير داخل ، ويتم اعداد الجدول الثالث للحل وسنترك للقارىء أن يقوم بذلك بنفسه ليرى ماذا يحدث للجدول الثالث وما هى السمة أو الصفة التى يتصف بها وكيف يتعامل معها .

خامساً : حالة الطرق الممنوع النقل عليها Prohibted Routes

من الحالات الخاصة الأخرى التى قد نواجه بها عند التعامل مع مشكلة من مشاكل النقل ، هى تلك الخاصة بوجود واحد أوأكثر من طرق المصفوفة (الخلايا) تعتبر طرقاً ممنوعة ، أو مكروهة ، أوغير مفضلة للنقل عليها ، ففى مجالات النقل المادى للسلع هناك عدة أسباب قد تجعل طريقاً ما غير مرغوب استخدامه فى عملية النقل منها : سوء الاحوال الجوية على ذلك الطريق ، الحمولة المسموح بها على تلك الطرق من حيث الوزن أو الحجم ، القيود البيئية المفروضة على نقل المواد الخطرة كالمتفجرات والمواد سريعة الاشتعال ، و المواد الملوثه للبيئه ، مخاطر الطريق ،...الى اخر تلك الاسباب.ولكن كيف يتم التعامل مع المشاكل من تلك النوعية ؟ ان التطبيق المباشر لخطوات طريقة النقل قد يترتب عليها أن نجد أن جدول الحل الامثل ظهرت به كميات تنقل عبر طريق غير مرغوب فيه ، لذلك يتعين اجراء تعديل ما يمنع حدوث ذلك . بمعنى أنه يتعين أن نقوم بعمل تعديل على المصفوفة قبل تطبيق الخطوات المعتادة بحيث يضمن لنا هذا التعديل استحالة النقل على تلك الطرق الممنوعة .

ان التعديل المطلوب اجراؤه هو جعل ذلك الطريق او تلك الطرق غير المرغوب النقل عليها ذات تكلفة نقل عالية جداً بالمقارنة بتكاليف باقى الخلايا (اذا كانت المشكلة ذات هدف تخفيض) أو ذات ربح سالب كبير (اذا كانت المشكلة ذات هدف تعظيم) . وهذا الاجراء كفيل بعدم اختيار ذلك الطريق أو تلك الطرق ضمن جدول الحل الأمثل .

تطبيق طريقة النقل على مجالات ادارية أخرى :

هناك بعض المجالات الادارية الاخرى التى لا تندرج تحت مفهوم الانتقال المادى للسلع والبضائع من مكان لآخر ، ورغم ذلك تصلح

طريقة النقل للتطبيق عليها وبكفاءة كبيرة ، ومن هذه المجالات الهامة : تخطيط الانتاج ، تخصيص الاعمال والمهام للتشغيل على الآلات ، تحليل المواقع لتحديد الموقع الأمثل ، ومجالات أخرى كثيرة لا داعى لحصرها وانما عندما يجد القارىء ان المشكلة التى يقابلها يمكن وضعها على الصورة العامة لمشكلة النقل فليس هناك ما يمنع من تطبيق طريقة النقل عليها.

وفيما يلى نتناول بالتوضيح كيفية تطبيق طريقة النقل على تلك المجالات ، حتى نقرب من ذهن القارىء طبيعتها التى تعيننا على هذا الاستخدام .

١- تخطيط الانتاج : Production planning

يمكن وضع مشاكل تخطيط الانتاج على صورة مشاكل النقل ، إذ يمكن اعتبار أن طاقة المصنع الانتاجية خلال فترات زمنية مثلها مثل نقاط التوريد ، كذلك يمكن أن تعتبر المبيعات المتوقعة خلال تلك الفترات الزمنية بمثابة احتياجات الطلب ، وفى هذه الحالة فإن تكاليف النقل ستكون فى حالة تخطيط و مراقبة الانتاج هى تكاليف الانتاج ، وتكاليف الاحتفاظ بالمخزون ، والمصفوفة التالية مثلاً تعتبر تكويناً مبسطاً لمشكلة تخطيط الانتاج متضمنة مستوى مخزون أول المدة ومستوى مخزون آخر المدة .

تقديرات المبيعات / نقاط التوريد	يناير	فبراير	مارس	مستوى مخزون اخر المده	الانتاج الشهري
مخزون اول المده	صفر	٢	٤	٦	١٢٠
انتاج شهر يناير	١٠	١٢	١٤	١٦	١٠٠
انتاج شهر فبراير	–	١٠	١٢	١٤	١١٠
انتاج شهر مارس	–	–	١٠	١٢	١٢٠
الطلب	١٢٠	١٠٠	١٥٠	١٠	

وهذه المصفوفة تعكس تماماً نمط مشكلة تخطيط الانتاج وهى لفترة زمنية ربع سنوية تمثل شهر يناير ، شهر فبراير ، شهر مارس ، ويمكن أن نتبين من هذه المصفوفة (وهو دائما النمط المعتاد) أنه يمكن الوفاء باحتياجات الطلب والمبيعات لأى شهر من شهور الخطة كالآتى :

أ - من انتاج ذلك الشهر .

ب - انتاج شهور سابقة مع تخزينه حتى يتم الحاجة اليه .

جـ - السحب من مخزون أول المدة .

كذلك يتضح من تلك المصفوفة أن الطاقة الانتاجية لأى شهر معين يتم التصرف فيها كالاتى :

أ- تستخدم للوفاء بطلب ذلك الشهر .

ب - يتم الاحتفاظ به كمخزون لمقابلة الطلب لبعض الشهور التالية .

ج- الاحتفاظ به كمخزون حتى نهاية الفترة للوفاء بالمستوى الموضوع لمخزون آخر المدة . ومن ناحية أخرى فإنه يتضح من هذه المصفوفة أن تكاليف التوزيع والتخصيص الموضحة بها هى بمثابة تكاليف الانتاج للوحدة الواحدة فهى مثلاً عشرة جنيهات للوحدة الواحدة ، كذلك تتضمن التكلفة نصيب الوحدة من تكلفة الاحتفاظ بالمخزون لمدة شهر واحد والتى تبلغ جنيهان ، فإذا تم الوفاء بالطلب من خلال انتاج نفس الشهر تكون تكلفة الوحدة عشرة جنيهات (حيث لا يتم تخزين تلك الوحدات ومن ثم لا توجد تكاليف احتفاظ بالمخزون). أما اذا تم الوفاء بالطلب فى شهر فبرايرمن انتاج شهر يناير فإن تكلفة الوحدة فى شهر فبراير = تكلفة الانتاج فى شهر يناير + تكلفة الاحتفاظ بالوحدة لمدة شهر = ١٠+ ٢ = ١٢ ،يضاف اليها ٢جنيه اذا كانت تلبى احتياجات الطلب في شهر مارس .

وبعد هذا التوضيح فإن المصفوفة السابقة كما تم صياغتها فى الجدول السابق يمكن حلها باستخدام طريقة النقل العادية مع ملاحظة مايلى :

- *أن هناك طرقاً ممنوعة فى تلك المصفوفة والواقعة فى الجزء الايمن* الاسفل اذ أنها تمثل خلايا لا ينبغى شغلها اذ أنها تمثل الاحتمالات

غير ممكنة كبدائل فى الخطة الانتاجية ، فلا يمكن مثلاً الوفاء بطلب شهر يناير من انتاج شهور لاحقة كشهر فبراير وشهر مارس ، وكذلك لا يمكن الوفاء بطلب شهر يناير وفبراير من انتاج شهر مارس (إلا اذا افترضنا استعداد المستهلك للانتظار).

- يتم اضافة عمود وهمى (الطاقة غير المستخدمه) حيث يتضح أن اجمالى الطلب المتوقع هو ٣٨٠ وحدة وهو يقل عن حجم العرض وهو ٤٥٠ وحدة بمقدار ٧٠ وحدة ، وحيث أن اسلوب النقل الاصلى يتطلب وجود تعادل بين العرض والطلب إذن يتعين اضافة هذا العمود الجديد بمقدار الفرق .

وبذلك يمكن اعداد جدول الحل المبدئى كالاتى :

الجدول المبدئى (الركن الشمالى الشرقى)

تقديرات المبيعات / نقاط التوريد	يناير	فبراير	مارس	مخزون اخر المده	الطاقة غير المستخدمة	الطاقة المتاحة	تكلفه الصف
مخزون اول المده	صفر / ١٢٠	٢ / (صفر)	٤ / (صفر)	٦ / (صفر)	صفر / (٦)	١٢٠	صفر
انتاج شهر يناير	١٠ / ش	١٢ / ١٠٠	١٤ / (صفر)	١٦ / (صفر)	صفر / (-٤)	١٠٠	١٠
انتاج شهر فبراير	٥٠ / (٤٢)	١٠ / ش	١٢ / ١١٠	١٤ / (صفر)	صفر / (-٢)	١١٠	٨
انتاج شهر مارس	٥٠ / (٤٤)	٥٠ / (٤٢)	١٠ / ٤٠	١٢ / ١٠	صفر / ٧٠	١٢٠	٦
الطلب	١٢٠	١٠٠	١٥٠	١٠	٧٠	٤٥٠ / ٤٥٠	
تكلفة العمود	صفر	٢	٤	٦	-٦		

ويتبين من الجدول المبدئى أن اجمالى التكلفة وفقاً للحل الوارد به = ١٢٠ × صفر + ١٠٠ × ١٢ + ١١٠ × ١٢+ ٤٠ × ١٠ + ١٠ × ١٢ + ٧٠ × صفر = ٣٠٤٠ جنيه، إلا أنه يتبين أنه حل منتكس (غير اساسى) لذلك تم شغل خليتين بكمية وهمية مقدارها (ش) ، ثم يتم اختبار مثالية هذا

الجدول بالطريقة المعتادة ، فمثلاً سيتم اختيار الخلية ذات أكبر قيمة باشارة سالبة لنعتبرها متغير داخل . وفيما يلى جدول تحسين الحل :

الجدول الثانى

تقديرات المبيعات / نقاط التوريد	يناير	فبراير	مارس	مستوى مخزون أخر المده	الطاقة غير المستخدمة	الطاقة المتاحة	تكلفة الصف
مخزون اول المده	صفر ١٢٠	٢ (صفر)	٤ (صفر)	٦ (صفر)	صفر (١٠)	١٢٠	صفر
انتاج شهر يناير	١٠ ش	١٢ ٣٠	١٤ (صفر)	١٦ (صفر)	صفر ٧٠	١٠٠	١٠
انتاج شهر فبراير	٥٠ (٤٢)	١٠ ٧٠	١٢ ٤٠	١٤ (صفر)	صفر (٢)	١١٠	٨
انتاج شهر مارس	٥٠ (٤٤)	٥٠ (٤٢)	١٠ ١١٠	١٢ ١٠	صفر (٤)	١٢٠	٦
الطلب	١٢٠	١٠٠	١٥٠	١٠	٧٠	٤٥٠ / ٤٥٠	
تكلفة العمود	صفر	٢	٤	٦	-١٠		

التكلفة الاجمالية بالجدول الثانى = ١٢٠ × صفر + ٣٠ × ١٢ + ٧٠ × صفر+٧٠ × ١٠ + ٤٠ × ١٢+١١٠ × ١٠+١٠ × ١٢ = ٢٧٦٠ جنيه .

أى هناك وفر عن الجدول المبدئى بما قيمته ٢٨٠ جنيه (٣٠٤٠ - ٢٧٦٠)

ويتبين من اختبار مثالية هذا الجدول أنه يمثل جدول الحل الأمثل حيث أن كل قيم صافى التغير موجبة ، وهذا معناه عدم امكانية اجراء أى تخفيض على التكاليف وهذا الحل يتلخص فى الاتى :

- يتم تلبية طلب شهر يناير من مخزون أول المدة .
- يتم تلبية طلب شهر فبراير عن طريق ٣٠ وحدة من انتاج شهر يناير، ٧٠ وحدة من انتاج شهر فبراير .
- يتم تلبية طلب شهر مارس عن طريق ٤٠ وحدة من انتاج شهر فبراير ، ١١٠ وحدة من انتاج شهر مارس .
- يتم الوفاء بمستوى مخزون آخر المدة من انتاج شهر مارس .

– الطاقة غير المستغلة تتكون من ١٠ وحدات من مخزون أول المدة ، ٧٠ وحدة من انتاج شهر يناير.

مثال :

باستخدام المعلومات التالية عن الطلب ومستوى الطاقة والمخزون والتكاليف ، ضع المشكلة فى شكل يسمح باستخدام طريقة النقل فى الوصول الى الخطة المثلى للانتاج .

	الفتـــــــــرة		
	(١)	(٢)	(٣)
الطلب (بالوحدة)	١٤٠	١٧٠	١٥٠
الطاقة (بالوحدة) :			
الوقت الأصلى	١٠٠	١٠٠	١٠٠
الوقت الاضافى	٥٠	٥٠	٥٠
من الغير	١٠	١٠	٢٠

وكان مخزون أول المدة ٢٠ وحدة وتكاليف الانتاج للوحدة خلال الوقت الاصلى ١٠ جنيهات، وفى الوقت الاضافى ١٥ جنيهاً ، ومن الغير ١٢جنيهاً ، وتكاليف الاحتفاظ بالمخزون بواقع ٢جنيه للوحدة لمدة شهر.

الحل :

قبل وضع المشكلة على صورة طريقة النقل يتعين احداث بعض التعديلات لتتوافق عند حلها مع الخطوات العادية لمشكلة النقل وهذه التعديلات تشمل :

أ– ايجاد التوازن بين العرض والطلب ، فكميه الطلب خلال الفترات الثلاث مجموعها ٤٦٠ وحدة فى حين أن مجموع العرض عن الفترة نفسها ٥١٠ وحدة ، ويتم ذلك من خلال اضافة عمود وهى يمثل الطاقة غير المستغلة وبكمية مقدارها ٥٠ وحدة .

ب– الخلايا غير المرغوب فى شغلها لأنها بدائل غير ممكنة ويستحيل شغلها منطقياً وهى الخلايا فى الركن الأيمن الى أسفل وضعت بها تكلفة عالية جداً حتى لا يتم التخصيص عليها فى الحل الأمثل .

بعد اجراء التعديلات السابقة ستظهر المصفوفة متضمنة الحل المبدئى على الصورة التالية :

نقاط التوريد \ الشهور		يناير	فبراير	مارس	الطاقة غير المستخدمة	الطاقة المتاحة
مخزون اول المدة		صفر ٢٠	٢	٤	صفر	٢٠
يناير	الوقت الاصلى	١٠ ١٠٠	١٢	١٤	صفر	١٠٠
	الوقت الاضافى	١٥ ٢٠	١٧ ٣٠	١٩	صفر	٥٠
	من الغير	١٢	١٤ ١٠	١٦	صفر	١٠
فبراير	الوقت الاصلى	٥٠	١٠ ١٠٠	١٢	صفر	١٠٠
	الوقت الاضافى	٥٠	١٥ ٣٠	١٧ ٢٠	صفر	٥٠
	من الغير	٥٠	١٢	١٤ ١٠	صفر	١٠
مارس	الوقت الاصلى	٥٠	٥٠	١٠ ١٠٠	صفر	١٠٠
	الوقت الاضافى	٥٠	٥٠	١٥ ٢٠	صفر ٣٠	٥٠
	من الغير	٥٠	٥٠	١٢	صفر ٢٠	٢٠
الطلب المتوقع		١٤٠	١٧٠	١٥٠	٥٠	٥١٠ / ٥١٠

٢- تخصيص الأعمال على الآلات :

من المجالات الفسيحة الاخرى التى يمكن أن تطبق عليها طريقة النقل هى تلك الخاصة بتخصيص المهام أو الاعمال أوالوظائف على مجموعة الآلات المتاحة بالمصنع ، أو على مجموعة العاملين ، أو على مراكز العمل ، علماً بأنه لاتوجد قيود على تجزئة الأعمال على أكثر من آلة أو أكثرمن موظف ، كما أن الموظف أو الآلة يمكنه القيام بأكثر من

مهمة (أما اذا كانت التجزئة ممنوعة لطبيعة المشكلة فهذا ما سنتناوله فى الجزء الثانى عند تناول مشاكل التخصيص) ، ويتوقف التعامل مع تلك النوعية من المشاكل على أنها مشاكل نقل ضرورة أن تكون كافة مدلولات الموارد والاستخدامات بمدلول واحد مشترك كالساعات النمطية أو غير ذلك .

مثال :

يريد أحد المصانع تخصيص عدد من المهام تفصيلاتها كالاتى :

المهمة (أ) وعددها (٢٠) مهمة كل منها تتطلب ٢ساعة

المهمة (ب) وعددها (٥٠) مهمة كل منها تتطلب ١ساعة

المهمة (جـ) وعددها (١٤٠) مهمة كل منها تتطلب $\frac{١}{٢}$ساعة

هذه المهام يراد تخصيصها للانتهاء منها على أربع أنواع من الالات هى س ، ص ، ع ، ل متاح من كل منها آلة واحدة طاقاتها كالآتى على الترتيب ٣٠ ، ٥٠ ، ٤٠ ، ٤٠ ساعة . فإذا علمت أن تكلفة تشغيل كل آلة فى الساعة تختلف باختلاف المهمة التى ستقوم بتنفيذها، والجدول التالى يوضح تكلفة تشغيل الساعة لكل آلة فى كل مهمة :

	المهمة (أ)	المهمة (ب)	المهمة (جـ)
الآلة(س)	٥	٧	٩
الالة (ص)	١١	١٠	١٣
الالة (ع)	٧	٨	٥
الآلة(ل)	١٤	١٤	١٦

والمطلوب تخصيص المهام للتشغيل على الآلات بحيث تصل تكلفة التنفيذ الى حدها الأدنى :

الحل :

سيتم وضع المشكلة السابقة على شكل الصورة العامة لمشكلة النقل بعد تحويل المهام من عدد من المهام الى عدد ساعات حيث أن الآلات معبراً عن طاقتها بالساعات كذلك تكلفة التشغيل محسوبة بالساعة . لذلك يتعين توحيد وحدة القياس وهى الساعة. وبعد هذا الاجراء ستظهر المصفوفة متضمنة الجدول المبدئى واختبار المثالية

على الشكل التالى :

المهمة / الالة	المهمة (أ)	المهمة (ب)	المهة (ج)	الطاقة المعروضة بالساعات	تكلفه الصف
س	٥ ، ٣٠	٧ ، (٣)	٩ ، (٨)	٣٠	صفر
ص	١١ ، ١٠	١٠ ، ٤٠	١٣ ، (٦)	٥٠	٦
ع	٧ ، (-٢)	٨ ، ١٠	٥ ، ٣٠	٤٠	٤
ل	١٤ ، (-٦)	١٤ ، (-٥)	١٦ ، ٤٠	٤٠	١٥
الطاقة المطلوبة بالساعة	٤٠	٥٠	٧٠	١٦٠ / ١٦٠	
تكلفـــة العمـــود	٥	٤	١		

اجمالى التكاليف وفقا للحل المبدئى =

٣٠×٥ +١٠×١١ +٤٠×١٠ +١٠×٨ +٣٠×٥ +٤٠×١٦= ١٥٢٠ جنيه.

ويتبين من اختبار مثالية الجدول المبدئى أنه جدول غير أمثل ويحتاج الى تحسين ، ويتم السير فى اجراءات التحسين المعتادة وصولاً للحل الأمثل ، مع ملاحظة أن الحل الأمثل لن يكون بعدد المهام المخصصة على كل آلة ولكن بعدد ساعات كل مهمة ومن ثم يمكن بقسمة عدد الساعات المخصصة على زمن كل مهمة أن نحصل على عدد المهام التى ستخصص للتنفيذ على كل آلة .

٣- تحليل الموقع Location Analysis

يمكن الاستفادة من طريقة النقل فى اختيار موقع المشروع خصوصاً بعد مرحلة التصفية الأولية للمواقع ، وتحديد المواقع الممكن اقامة المشروع عليها Feasible Alternative sits .اذ أن هذه الطريقة تعمل على تحديد المواقع التى تصل بالتكاليف الى حدها الادنى .

ونؤكد مرة أخرى على أن تكلفة النقل تعتبر بمثابة أحد العوامل التى ستأخذها الادارة فى اعتبارها فى اتخاذ مثل هذا القرار .

ويرتكز هذا الاسلوب على قياس تكلفة النقل بحيث يفضل البديل الذى يحقق أقل تكلفة ممكنة . وفيما يلى نوضح كيف يمكن ترشيد هذا القرار باستخدام طريقة النقل .

مثال :

ترغب احدى الشركات الصناعية فى انشاء مصنع جديد لها بجانب المصنعين الحاليين اللذين تملكهما وذلك بسبب زيادة الطلب على السلعة التى تتخصص فى انتاجها ، وفيما يلى البيانات الخاصة بالطلب والطاقة الانتاجية :

- متوسط الطلب المتوقع على مناطق السوق المختلفة كالاتى :

  ٦٠٠٠٠ وحدة فى منطقة القاهرة

  ٣٠٠٠٠ وحدة فى منطقة الجيزة

  ٥٠٠٠٠ وحدة فى منطقة الاسكندرية .

- متوسط الطاقة الحالية للمصنعين الحاليين كالاتى :

  ٥٠٠٠٠ مصنع القليوبية

  ٢٠٠٠٠ مصنع العاشر من رمضان

- المصنع الجديد المقترح انشاؤه ستبلغ متوسط طاقته الانتاجية ٧٥٠٠٠ وحدة

- هناك موقعين مرشحين لاقامة المصنع المقترح وهما : مدينة ٦ أكتوبر ، مدينة السادات.

- تبلغ تكلفة النقل للوحدة الواحدة من كل مصنع الى مراكز الاستهلاك كالاتى : (التكلفة بالجنيه)

	مركز القاهرة	مركز الجيزة	مركزالاسكندرية
مصنع القليوبية	٥	٦	١٠
مصنع العاشر من رمضان	٨	٧	١٥
مصنع ٦ أكتوبر	٣	٤	١٢
مصنع مدينة السادات	٧	٥	٦

والمطلوب تحديد الموقع الامثل للمصنع الجديد والذى يعمل على

الوصول باجمالى تكلفة النقل الى حدها الادنى .

الحل .

حيث أن المطلوب اختيار بديل واحد من بين البديلين المقترحين وهما إما اقامة المصنع فى مدينة ٦ أكتوبر ، أو اقامته بمدينة السادات . اذن يتعين ان نقوم بتقييم البديلين من حيث اجمالى تكاليف النقل المحققة بكل منهما واختيار البديل الذى يصل بالتكلفة الى حدها الادنى .

تقييم البديل الأول : اقامة المصنع الجديد بمدينة ٦ أكتوبر

سنقوم أولاً بتقييم البديل الأول وذلك من خلال تحديد اجمالى تكاليف النقل التى ستتحملها الشركة فى حالة انشاء المصنع الجديد بمدينة ٦ أكتوبر ، ولهذا الغرض سيتم اعداد مصفوفة النقل التى ستعمل على الوصول الى تلك النتيجة ، ويلاحظ من تلك المصفوفة أننا أضفنا عمود وهمى ليمثل منطقة استهلاك وهمية حيث أن طاقة المصانع الثلاثة تزيد عن تقديرات الطلب فى مراكز الاستهلاك الثلاثة ، وفيما يلى مصفوفة النقل بعد ايجاد جدول الحل المبدئى واختبار مثاليته.

الجدول المبدئي

الموقع / السوق	القاهره	الجيزه	الاسكندريه	وهمي	طاقه المصنع بالاف	تكلفه الصف
القليوبيه	[٥] ٥٠٠	[٦] (٢)	[١٠] (-٢)	[صفر] (صفر)	٥٠٠	صفر
العاشر من رمضان	[٨] ١٠٠	[٧] ١٠٠	[١٥] (صفر)	[صفر] (-٣)	٢٠٠	٣
مدينه ٦ اكتوبر	[٣] (-٢)	[٤] ٢٠٠	[١٢] ٥٠٠	[صفر] ٥٠	٧٥٠	صفر
الطلب (بالالف)	٦٠٠	٣٠٠	٥٠٠	٥٠	١٤٥٠ / ١٤٥٠	
تكلفه العمود	٥	٤	١٢	صفر		

إجمالي التكلفة = ١٠٨٠٠ ألف جنيه

الجدول الثاني

الموقع / السوق	القاهره	الجيزه	الاسكندريه	وهمي	طاقه المصنع بالاف	تكلفه الصف
القليوبيه	[٥] ٥٠٠	[٦] (٢)	[١٠] (-٢)	[صفر] (٣)	٥٠٠	صفر
العاشر من رمضان	[٨] ١٠٠	[٧] ٥٠	[١٥] (صفر)	[صفر] ٥٠	٢٠٠	٣
مدينه ٦ اكتوبر	[٣] (-٢)	[٤] ٢٥٠	[١٢] ٥٠٠	[صفر] (٣)	٧٥٠	صفر
الطلب (بالالف)	٦٠٠	٣٠٠	٥٠٠	٥٠	١٤٥٠ / ١٤٥٠	
تكلفه العمود	٥	٤	١٢	-٣		

إجمالي التكلفة = ١٠٦٥٠ ألف جنيه

الجدول الثالث

الموقع / السوق	القاهره	الجيزه	الاسكندريه	وهمي	طاقه المصنع بالاف	تكلفه الصف
القليوبيه	[٥] ٥٠٠	[٦] (صفر)	[١٠] (٤-)	[صفر] (١)	٥٠٠	صفر
العاشر من رمضان	[٨] (٢)	[٧] ١٥٠	[١٥] (صفر)	[صفر] ٥٠	٢٠٠	١
مدينه ٦ اكتوبر	[٣] ١٠٠	[٤] ١٥٠	[١٢] ٥٠٠	[صفر] (٢)	٧٥٠	٢-
الطلب (بالالف)	٦٠٠	٣٠٠	٥٠٠	٥٠	١٤٥٠ / ١٤٥٠	
تكلفه العمود	٥	٦	١٤	١-		

إجمالي التكلفة = ١.٤٥٠ ألف جنيه

الجدول الرابع

الموقع / السوق	القاهره	الجيزه	الاسكندريه	وهمي	طاقه المصنع بالاف	تكلفه الصف
القليوبيه	[٥] (٤)	[٦] (٤)	[١٠] ٥٠٠	[صفر] (٥)	٥٠٠	صفر
العاشر من رمضان	[٨] (٢)	[٧] ١٥٠	[١٥] ش	[صفر] ٥٠	٢٠٠	٥
مدينه ٦ أكتوبر	[٣] ٦٠٠	[٤] ١٥٠	[١٢] (صفر)	[صفر] (٣)	٧٥٠	٢
الطلب (بالالف)	٦٠٠	٣٠٠	٥٠٠	٥٠	١٤٥٠ / ١٤٥٠	
تكلفه العمود	١	٢	١٠	٥-		

إجمالي التكلفة = ٨٤٥٠ ألف جنيه

ويتبين أن الجدول الرابع هو جدول الحل الامثل ، فاذا تم اختيار أن يكون موقع المصنع الجديد بمدينة ٦ أكتوبر فستكون اجمالى تكلفة النقل ٨٤٥٠ الف جنيه .

تقييم البديل الثانى :اقامة المصنع الجديد بمدينة السادات :

وسيتم تعديل بسيط فى المصفوفة الاصلية اذ يتم احلال موقع المصنع ليكون بمدينة السادات بدلاً من مدينة ٦ أكتوبر وتوضع تكاليف نقل الوحدة المصاحبة لهذا التعديل وبعد اجراء جولات الحل المختلفة بالطريقة المعتادة سيكون جدول الحل الامثل كالاتى -

السوق / الموقع	القاهره	الجيزه	الاسكندريه	وهمي	طاقه المصنع بالالف	تكلفه الصف
القليوبيه	[٥] ٥٠٠	[٦] (٢)	[١٠] (٥)	[صفر] (٣)	٥٠٠	صفر
العاشر من رمضان	[٨] ١٠٠	[٧] ٥٠	[١٥] (٧)	[صفر] ٥٠	٢٠٠	٣
مدينة السادات	[٧] (١)	[٥] ٢٥٠	[٦] ٥٠٠	[صفر] (٢)	٧٥٠	١
الطلب (بالالف)	٦٠٠	٣٠٠	٥٠٠	٥٠	١٤٥٠ / ١٤٥٠	
تكلفه العمود	٥	٤	٥	٣-		

إجمالي التكلفة = ٧٩٠٠ ألف جنيه.

وبمقارنة تكلفة البديلين يتبين أن البديل الثانى أقل تكلفة ، اذ فى حين تبلغ اجمالى التكلفة للبديل الاول ٨٤٥٠ الف جنيه ، فإنها ٧٩٠٠ الف جنيه للبديل الثانى ، أى بفرق مقداره ٥٥٠ الف جنيه لصالح البديل الثانى . اذن القرار الافضل اختيار أن ينشأ المصنع فى مدينة السادات لأنه أوفر فى تكلفة النقل من انشائه بمدينة ٦ اكتوبر .

ومن هذا التحليل يتبين أنه أمكن باستخدام طريقة النقل أن نتعامل مع مشاكل تحليل واختيار موقع المصنع ، الا أنه يجدر أن ننوه هنا أن اختيار موقع المصنع لا ينبنى فقط على الموقع الأقل تكلفة لنشاط النقل ولكن هناك العديد من الاعتبارات والعوامل التى ينبغى أن تكون محل تحليل وتدقيق، وأن تكاليف النقل هى احدى تلك العوامل ولا يمكن أن تكون بديلاً عنها ، خلاصة القول أنه يمكن استخدام طريقة النقل لتعطينا فكرة واضحة عن تكاليف النقل النسبية للمواقع المحتملة ، ومن ثم سيكون لذلك أثر هام فى اختيار الموقع .

أسئلة وتطبيقات:

١- الجدول التالى يوضح تكاليف نقل الطن من المصانع الى المخازن والكميات المتاحة فى كل مصنع وكذا الكميات المطلوبة لكل مخزن:

بيـــــان	المخزن (س)	المخزن (ص)	المخزن (ع)	طاقة المصنع
المصنع (أ)	٦ جنيه	٩ جنيه	١٢ جنيه	٣٠٠ وحدة
المصنع (ب)	٣ جنيه	١ جنيه	٣ جنيه	٣٦٠ وحدة
إحتياجـــات المخـازن	٤٥٠ وحدة	٦٠ وحدة	٩٠ وحدة	

والمطلوب: ايجاد جدول الشحن الأمثل الذى يصل باجمالى تكلفة النقل الى أدنى حد لها.

٢- شركة لانتاج الأسمدة الكيماوية لها ثلاثة مصانع تمد خمسة مخازن مركزية باحتياجاتها من الأسمدة وقد تبين أن مخزون الأسمدة بهذه المصانع الثلاثة لهذا الاسبوع كما يلى:

المصنع	الكمية بالطن
(١)	٢٠٠
(٢)	١٠٠
(٣)	١٥٠

وقد تبين من خلال سجلات الشركة أن تكلفة نقل الطن من كل مصنع الى كل مخزن كما هو موضح فيما يلى (بالجنيهات):

	مخزن (أ)	مخزن (ب)	مخزن (جـ)	مخزن (د)	مخزن (هـ)
مصنع (١)	٥	١	٦	٣	١
مصنع (٢)	٢	٣	٤	٥	٤
مصنع (٣)	٤	٢	٣	٢	٣

وتحتاج المخازن الى كميات الأسمدة التالية للأسبوع القادم:

المخزن	الاحتياجات
(أ)	٨٠ طن
(ب)	٩٠ طن
(جـ)	١٠٠ طن
(د)	٧٠ طن
(هـ)	٦٠ طن

أوجد جدول الشحن للأسبوع القادم والذى يعمل على تخفيض جملة تكاليف النقل ويحقق احتياجات كل مخزن من المخازن الخمسة.

٣- أعطيت البيانات التالية والخاصة بالمطلوب انتاجه من السلع ١، ٢، ٣ وطاقة الآلات الانتاجية، وكذلك التكاليف التى يتحملها المصنع نتيجة إستخدام آله معينة لانتاج سلعة معينة، وطلب منك مدير تخطيط ومراقبة الانتاج توزيع انتاج السلع على الآلات بحيث تكون اجمالى تكلفة الانتاج عند حدها الأدنى

البيـــــان	تكلفة انتاج الوحدة على كل آلة				المطلوب انتاجه (بالألف)
	أ	ب	ج	د	
السلعة ١	٢٠	٣١	٢٩	٤٨	١٥
السلعة ٢	٦٩	٣٧	٣٧	٣٩	٣٠
السلعة ٣	٤٥	٦٠	٦٧	١٨	٤٥
طاقة الآلة (بالألف)	٢٥	٣٠	٣٠	٣٥	

٤- تمتلك هيئة النقل العام ثلاثة جراجات بمنطقة شمال القاهرة متاح بكل منها أعداد الاتوبيسات الآتية:

جراج (أ) ١٠ أتوبيس

جراج (ب) ٢٢ أتوبيس

جراج (ج) ١٨ أتوبيس

وهذه الاتوبيسات مطلوبة عند بداية ثلاثة خطوط هى س، ص، ع كالآتى:

خط (س) ٦ أتوبيس

خط (ص) ٣٠ أتوبيس

خط (ع) ١٤ أتوبيس

فما هو العدد الأمثل من الاتوبيسات التى تخرج من الجراجات الى بداية الخطوط والذى يجعل اجمالى المسافات المقطوعة أقل ما يمكن علما بأن المسافات بين كل جراج وبداية كل خط كانت كالآتى (بالكيلو متر):

	س	ص	ع
أ	٦	١٠	١٥
ب	٤	٦	١٦
ج	١٢	٥	٨

٥- باستخدام المعلومات التالية، ضع مشكلة تخطيط الانتاج فى شكل يمكن معه استخدام طريقة النقل فى الوصول الى خطة الإنتاج، وحلها للوصول الى أفضل خطة إنتاجية.

بيان	الفترة		
	(١)	(٢)	(٣)
الطلب	٥٠٠	٧٠٠	٦٥٠
الطاقة الأصلية	٥٠٠	٥٠٠	٥٠٠
الطاقة الاضافية	٥٠	٥٠	٥٠
توفير من عند الغير	١٢٠	١٢٠	٤٠٠
مخزون أول المدة	١٠٠		

تكاليف انتاج الوحدة فى الوقت الأصلى ٦٠ جنيه للوحدة.

تكاليف انتاج الوحدة فى الوقت الاضافى ٨٠ جنيه للوحدة.

تكاليف الحصول على الوحدة من الغير ٩٠ جنيه للوحدة.

تكاليف تخزين الوحدة ١ جنيه للوحدة / شهر.

٦- تبحث شركة الحائر عن أفضل طريقة لتخطيط انتاجها للأربعة شهور القادمة (سبتمبر ، أكتوبر، نوفمبر، ديسمبر) وتسير الادارة العليا على سياسة ثبات حجم العمالة والذى يبلغ الآن ٢٠٠ عامل يعملون عشرون يوما فى الشهر بواقع ثمان ساعات يوما، وبأجر خمسة جنيهات فى الساعة وتبلغ طاقة الوقت الاضافى ٢٠٪ من طاقة الوقت الاصلى، ويزيد أجر الساعة بمعدل ٥٠٪ خلال الوقت الاضافى وتنتج الشركة عدة نماذج من المنتج يتطلب كل منها ٢٠ ساعة عمل وما يعادل ٥٠ جنيه من المواد المباشرة، وتبلغ تكلفة الاحتفاظ بوحدة من المخزون لمدة شهر عشرة جنيهات، وكان المخزون فى نهاية أغسطس ٥٠٠ وحدة وترغب الشركة فى الإحتفاظ بمخزون قدره ١٠٠٠ وحدة فى نهاية ديسمبر، وتدفع الشركة ما يعادل ٥٠٠ جنيه كغرامة عن كل وحدة لايمكن تلبيتها.

وقد تبين ان الطلب المتوقع (فى شكل عدد ساعات عمل) كان كالآتى:

سبتمبر	٤٠,٠٠٠
أكتوبر	٤٠,٠٠٠
نوفمبر	٤٥,٠٠٠
ديسمبر	٤٥,٠٠٠

والمطلوب: وضع المشكلة السابقة فى شكل يمكن عن طريقه استخدام طريقة النقل للوصول الى الحل الامثل.

٧- تستعد إدارة التجنيد بالقوات المسلحة لاستقبال ١٠٠٠٠٠ مجند من نوعيات مختلفة يقدر توزيعها النسبى على النحو التالى: ٢٠٪ مؤهلات عليا، ٣٠٪ مؤهلات متوسطة، ٥٠٪ بدون مؤهل.

ويراد توزيع هؤلاء المجندين للوفاء باحتياجات أفرع القوات المسلحة المختلفة كالآتى:

المشاه ٢٠٠٠٠، الدفاع الجوى ٢٠٠٠٠، المركبات ٣٠٠٠٠، القوات الجوية ١٠٠٠٠، القوات البحرية ٢٠٠٠٠.

وتقوم إدارة التجنيد على ضوء الخبرات السابقة وبالتشاور مع قادة الأسلحة المختلفة باعداد جدول يوضح كفاءة كل نوعية من المؤهلات على كل فرع من أفرع القوات المسلحة، وقد كانت مؤشرات الكفاية وفقا للاسلحة المختلفة على النحو التالي:

	مؤهلات عليا	مؤهلات متوسطة	بدون مؤهل
المشـــاه	١	٣	٢
الدفاع الجوى	٥	٢	١
مـــركبات	٣	٢	١
القوات الجوية	٣	٢	١
القوات البحرية	٢	٢	١

وترغب إدارة التجنيد في توزيع المجندين بشكل يحقق احتياجات الأسلحة المختلفة، وفى نفس الوقت الحد الاقصى من الفاعلية الاجمالية.

والمطلوب: أن تعد توزيعا يمكن ان تسترشد به إدارة التجنيد.

٨- أعلنت إحدى الشركات الكبرى عن عدد من الوظائف الشاغرة لديها وكانت نوعية تلك الوظائف والأعداد المطلوبة منها كالآتى:-

(٥) وظيفة مالية، (٧) وظيفة تسويقية، (٤) وظيفة محاسبية، (٤) وظيفة علاقات عامة، و(٢) وظيفة تخطيط اقتصادى.

وقد تقدم عدد من خريجى كليات التجارة لشغل هذه الوظائف، وفيما يلى بيانا بعدد المتقدمين وتخصصاتهم: (٢٠) إدارة أعمال، (٢٠) محاسبة، (١٠) إقتصاد، و (١٠) تأمين.

ولما كانت الشركة تهدف الى شغل هذه الوظائف بأنسب تخصص لذلك تم اعداد جدول يمثل مدى كفاءة كل تخصص لكل نوعية من أنواع الوظائف ولقد أخذ هذا الجدول الصورة التالية:

	مالية	تسويقية	محاسبية	علاقات عامة	تخطيط اقتصادى
تخصص إدارة الأعمال	٩	١٠	٧	٨	٦
تخصص المحاسبة	١٠	٦	١٠	X	٤
تخصص الاقتصاد	٦	٦	X	٧	١٠
تخصص التأمين	٧	٥	٧	٦	X

(X) هذه الاشارة تعنى عدم الرغبة فى شغل تلك النوعية من الوظائف بهذا التخصص.

والمطلوب: أن تساعد إدارة شئون العاملين بالشركة فى التوصل الى التوزيع الأمثل للمتقدمين لشغل هذه الوظائف الشاغرة.

٩- تمتلك احدى الشركات أربعة مراعى لتربية الابقار لانتاج الألبان هى (س١)، (س٢)، (س٣)، (س٤) وتقوم بنقل منتجاتها الى خمسة مراكز توزيع هى (ص١)، (ص٢)، (ص٣)، (ص٤)، (ص٥).

فإذا علمت ان تكلفة نقل الجالون من الألبان من كل مركز انتاج الى مركز توزيع وكذلك الكميات المتوقع انتاجها من كل مزرعة والاحتياجات المتوقعة لكل مركز توزيع كانت كالآتى:

مراكز التوزيع / المراعى	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ص٥	الانتاج بالجالون
س١	١٤	١٤	١٦	١٨	١٦	٦٠٠
س٢	١٦	١٢	١٢	١٥	١٧	٨٠٠
س٣	١٨	١٧	١٦	١٤	١٤	٧٦٠
س٤	١٧	١٧	١٦	١٢	١٣	٦٠٠
الطلب	٥٠٠	٧٠٠	٦٤٠	٦٠٠	٣٢٠	

المطلوب: ايجاد التوزيع الامثل لانتاج المراعى الاربعة لتلبية احتياجات مراكز التوزيع الخمسة.

١٠- تقوم إحدى شركات النقل الجوى بجدولة رحلاتها الجوية الى بعض عواصم الدول الاجنبية بالاضافة الى بعض خطوط شبكتها الجوية وذلك عن طريق تحديد عدد الرحلات الجوية التى سيتم تشغيلها فى الموسم السياحى القادم وكذلك تحديد طراز الطائرة الذى سيتم تشغيله على كل من هذه الخطوط الجوية، ومن المعروف لدى القائمون بتخطيط الرحلات الجوية أن الربح المحقق من كل رحلة جوية على كل خط جوى يتوقف بالاضافة الى كثير من الاعتبارات الى اعتبار أساسى لايمكن تجاهله وهو طراز الطائرة. والجدول التالى يوضح ربح تشغيل كل رحلة جوية على كل خط جوى باستخدام كل طراز من طراز الطائرات المملوكة للشركة (الربح بالألف جنيه):

طراز الطائرة	الخط الجوى (س)	الخط الجوى (ص)	الخط الجوى (ع)	الخط الجوى (ل)	الخط الجوى (م)
بوينج ٧٠٧	٤٠٠	٣٠٠	٦٠٠	٢٠٠	١٠٠
بوينج ٧٣٧	٣٨٠	٣٦٠	×	١٨٠	٨٠
بوينج ٧٤٧	٦٠٠	٥٢٠	٩٠٠	×	×
إيرباص	٥٣٠	٥٠٠	٨٥٠	×	×

(x) هذه الاشارة تعنى ان طراز الطائرة لايصلح للتشغيل على ذلك الخط الجوى لأسباب فنية خاصة بمدى الطائرة.

فاذا علمت أن متوسط عدد الرحلات المتاحة من الطراز ٧٠٧ هى ١٢٠ رحلة، ومن الطراز ٧٣٧ ٣٠٠ رحلة، ومن الطراز ٧٤٧ عدد ٢٢٠رحلة، ومن الطراز الايرباص عدد ١٩٠ رحلة، كذلك تبلغ الرحلات المطلوب تشغيلها على كل خط جوى للوفاء بحركة الطلب على كل خط جوى كالآتى:

الخط الجوى (س)	٢٥٠	رحلة
الخط الجوى (ص)	١٥٠	رحلة
الخط الجوى (ع)	١٠٠	رحلة
الخط الجوى (ل)	٨٠	رحلة
الخط الجوى (م)	٦٠	رحلة

فاوجد بطريقة النقل الجدولة المثلى لطراز الطائرات للتشغيل على خطوط الشبكة الجوية.

١١- تمتلك احدى الشركات ٣ مصانع أ١، أ٢، أ٣ ذات طاقة انتاجية ٢٠٠، ٢٥٠، ٤٠٠ ألف وحدة على الترتيب، كما تمتلك أيضا ثلاثة مراكز توزيع ذات طاقة استيعابية ٣٥٠، ٣٠٠، ٢٠٠ ألف وحدة على الترتيب. وقد استدعيت لابداء رأيك فى كيفية توزيع انتاج المصانع الثلاثة على مراكز التوزيع المختلفة بهدف تخفيض اجمالى تكاليف النقل الى أدنى حد لها، علما بأن جميع الوحدات المنتجة متماثلة تماما، وأن تكاليف نقل الوحدة من كل مصنع الى كل مركز توزيع كانت كالآتى:

من المصنع (أ١) : ٥٠ قرشاً الى المركز ب١، ٧٠ قرشاً الى المركز ب٢، ١٠٠ قرشاً الى المركز ب٣.

من المصنع (أ٢) : ٩٠ قرشاً الى المركز ب١، ٨٠ قرشاً الى المركز ب٢، ٥٠ قرشاً الى المركز ب٣.

من المصنع (أ٣) ٦٠ قرشاً الى المركز ب١، ١٠٠ قرشا الى المركز ب٢، ٥٠ قرشاً الى المركز ب٣.

والمطلوب: أوجد جدول الشحن الأمثل على أن تقدم جدولا مبدئياً يتم اعداده باستخدام:

- طريقة الركن الشمالى الشرقى.
- طريقة أدنى تكلفة فى الصف.
- طريقة أدنى تكلفة فى العمود.
- طريقة أدنى تكلفة فى المصفوفة.
- طريقة فوجل التقريبية.
- طريقة رسل التقريبية.

"تابع" **الفصل الخامس**

مشكلة التخصيص

* مقدمة
* الطريقة المجرية للتخصيص
* طريقة الفرع والحد
* معالجة بعض الحالات الخاصة لمشكلة التخصيص

مشكلة التخصيص

The Assignment Problem

مقدمة

كما هو الحال بالنسبة لمشكلة النقل ، فإن مشكلة التخصيص تعتبر أيضاً حالة خاصة أخرى من مشاكل البرمجة الخطية ، وان كانت فى حقيقة الأمر لا تخرج عن كونها حالة من الحالات الخاصة لمشكلة النقل ، أى أننا يمكن أن نعتبرها مشكلة نقل ولكن ذات خصائص معينة مما يجعلنا نعاملها على أنها حالة خاصة تنتمى الى مشكلة النقل ، ولعل هذه الخاصية هى التى جعلتنا نجمع بينهما فى فصل واحد ، وتتمثل أهمية مشكلة التخصيص بأن لها مدى واسع فى معالجة المشاكل ومجال رحب للتطبيق فى مجال اتخاذ القرارات الادارية ، وهذا هو السبب وراء اهتمامنا بتحليل وعرض مفهوم وطبيعة هذه المشكلة والاسهاب فيها طالما أنها تفيد فى معالجة كثيراً من المشاكل اليومية والتخطيطية التى تواجه متخذى القرارات فى كافة أنواع المؤسسات على اختلاف طبيعتها وحجمها ومجال تخصصها .

وتقوم مشكلة التخصيص على مفهوم اساسى يتلخص فى العمل على تخصيص عدد من العناصر المفردة (أى ليست كميات ولكنها الوحدة الواحدة) على عدد من الاغراض أو الاستخدامات الفرديه ايضا بحيث يخصص مصدر معين على غرض معين ،و هذا المفهوم هو الذى جعل مشكلة التخصيص تعتبر حالة خاصة من مشاكل النقل، اذ أنه فى حين تتعامل مشكلة النقل مع اشباع احتياجات غرض معين بكميات معينة من مصدر أوعدة مصادر متاح بها تلك الكميات ، فإن مشكلة التخصيص تعمل على تخصيص مورد مفرد معين بالذات لاشباع حاجة مفردة معينة بالذات .

وفق هذا المفهوم فإن مشكلة التخصيص تهدف مثلاً – من بين ما تهدف اليه – الى الوصول الى أقل تكلفة – وقد يكون لها هدف

تخصيص الافراد على مختلف المهام ، أو تخصيص رجال البيع على المناطق البيعية ، أو تخصيص عقود الانشاءات على عدد من المقاولين ومجالات أخرى متعددة وكثيرة طالما كان من الممكن صياغتها بشكل يتفق مع طبيعة هذه المشكلة وأصبحت مشكلة التخصيص مفيدة فى حل الكثير من المشاكل الفرعية لمعظم مشاكل بحوث العمليات الكبيرة والمعقدة جداً .

وبهدف توضيح طبيعة مشكلة التخصيص وطبيعة المشاكل التى تتعامل معها والفرق بينها وبين مشكلة النقل ، سنسوق هنا مثالاً مبسطاً بغرض التوضيح وتحقيق هدف التبسيط والتوضيح معاً .

بفرض أن أحد مكاتب الاستشارات الادارية والبحوث قد تعاقد مع ثلاثة من العملاء كل منهم ينبغى أن يتولى مكتب الاستشارات القيام بدراسة تسويقية لمنتجاته ، ويريد مكتب الاستشارات أن يخصص مستشاراً علمياً لكل دراسة من الدراسات الثلاثة . وبفرض أنه يوجد حالياً ثلاثة مستشارين بالمكتب الاستشارى يعتبروا قد انتهوا من اعمال سبق تكليفهم بها وأنهم متاحون فعلاً لتولى مسئولية أى من تلك الدراسات الثلاثة . أى أنه يمكن تكليف كل منهم للقيام بمسئولية دراسة معينة ، فالمستشارون المتاحون ثلاثة ، والدراسات المطلوبة ثلاثة اذن يمكن أن يتولى مستشار معين القيام ببحث معين ، لو كان الامر بهذه البساطة ما وجدت مشكلة ، ولكن الامر ذات بعد أهم وهدف ينبغى تحقيقه وليس مجرد توزيع أعمال، ان توزيع العمل يتعين أن يستهدف ليس مجرد اسناد عمل لكل شخص بل الهدف أن تكون عملية التوزيع هذه تهدف الى الانتهاء من الاعمال على خير وجه وهذا هو الفرق بين مجرد انجاز العمل وبين الرغبة فى بلوغ الكفاءة فى الانجاز. ولذلك فإن ادارة المكتب الاستشارى وبما لديها من خبرة وسابق معرفة بالمستشارين الثلاثة المتاحين حالياً ، تعرف وتدرك تماماً أن الوقت الذى سيستغرقه كل منهم فى تنفيذ أى من تلك الدراسات الثلاثة سيختلف من دراسة لأخرى وفقاً للمقدرة

أى ان المشكلة التى تواجه ادارة المكتب الاستشارى هى الكيفية التى يتم بها تخصيص المستشارون الثلاثة المتاحين على تلك الدراسات الثلاثة بشرط أن يكون مجموع الوقت المستغرق للانتهاء منها جميعاً أدنى حد ممكن .

وحتى يمكن تبسيط تلك المشكلة ، فإنه من الافضل أن نحدد أولاً كافة البدائل المتاحة أمام الادارة ، أو بمعنى آخر أن نقف أولاً على كافة التخصيصات الممكنة بشرط أن يخصص مستشار واحد فقط لتنفيذ دراسة واحدة فقط والا يقوم بالدراسة الواحدة أكثر من مستشار واحد.

حيث أنه يوجد ثلاثة مستشارون فقط وثلاثة بحوث ، فإن الحلول البديلة والممكنة للتخصيص هى ٦ حلول (٣! = ٣×٢×١=٦)

فإذا رمزنا للمستشارون بالرموز أ ، ب ، جـ ، وللدراسات بالرموز س ، ص ، ع

فإن كافة التخصيصات المحتملة يمكن حصرها كالآتى :

١- أ س ، ب ص ، جـ ع

٢- أ س ، ب ع ، جـ ص

٣- ب س ، أ ص ، جـ ع

٤- ب س ، أ ع ، جـ ص

٥- جـ س ، ب ع ، أ ص

٦- جـ س ، ب ص ، أ ع

إن هذه الحلول هى بمثابة حصر شامل لكافة الحلول البديلة (التخصيصات البديلة) لمشكلة مكتب الاستشارات الادارية . ولكن التساؤل الهام هو : على أى اساس يتم اختيار الحل الأمثل؟ اذا كان الهدف هو مجرد اسناد اعمال الى اشخاص فإن الاختيار الجزافى العشوائى يكفى ، أما اذا كان مكتب الاستشارات الادارية يهدف من وراء البحث عن التخصيص الأمثل أن يكون مجموع الوقت المستغرق للانتهاء من الدراسات الثلاثة أقل ما يمكن ، فإن الاختيار الجزافى لا يكون فى صالح تحقيق هذا الهدف ، ومعنى ذلك ان معيار اختيار التخصيص الامثل هو تحقيق الهدف المراد بلوغه ، وحيث أن الهدف فى

لذا يتعين ان نتعرف على الزمن الذى يستغرقه كل مستشار فى انجاز كل دراسة . وبفرض أن مكتب الاستشارات الادارية قد أعد الجدول التالى للأزمنه المقدرة للانتهاء من كل دراسة اذا ما قام بانجازها كل مستشار :

المستشار	الازمنه التقديريه للانتهاء (باليوم)		
	(س)	(ص)	(ع)
(أ)	٢٠	٣٠	١٨
(ب)	١٨	٣٦	١٠
(جـ)	١٢	٢٨	٦

ولتوضيح مغزى الأزمنة الواردة بهذا الجدول نقول أنه بالنظر الى عمود الدراسة (س) يتبين أن المستشار(أ) يستطيع انجاز هذه الدراسة فى مدة قدرها عشرون يوماً ، أما اذا قام بنفس الدراسة المستشار(ب) فيمكن الانتهاء منها فى زمن مقداره ١٨ يوماً ،فى حين أن المستشار (جـ)يمكنه فى ١٢ يوماً فقط من اتمام هذه الدراسة . هذه الاختلافات فى الفترة الزمنية التقديرية راجعة كما أسلفنا الى اختلاف خبرة ومقدرة كل مستشار على انجاز دراسة معينة . وطالما أن الفترة الزمنية لانجازنفس الدراسة تختلف باختلاف من يؤديها ، إذن يتعين عند تخصيص هذه الدراسات أن يتم توزيعها بطريقة علمية تضمن لنا حسن التخصيص الأمثل .

لقد حددنا قبل ذلك حصر شامل لكافة الحلول البديلة أو كافة التخصيصات البديلة ، إذن يتعين علينا الان وبعد الوقوف على الازمنة التقديرية الواردة بالجدول السابق ان نقوم بتقييم الحلول البديلة لاختيار الحل الامثل الذى يعمل على الوصول بمجموع زمن الانتهاء من الدراسات الثلاثة الى الحد الادنى .

ويوضح الجدول التالى أزمنة الانتهاء من كل دراسة بالنسبة لكافة التخصيصات البديلة الممكنة :

المستشار	الحلول البديله للتخصيص					
	البديل الاول	البديل الثاني	البديل الثالث	البديل الرابع	البديل الخامس	البديل السادس
أ	س(٢٠)	س (٢٠)	ص (٣٠)	ع (١٨)	ص (٣٠)	ع (١٨)
ب	ص(٣٦)	ع (١٠)	س (١٨)	س (١٨)	ع (١٠)	ص (٣٦)
ج	ع (٦)	ص (٢٨)	ع (٦)	ص (٢٨)	س (١٢)	س (١٢)
مجموع الازمنه	٦٢	٥٨	٥٤	٦٤	٥٢	٦٦

أدنى وقت ممكن (البديل الخامس)

ومن هذا الجدول يتضح أن البديل الأمثل هو البديل الخامس ، ووفقاً لهذا الحل يتم تخصيص المستشار(أ)لتنفيذ الدراسة (ص) ، ويعهد للمستشار (ب) القيام بالدراسة (ع) ، أما الدراسة (س) فيخصص لها المستشار(ج)، ويكون اجمالى الوقت المقدر للانتهاء من تلك الدراسات الثلاثة ٥٢ يوماً .

ان المثال المبسط الذى عالجناه فى الجزء السابق يوضح مفهوم مشكلة التخصيص وماذا تهدف اليه ، إلا أن المدخل الذى استخدمناه فى الحل والذى كان يستند الى حصر كافة الحلول البديلة للتخصيص ثم اختيار أفضلها ، قد يكون مدخلاً مناسباً للتعامل والتطبيق مع تلك المشاكل من نوعية المثال الذى طرحناه فى هذا الجزء ، أى يكون مناسباً مع تلك المشاكل الصغيرة والبسيطة والتى لاتتجاوز كافة حلولها البديلة عن ستة حلول فقط ، إلا أنه يعتبر غير مناسب بل ومعقد وغير عملى عندما يستخدم أونفكر فى استخدامه للتعامل مع المشاكل الكبيرة التى هى السمة الغالبة فى دنيا الاعمال فى عصرنا الحديث .

فمثلا اذا كانت المشكلة التى قمنا بحلها تتضمن أربعة مستشارين وأربعة ابحاث ففى هذه الحالة تكون عدد الحلول البديلة الممكنة والواجب تقييما لاختيار أفضلها ٢٤ بديلاً (٤× ٣×٢×١ = ٢٤) ، أما اذا كانت المشكلة هى تخصيص ثمانية افراد على ثمانية مهام فسيوجد لها ٤٠٣٢٠ حلاً ممكنا (٨!) ، وطبيعى أنه من غير العملى ومن غير

المقبول أن نحاول حل مثل تلك المشكلة حلاً يدوياً ، وان كان ذلك غير عسير باستخدام الحاسبات الآلية طالما أن عدد الموارد ≥ ١٥ . أما أكثر من ذلك فانها مضيعة للوقت ومكلفة حتى باستخدام الحاسب الالى .

كما يجب أن نوضح هنا لماذا ذكرنا فى مقدمة هذا الجزء أن مشكلة التخصيص تعتبر حالة خاصة من مشكلة النقل ؟ ان ذلك كان بسبب أنه يمكن حل مشكلة التخصيص باستخدام طريقة النقل ، ويمكن فيما يلى أن نوضح كيف يمكن وضع مشكلة التخصيص التى كانت موضع مثالنا فى هذا الجزء على الصورة العامة لمشكلة النقل وكيفية محاولة حلها باستخدام منهج طريقة النقل.

الدراسة / المستشار	س	ص	ع	المتاح
أ	٢٠ ‏/ ١	٣٠	١٨	١
ب	١٨	٣٦ ‏/ ١	١٠	١
ج	١٢	٢٨	٦ ‏/ ١	١
المطلوب	١	١	١	٣ / ٣

ويمكن ايجاد الحل المبدئى لتلك المشكلة باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى كما هو واضح من الجدول السابق والذى يتبين منه أن الفترة الزمنية اللازمة للانتهاء من الدراسات الثلاثة وفقاً للحل المبدئى هى = ٢٠ X ١ + ٣٦ X ١ + ٦ X ١ = ٦٢ يوما

وهذا الحل المبدئى هو نفسه الحل الممكن الأول الذى توصلنا اليه من طريقة الحصر الشامل لكافة الحلول البديلة .

إلاأنه بالنظر الى الجدول المبدئى السابق يتبين أنه حل غير اساسى لأن عدد الخلايا المشغولة به (المتغيرات الاساسية) يقل عن [(عدد الاعمدة + عدد الصفوف) -١] . ولذلك وحتى يمكن اجراء تحسين على الحل المبدئى لابد أن نطبق الاسلوب الذى اتبعناه فى حالة انتكاس أو اعتلال مشكلة النقل ، أى أن نضيف الى الخلايا المشغولة خليتان ونشغلهما بكمية صفرية نرمز لها بالرمز (ش) ، وذلك حتى

نتغلب على مشكلة الاعتلال ومن ثم حلها بالطريقة العادية وصولاً للحل الامثل .

مما سبق يتضح أنه يمكن التعامل مع مشكلة التخصيص بأسلوب حصر كافة الحلول الممكنة، إلا أن هذا الاسلوب لا يصلح إلا لحل المشاكل الصغيرة وحتى لو لجأنا للحل عن طريق الحاسب الالى فإنه مضيعة للوقت وللتكلفة . كذلك فقد تبين أن حل مشكلة التخصيص باستخدام طريقة النقل إلا أنه سيؤدى حتما بانتكاس الحل بداية من الجدول الأول ووصولاً لجدول الحل الأمثل وهذا يتطلب بطبيعة الحال المزيد من العمليات الحسابية التى تستلزمها طبيعة الحل المنتكس .

وآزاء تلك الصعوبات ، فقد تبلورت اساليب جديدة حديثة أسهل وأسرع فى التعامل مع مشكلة التخصيص وهذا ما سنتناوله فى الجزء التالى ،اذ سنتناول بالمزيد من الشرح والتحيل لطريقتين من اهم الطرق المستخدمة لحل مشكلة التخصيص وهما :

١- الطريقة المجرية للتخصيص .

٢- طريقة الفرع والحد.

وفيما يلى كيفية استخدام هاتين الطريقتين فى معالجة مشاكل التخصيص:

اولا:الطريقة المجرية للتخصيص Hungarian Method of Assingnment

وهذه الطريقة تعرف فى بعض الاحيان بطريقة التخصيص Assingnment Methodأو أسلوب التدفق (أو الفيضان) Flood's technique، وهذه الطريقة تمتاز بأنها سريعة وفعالة جداً فى التعامل مع مشاكل التخصيص .

وتسير الطريقة المجرية لحل مشاكل التخصيص فى ثلاثة خطوات اساسية سنقوم بشرحها وتحليلها بالتتابع فيما يلى :

الخطوة الأولى : اعداد جدول تكلفة الفرصة : Opportunity- cost .

وتقوم الطريقة المجرية للتخصيص على تطبيق مفهوم تكلفة الفرصة ، وهذا المفهوم يعنى بصورة اجمالية موجزة أن تكلفة أى قرار

او أى موقف يتضمن حتماً تكلفة تلك الفرص التى تم التضحية بها عندما أخذنا ذلك الموقف أو اصدرنا ذلك القرار . ويلعب هذا المفهوم دوراً كبيراً عند التعامل مع العمليات الحسابية لحل مشكلة التخصيص .

أما كيفية استخدام تكلفة الفرصة فى خطوات الحل بالطريقة المجرية للتخصيص فإنه من المفيد أن نعرض مرة أخرى لجدول الأزمنة التقديرية لنفس المثال الذى تعرضنا له فى مقدمة هذا الجزء والخاص بمكتب الاستشارات الادارية والذى كان على الصورة التالية :

	(س)	(ص)	(ع)
(أ)	٢٠	٣٠	١٨
(ب)	١٨	٣٦	١٠
(جـ)	١٢	٢٨	٦

فإذا فرض وقررنا أن يتولى المستشار (أ) القيام بالدراسة (س) فإنه يمكنه أن ينتهى منها فى مدة مقدارها عشرون يوماً ، ولكن بالنظر الى عمود الدراسة (س) نجد أن المدير (جـ) كان فى امكانه الانتهاء من هذه الدراسة (س) فى مدة أقل مقدارها ١٢ فقط ، لذلك يمكن القول أن تخصيص المستشار (أ) للدراسة (س) قرار غير أمثل ،لأنه سيؤدى الى التضحية بفرصة مقدارها ٨ يوماً اذا ما خصص المستشار(أ) على الدراسة (س) وبتضحية مقدارها ٦ يوماً اذا ما خصص المستشار (ب) على نفس الدراسة . أى أنه بالنسبة للعمود (س) فإن أفضل من يتولى هذا البحث هو المستشار (جـ) أما اذا تولاه أى من (أ) ،(ب) فإن هناك تكلفة فرصة مقدارها ٨ يوماً بالنسبة للمستشار (أ) و ٦ يوماً بالنسبة للمستشار (ب) .

وعلى ذلك يمكن القول أننا لو قمنا بطرح أقل رقم فى العمود (س) من جميع الأزمنة بذلك العمود فإننا سنحصل على تكلفة الفرصة للدراسة (س) بالنسبة للمستشارين الثلاثة ، وبتكرار نفس العمل على العمود (ص) والعمود (ع)نحصل على جدول يمثل تكلفة الفرصة للدراسات الثلاثة بالنسبة للمستشارين الثلاثة .

من ناحية أخرى فكما كان لكل عمود تكلفة فرصة ، فإن لكل صف تكلفة فرصة أيضاً . فمثلاً يمكن للمستشار (أ) أن يقوم بتنفيذ أى من الابحاث والدراسات الثلاثة ، إلا أنه بالنظر الى صف المستشار(أ) نجد أنه أفضل قيامه بالدراسة (ع) لأنه سيستغرق فيها زمناً مقداره ١٨ يوماً ، أما اذا خصصناه للقيام بالدراسة (س) فإننا بذلك نكون قد فقدنا فرصة مقدارها ٢يوم ، وتكون تكلفة الفرصة ١٢ يوماً اذا خصصناه على الدراسة (ص).

أى أنه اذا كانت هناك تكلفة فرصة للأعمدة فأيضاً هناك تكلفة فرصة للصفوف . وحيث أن الخطوة الأولى فى الطريقة المجرية هى اعداد جدول تكلفة الفرصة ، فإنه يتعين إذن لتنفيذ هذه الخطوة أن نحسبها للصفوف والاعمدة ، وهذا يستلزم أن تمرالخطوة الأولى عل مرحلتين هما :

١- طرح أقل رقم بكل صف من جميع أرقام ذلك الصف وذلك بالنسبة لكل الصفوف الموجودة بالمشكلة:
وبتطبيق هذه المرحلة على جدول المشكلة التى نعالجها تكون النتيجة بعد العمليات الحسابية كالاتى :

	(س)	(ص)	(ع)
(أ)	٢	١٢	صفر
(ب)	٨	٢٦	صفر
(جـ)	٦	٢٢	صفر

٢- طرح أقل رقم بكل عمود (من الجدول الناتج من المرحلة السابقة وليس الجدول الأصلى) من أرقام ذلك العمود وذلك بالنسبة لكل الاعمدة الموجودة بالجدول : ويظهر الجدول الجديد بعد تلك العملية الحسابية على الصورة التالية :

	(س)	(ص)	(ع)
(أ)	صفر	صفر	صفر
(ب)	٦	١٤	صفر
(جـ)	٤	١٠	صفر

وهذا الجدول الذى توصلنا اليه بعد المرحلة الأولى والثانية يمثل جدول تكلفة الفرصة للمستشارين (صفوف) وللدراسات (أعمدة) ، أى أنه يمثل تكلفة الفرصة لكامل المشكلة .

وبطبيعة الحال فإننا نريد أن نصل الى ذلك التخصيص الذى يصل بتكلفة الفرصة الى (صفر) لأن معنى ذلك أن هذا التخصيص هو الامثل حيث تصل تكلفة الفرصة الى أدنى حد لها وهو الصفر . وحتى يستطيع القارىء أن يتابع هذا المفهوم والخطوات التالية وكيف اننا نسعى الى الوصول الى تكلفة فرصة صفرية لنتمكن من تحديد الحل الامثل . سنعيد فيما يلى الحلول الممكنة التى سبق استعراضها عند حصر كافة الحلول ولكن لن نضع أزمنتها الحقيقية بل نستبدلها بالازمنة الواردة بجدول تكلفة الفرص الناتج من المرحلة الثانية :

البديل الأول = أس ، ب ص ، جـ ع = صفر + ١٤ + صفر = ١٤

البديل الثانى = أس ، ب ع ، جـص = صفر + صفر + ١٠= ١٠

البديل الثالث = أ ص ، ب س ، جـ ع = صفر + ٦+ صفر = ٦

البديل الرابع = أ ع ، ب س ، جـص = صفر +٦ +١٠ = ١٦

البديل الخامس = أص ، ب ع ، جـس = صفر + صفر + ٤ = ٤

البديل السادس = أ ع ، ب ص ، جـس = صفر +١٤ + ٤ = ١٨

لقد سبق القول أن البديل الخامس كان هو الحل الامثل وكما هو واضح أيضاً وصلت تكلفة الفرصة له الى أقل حد بالمقارنة بالحلول الأخرى البديلة ، ولكن هدفنا بعد اجراء هذه الخطوة أن نستمر فى تخفيض مصفوفة تكلفة الفرصة حتى نصل بقيمة أحد الحلول الى الصفر ، وطالما لايوجد عنصر سالب فى المصفوفة فإن الحل الذى قيمته صفر يكون هو الحل الأمثل .ويمكن الاستمرار فى تخفيض مصفوفة تكلفة الفرصة وصولاً الى الحل الأمثل باتباع الخطوتين التاليتين :

الخطوة الثانية : تغطية جميع القيم الصفرية بالمصفوفة :

ونتعامل فى هذه الخطوة مع المصفوفة الناتجة من الخطوة الأولى والتى تعبرعن مصفوفة تكلفة الفرصة . وتتمثل الخطوة

الثانية فى تغطية جميع القيم الصفرية بها بأقل عدد ممكن من الخطوط المستقيمة الافقية أو الرأسية أو كلاهما معاً (ممنوع الخطوط القطرية) ، ونؤكد مرة أخرى أن التغطية بالخطوط المرسومة يتعين أن يتوافر فيها شرطان هما :

١- أنها خطوط أفقية أو رأسية أو كلاهما .

٢- أن يتم التغطية بأقل عدد ممكن منها .

فإذا اتضح أن أقل عدد ممكن من تلك الخطوط والتى أمكن بها تغطية جميع القيم الصفرية عددها يساوى عدد الصفوف أو عدد الأعمدة بالجدول ، نكو ن بذلك قد وصلنا الى الحل الأمثل ويبقى فقط تحديده وتعيينه ، أما اذا كان عدد تلك الخطوط أقل من عدد الصفوف (أو عدد الاعمدة) فإننا لم نصل بعد الى الحل الأمثل ويتطلب الأمر أن نسير الى الخطوة الثالثة فى الحل .

وبتطبيق تلك الخطوة على مصفوفة تكلفة الفرصة ، نجد أننا تمكنا من تغطية جميع القيم الصفرية بخطين فقط (كما هو مبين بالمصفوفة أدناه) ، وهذا يعنى أننا لم نصل بعد الى جدول الحل الأمثل حيث أن عدد الصفوف (أو عدد الاعمدة) ثلاثة :

	(س)	(ص)	(ع)
(أ)	صفر	صفر	صفر
(ب)	٦	١٤	صفر
(ج)	٤	١٠	صفر

أمكن تغطية جميع الخلايا الصفرية بخطين فقط.

الخطوة الثالثة : تحسين الحل

تبين من خلال اختبار المثالية الذى اجريناه فى الخطوة الثانية أن مصفوفة تكلفة الفرصة السابقة لا تمثل مصفوفة الحل الأمثل ، لذلك سيتم فى هذه الخطوة العمل على تحسين الحل والذى يتم فى مراحل متتالية كالاتى :

١ - تعيين أقل قيمة غير مغطاه فى المصفوفة كلها (بالنظر الى الجدول السابق يتبين أن أقل قيمة غير مغطاه هى القيمة (٤) .

٢- يتم طرح أقل قيمة غير مغطاه من جميع القيم غير المغطاه (وهى القيم ٦ ، ١٤ ، ٤ ، ١٠ ، وبعد الطرح تصبح تلك القيم على الترتيب ٢ . ١٠،صفر ،٦) .

٣- اضافة أقل قيمة غير مغطاة (وهى القيمة ٤) الى القيم الواقعة عند تقاطعات الخطوط المرسومة (سنجد أن التقاطع فقط عند الخلية أ ع ، اذن القيمة الصفرية عند التقاطع بعد اضافة القيمة ٤ اليها تصبح ٤) .

٤-باقى القيم المغطاة وغير الواقعة عند تقاطعات لايجرى عليها أى تعديل بل تكتب فى الجدول التالى كما هى دون تغيير .

وبعد تطبيق العمليات الحسابية السابقة على المصفوفة الناتجة من الخطوة الثانية ستظهر المصفوفة الجديدة على الصورة التالية :

	(س)	(ص)	(ع)
(أ)	صفر	صفر	٤
(ب)	٢	١٠	صفر
(جـ)	صفر	٦	صفر

بعد اتمام تلك الخطوة نعود مرة أخرى لتكرار الخطوة الثانية وهى خطوة اختبار المثالية ، والتى تتضمن تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط الافقية والرأسية ، وفيما يلى أعادة تصوير المصفوفة بعد اجراء التغطية:

	(س)	(ص)	(ع)
(أ)	صفر	صفر	٤
(ب)	٢	١٠	صفر
(جـ)	صفر	٦	صفر

وبالنظر الى المصفوفة السابقة نجد أنه أمكن تغطية جميع القيم الصفرية بها بعدد ثلاثة خطوط وهو أقل عدد أمكن التغطية به ، وطبقاً لقاعدة المثالية فحيث أن عدد الخطوط المرسومة تساوى عدد الصفوف (أو الاعمدة) فإننا نكون بذلك قد وصلنا الى مصفوفة الحل

الامثل ويتبقى فقط تعيين ذلك الحل الأمثل (التخصيص الأمثل) .ان الحل الأمثل للتخصيص وفق هذه الطريقة هو ذلك الحل الذى يكون مجموع تكلفة الفرصة له صفراً من واقع مصفوفة الحل النهائية .

ولكن يبقى سؤال وهو كيف يمكن تعيين الحل الأمثل من المصفوفة النهائية ؟

للتوصل الى ذلك نبحث عن ذلك الصف الذى يوجد به (صفر) واحد فقط ، فمثلاً الصف (أ) به قيمتين صفريتين ، اذن نتركه وننتقل الى الصف (ب) فسنجد أن به قيمة صفرية واحدة وهى الواقعة عند الخلية (ب ع) ، اذن يتم تخصيص المستشار (ب) للدراسة (ع) ،ثم نعود مرة أخرى للبحث عن صف به (صفر) واحد فقط سنجد أن الصف (أ) مازالت به قيمتين صفريتين ، والصف (ب) تم تخصيصه وانتهى الأمر ، والصف (جـ) يوجد به ظاهراً قيمتين صفريتين ، بينما الحقيقة أنه توجد به قيمة صفرية واحدة ، لأن الدراسة (ع) قد تم تخصيصها للمستشار (ب) فكأن العمود (ع) حذف مع صف (ب) ، وباستبعادهما من المصفوفة يكون الصف (جـ)به قيمه صفريه واحده و هى عند الخليه (ج س)،لذا يتم تخصيص المستشار (ج) للدراسة (س) . ثم نعاود الكرة مرة أخرى لنبحث عن صف به قيمة صفرية واحدة، سنجد أنه لم يعد أمامنا إلا الصف (أ) ، وهو فعلاً به قيمة صفرية واحدة (وذلك بعد استبعاد العمود س والصف جـ) واقعة عند الخلية (أ ص) لذلك يتم تخصيصها أى يخصص المستشار (أ) للدراسة (ص) .

وتلخيصاً للحل الامثل تظهر المصفوفة التالية التخصيص الأمثل وفقاً للخطوة الثالثة :

	(س)	(ص)	(ع)	التخصيص الأمثل	تكلفة الفرصة
(أ)	صفر	صفر	٤	(أ ص)	صفر
(ب)	٢	١٠	صفر	(ب ع)	صفر
(جـ)	صفر	٦	٦	(ج س)	صفر
					صفر

ويكون الوقت المستغرق للانتهاء من الدراسات الثلاثة أقل زمن ممكن وفقاً لهذا التخصيص ، ولحساب ذلك الزمن يتطلب العوده الى القيم الموجودة بالمصفوفه الاصليه لتحديد زمن كل تخصيص ، و من ثم الزمن الكلى للتخصيص الأمثل للمشكلة كلها ، اذ من الجدول الاصلى يمكن حساب الزمن كالاتى :

(أ ص) ٣٠ يوم
(ب ع) ١٠ يوم
(جـ س) ١٢ يوم

٥٢ يوماً

وهى نفس النتيجة التى توصلنا اليها سابقاً عند تطبيق طريقة الحصر الشامل للحلول البديلة .

مثال محلول :

- مطلوب تخصيص ثلاثة مهام هى أ، ب ، جـ للتشغيل على ثلاثة آلات هى س ، ص ، ع . بحيث تخصص مهمة واحدة فقط لكل آله، ولا تقوم الآله الا بتشغيل مهمة واحدة فقط ، علماً بأن التكلفة التقديرية لتشغيل كل مهمة على كل الة هى كالاتى :

	(س)	(ص)	(ع)
(أ)	٢٥	٣١	٣٥
(ب)	١٥	٢٠	٢٤
(جـ)	٢٢	١٩	١٧

الحل :

قد يكون من الافيد بغرض المراجعة والتطبيق العملى أن نقوم بحل تلك المشكلة بكلتا الطريقتين السابقتين :

(أ) الحل بطريقة حصر كافة الحلول البديلة :

حيث أن عدد المهام المطلوب تخصيصها على الآلات هى ثلاثة مهام ، وحيث أن عدد الآلات المطلوب التخصيص عليها أيضاً ثلاثة آلات أذن العدد الكلى لكافة الحلول البديلة الممكنة (٣!) أى ٣ × ٢× ١=٦ حلول بديلة وهذه الحلول البديلة وتكلفتها كالآتى :

البديل الأول = أ س ، ب ص ، جـ ع = ٢٥ + ٢٠ + ١٧ = ٦٢ ←—— الحل الأمثل

البديل الثانى = أص ، ب س ، جـ ع = ٣١ + ١٥+ ١٧ = ٦٣

البديل الثالث = أ ع ، ب س ، جـص = ٣٥ + ١٥ + ١٩ = ٦٩

البديل الرابع = أ س ، ب ع ، جـص = ٢٥ + ٢٤ + ١٩ = ٧٨

البديل الخامس = أ ص ، ب ع ، جـس = ٣١ + ٢٤ + ٢٢ = ٧٧

البديل السادس = أ ع ، ب ص ، جـس = ٣٥ + ٢٠ + ٢٢ = ٧٧

أى ان التخصيص الأمثل هو:

تخصيص المهمة (أ) للتشغيل على الآلة (س) وبتكلفة ٢٥

تخصيص المهمة (ب) للتشغيل على الالة (ص) وبتكلفة ٢٠

تخصيص المهمة (جـ) للتشغيل على الالة (ع) وبتكلفة ١٧

تكلفة التخصيص ٦٢

(ب) الحل باستخدام الطريقة المجرية :

سنعيد فيما يلى تصوير المصفوفة الأصلية للمشكلة تمهيداً لاجراء خطوات الحل عليها وفقاً للطريقة المجرية للتخصيص :

	(س)	(ص)	(ع)
(أ)	٢٥	٣١	٣٥
(ب)	١٥	٢٠	٢٤
(جـ)	٢٢	١٩	١٧

الخطوة الأولى : اعداد جدول تكلفة الفرصة :

ويتم اعداد هذا الجدول على مرحلتين :

١- طرح أقل قيمة فى كل صف من أرقام الصف

	(س)	(ص)	(ع)
(أ)	صفر	٦	١٠
(ب)	صفر	٥	٩
(جـ)	٥	٢	صفر

٢- طرح أقل قيمة فى كل عمود من أرقام العمود (على المصفوفة السابقة)

	(س)	(ص)	(ع)
(أ)	صفر	٤	١٠
(ب)	صفر	٣	٩
(جـ)	٥	صفر	صفر

الخطوة الثانية : اختبار المثالية :

وتتم عن طريق ايجاد أقل عدد من الخطوط المستقيمة (الأفقية أو الرأسية أو كلاهما) واللازمة لتغطية كل القيم الصفرية بالمصفوفة السابقة :

	(س)	(ص)	(ع)
(أ)	صفر	٤	١٠
(ب)	صفر	٣	٩
(جـ)		صفر	صفر

ويتبين من الخطوط المرسومة أن عددها اثنين فقط فى حين ان عدد الصفوف أو الاعمدة ثلاثة وهذا يعنى أن الحل غير أمثل ويحتاج الى تحسين

الخطوة الثالثة : تحسين الحل :

وتتم عن طريق:

١- تحديد أقل قيمة غير مغطاه (٣) .

٢- طرح هذه القيمة من جميع القيم غير المغطاه .

٣-اضافة هذه القيمة الى القيمة الواقعة عند تقاطعات الخطوط المرسومة .

٤- باقى القيم المغطاة غير الواقعة فى تقاطعات تنقل بدون تغيير،

وبعد اجراء هذه العمليات الحسابية ستظهر المصفوفة على الشكل التالى :

	(س)	(ص)	(ع)
(أ)	صفر	١	٧
(ب)	صفر	صفر	٦
(جـ)	٨	صفر	صفر

الخطوة الرابعة : اختبار المثالية :

سيتم تغطية جميع القيم الصفرية بالمصفوفة السابقة بأقل عدد ممكن من الخطوط ومن ثم ستظهر المصفوفة بعد التغطيه كالتالى :

	(س)	(ص)	(ع)
(أ)	صفر	١	٧
(ب)	صفر	صفر	٦
(جـ)	٨	صفر	صفر

ومن هذه التغطية يتضح أننا قد وصلنا الى الحل الأمثل وسيتم تحديده و تعيينه كالآتى:

١ـ البحث عن صف به صفر واحد فقطسنجد أنه الصف (أ) إذن يتم تشغيل المهمة (أ) على الآلة (س).

٢ـ البحث عن صف آخربه صفرواحد فقطو سنجد أنه الصف(ب)وذلك بعد أن تم إستبعاد العمود (س) لتخصيصه قبل

ذلك، إذن يتم تشغيل المهمه (ب) على الآله (ص).

٣ـ الصفر الوحيد الأخير هو بالصف (جـ) إذن سيتم تشغيل المهمه (جـ)على الآله (ع).

وتلخيصا" لما تقدم فإن التخصيص الأمثل و تكلفته كالآتى:

تخصيص المهمه (أ) للتشغيل على الآله (س) بتكلفة قدرها ٢٥

تخصيص المهمه (ب) للتشغيل على الآله (ص) بتكلفة قدرها ٢٠

تخصيص المهمه (حـ) للتشغيل على الآله (ع) بتكلفة قدرها ١٧

إجمالى تكلفه التخصيص الأمثل ٦٢

وهذا التخصيص الأمثل هو نفسه الذى توصلنا اليه من تطبيق طريقه حصر كافة الحلول الممكنه.

مثـــــــال(٢):

أعلنت شركة النصر لصناعة الأجهزة المنزلية عن مناقصة عامة بين المقاولين الانشائيين لتنفيذ عدد أربعة خطوط إنتاج كل منها يستخدم لانتاج نوعيه معينه من السلع،و كانت سياسة الشركه تسير على عدم إسناد أكثر من خط إنتاج واحد للمقاول وذلك للاسراع فى الانتهاء من التنفيذ،وكذلك عدم تجزئة تنفيذ خط الأنتاج بين أكثر من مقاول تحديدا" للمسؤلية ،و قدتلقت الشركة عروضا" للتنفيذ من أربعة موردين ،وبعد تفريغ العروض المقدمة أمكن تلخيص كافة المعلومات فى الجدول التالى :

(الارقام بالالف جنيه)

خط الانتاج / المقاول	الاول	الثانى	الثالث	الرابع
الاول	٢٠	٣٦	٣١	١٧
الثانى	٢٤	٤٣	٤٠	١٢
الثالث	٢٢	٤٠	٣٨	١٨
الرابع	٣٦	٣٩	٣٥	١٦

و المطلوب :أن ترشد المسؤلين بالشركة الى التخصيص الأمثل لتنفيذ خطوط الأنتاج على المقاولين الأربعة والذى يعمل على تخفيض إجمالى تكاليف التنفيذ الى أدنى حد ممكن و بشرط التقيد بسياسات الشركه المقرره فى هذا الخصوص .

الحــــــل

برغم أن المشكله التى نحن بصدد حلها الآن مكونه من أربعة صفوف و أربعة أعمدة أى أنها ليست كبيره بالمقارنه بغيرها من المشاكل التى يذخر بها عالم الأعمال فى تلك الأيام، الأن إستخدام طريقة حصر الحلول البديله ستكون صعبة الى حد كبير اذا ما قورنت بإستخدام طريقة تكلفة الفرصة،و حتى يقف القارىء على تلك الحقيقه سنقوم بحل هذا المثال بإستخدام الطريقتين و نترك له الحكم على أى الطريقتين أقدر فى كفائتها فى التعامل مع المشاكل الكبيرة وذلك أخذاً فى الاعتبار أن تلك المشكله بمقاييس اليوم ليست من ذلك النوع من المشاكل الكبيره الواقعيه.

(أ) الحــــل بإستخدام طريقة حصر الحلــــول المكنـــــة:

حيث أن المشكله مكونه من أربعة صفوف وأربعة أعمدة، إذن

مجموع الحلول الممكنه البديله لتلك المشكله = ٤! أى ٤X ٣X ٢X ١=٢٤ حلاً.و سنقوم بإعداد حصر شامل لكافة تلك الحلول البديله وحساب تكلفة التنفيذ لتلك الحلول ومن ثم إختيار الحل الذى يعطى أقل تكلفه إجمالية لتنفيذ خطوط الانتاج الأربعة.

و الجدول التالى يوضح حصراً بتلك الحلول البديله (٢٤ حلاً) و تكلفة كل حل ، ثم تعيين الحل الأمثل من بينها ، مع ملاحظة أننا رمزنا للمقاولون على الترتيب بالرموز أ ، ب ، حـ ، د ،ورمزنا لخطوط الانتاج بالرموز س ،ص ، ع ،ل ، على التوالى :

الحلول البديلة	المقـــاولـــون أ	ب	ج	د	اجمالي تكلفه التنفيذ بالالف جنيه	
١	س (٢٠)	ص (٣٤)	ع (٢٨)	ل (١٦)	١٠٨	
٢	س (٢٠)	ص (٣٤)	ل (١٨)	ع (٣٥)	١٠٧	
٣	س (٢٠)	ع (٤٠)	ص (٤٠)	ل (١٦)	١١٦	
٤	س (٢٠)	ع (٤٠)	ل (١٨)	ص (٣٩)	١١٧	
٥	س (٢٠)	ل (١٢)	ص (٤٠)	ع (٣٥)	١٠٧	
٦	س (٢٠)	ل (١٢)	ع (٢٨)	ص (٣٩)	١٠٩	
٧	ص (٣٦)	س (٢٤)	ع (٢٨)	ل (١٦)	١١٤	
٨	ص (٣٦)	س (٢٤)	ل (١٨)	ع (٣٥)	١١٣	
٩	ص (٣٦)	ع (٤٠)	س (٢٢)	ل (١٦)	١١٤	
١٠	ص (٣٦)	ع (٤٠)	ل (١٨)	س (٣٦)	١٣٠	
١١	ص (٣٦)	ل (١٢)	س (٢٢)	ع (٣٥)	١٠٥	
١٢	ص (٣٦)	ل (١٢)	ع (٢٨)	س (٣٦)	١٢٢	
١٣	ع (٣١)	س (٢٤)	ص (٤٠)	ل (١٦)	١١١	
١٤	ع (٣١)	س (٢٤)	ل (١٨)	ص (٢٩)	١١٢	
١٥	ع (٣١)	ص (٣٤)	س (٢٢)	ل (١٦)	١٠٣	الحل الامثل
١٦	ع (٣١)	ص (٣٤)	ل (١٨)	س (٣٦)	١١٩	
١٧	ع (٣١)	ل (١٢)	س (٢٢)	ص (٣٩)	١٠٤	
١٨	ع (٣١)	ل (١٢)	ص (٤٠)	س (٣٦)	١١٩	
١٩	ل (١٧)	س (٢٤)	ص (٤٠)	ع (٣٥)	١١٦	
٢٠	ل (١٧)	س (٢٤)	ع (٢٨)	ص (٣٩)	١١٨	
٢١	ل (١٧)	ص (٣٤)	س (٢٢)	ع (٣٥)	١٠٨	
٢٢	ل (١٧)	ص (٣٤)	ع (٢٨)	س (٣٦)	١٢٥	
٢٣	ل (١٧)	ع (٤٠)	س (٢٢)	ص (٣٩)	١١٨	
٢٤	ل (١٧)	ع (٤٠)	ص (٤٠)	س (٣٦)	١٣٣	

من إستعراض الجدول السابق فإنه فى إعتقادنا أن القارىء قد وقف بنفسه على الحقيقة التى ذكرناها وهى أن الحل بطريقة حصر الحلول الممكنه تزداد تعقيداً كلما كبرت حجم المشكلة،ولعل هذا ما جعلها طريقة مهجورة فى الإستخدام فى وقتنا الحاضر الا اذا كانت لمشكله صغيره ويمكن التعامل معها يدويا. كما أن هذا يؤكد من ناحية أخرى السبب الرئيسى وراء إنتشار طريقة تكلفة الفرصة فى حل مشاكل التخصيص.

(ب)الحــل بطريقة تكلفة الفرصة:

نعيد فيما يلى المصفوفة الأصلية للمشكلة لإجراء خطوات تلك الطريقة عليها

	(س)	(ص)	(ع)	(ل)
(أ)	٢٠	٣٦	٣١	١٧
(ب)	٢٤	٣٤	٤٠	١٢
(حـ)	٢٢	٤٠	٣٨	١٨
(د)	٣٦	٣٩	٣٥	١٦

الخطوة الأولى : إعداد جدول تكلفه الفرصة:

ويتم إعداد هذا الجدول على مرحلتين :

المرحلة الأولى :جدول تكلفة الفرصة للصفوف : و ذلك عن طريق طرح أصغر رقم فى كل صف من جميع أرقام هذا الصف ،وبإجراء هذه العملية الحسابية يظهر جدول تكلفه الفرصة للصفوف كالآتى :

	(س)	(ص)	(ع)	(ل)
(أ)	٣	١٩	١٤	صفر
(ب)	١٢	٢٢	٢٨	صفر
(حـ)	٤	٢٢	٢٠	صفر
(د)	٢٠	٢٣	١٩	صفر

المرحله الثانيه: جدول تكلفة الفرصة للأعمدة: ويتم ذلك عن طريق طرح أصغر رقم فى كل عمود من جميع أرقام العمود وذلك بالنسبة للمصفوفة التى وصلنا اليها من المرحلة الأولى، وبإجراء تلك

العمليه الحسابية ستظهر مصفوفة تكلفة الفرصة للصفوف والأعمدة كالآتى :

	(س)	(ص)	(ع)	(ل)
(أ)	صفر	صفر	صفر	صفر
(ب)	٩	٣	١٤	صفر
(حـ)	١	٣	٦	صفر
(د)	١٧	٤	٥	صفر

الخطوة الثانيه: اختبار المثاليه

وتعنى التأكد عما اذا كنا وصلنا الى الحل الأمثل أم لا؟ وهذا يستلزم القيام بتغطية جميع القيم الصفريه بأقل عدد ممكن من الخطوط المستقيمه (الأفقيه أو الرأسيةأو هما معاً).و ستظهر المصفوفه بعد عملية التغطية على الشكل الآتى:

	(س)	(ص)	(ع)	(ل)
(أ)	صفر	صفر	صفر	صفر
(ب)	٩	٣	١٤	صفر
(جـ)	١	٣	٦	صفر
(د)	١٧	٤	٥	صفر

ويظهر من تلك المصفوفه أنه أمكن تغطيه كافة القيم الصفريه بعدد خطين فقط ، و حيث أن عدد الصفوف (أو الأعمدة) أربعة ، آذاوفقا لقاعدة الأمثليه فإن المصفوفه الحالية لا تقدم الحل الأمثل بل يتعين العمل على تحسين الحل ومواصلة اجراءات التحسين و صولا للحل الأمثل .

الخطوة الثالثة :يتم طرح أصغر قيمة غير واقعه على أى من الخطوط المرسومة من كل قيمةبين قيم المصفوفة التى لم تغطيها الخطوط المرسومة،و إضافه نفس تلك القيمه لتلك القيم الواقعه عند تقاطعات الخطوط المرسومة،و تبقى باقى القيم الأخرى كماهى دون

تغيير.

ومن المصفوفة التى إنتهينا اليها مباشرة نجد أن أصغر قيمة غيرواقعه على أى من الخطوط المرسومة هى القيمة(١)،لذلك يتم طرح تلك القيمة من كل القيم الأخرى غير الواقعة على الخطوط و إضافة القيمة (١) ذاتها الى القيمة (صفر) وهى القيمه الواقعة عند تقاطع الخطين المرسومين، و بإنتهاء تلك الخطوة نكون قد وصلنا الى المصفوفة التالية بعد تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد من الخطوط.

	(س)	(ص)	(ع)	(ل)
(أ)	صفر	صفر	صفر	
(ب)	٨	٢	١٣	صفر
(جـ)	صفر	٢	٥	صفر
(د)	١٦	٣	٤	صفر

ومن هذه المصفوفه يتضح أنه أمكن تغطية كافة القيم الصفرية بعدد ثلاثة خطوط مستقيمه وهو أقل عدد من الخطوط كافى لتغطية تلك القيم .و معنى ذلك أننا لم نصل بعد الى الحل الأمثل لأن المطلوب فى هذة المشكلة أن تكون عدد الخطوط المستقيمة التى تغطى جميع الأصفار أربعة لأن عدد الأعمدة (٤) و أيضاً عدد الصفوف أربعة،و هذا يستلزم أن نكرر الخطوة الثالثة مرة أخرى، أى نحدد أصغر قيمة غير واقعه على أى من الخطوط المرسومة و سنجد أنها القيمة (٢)،و يتم طرح تلك القيمة من كل القيم الغير مغطاة بخطوط وإضافة نفس القيمة الى القيم الموجودةعند تقاطعات الخطوط .و بتطبيق تلك الخطوة نكون قد وصلنا الى المصفوفة التالية بعد تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد من الخطوط.

	(س)	(ص)	(ع)	(ل)
(أ)	صفر	صفر	صفر	٢
(ب)	٦	صفر	١١	صفر
(جـ)	صفر	صفر	٣	٢
(د)	١٤	١	٢	صفر

ومن هذه المصفوفه يتضح أنة أمكن تغطية جميع القيم الصفرية بعدد أربعة خطوط ومعنى ذلك أننا وصلنا الى الحل الأمثل ويبقى فقط تعيين ذلك الحل .

- إيجاد الصف الذى توجد به قيمة صفرية واحدة وتخصيص المقاول على ذلك المشروع وسنجد أن صف المقاول (د) هو الصف الوحيد الذى توجد بة قيمة صفرية واحدة لذلك يتم تخصيص المقاول (د) لتنفيذ المشروع (ل).
- بتخصيص المقاول (د) للمشروع (ل) يكون العمود (ل) قد أغلق ثم نبحث عن الصف الأخر الذى به قيمه صفرية واحدة بعد إغلاق العمود (ل) سنجد أن ذلك الصف هو صف (ب) و القيمه الصفرية الموجودة به توجد عند تقاطعه مع العمود (ص)وذلك يعنى أن يتم تخصيص المقاول (ب) لتنفيذ المشروع (ص).
- بعد إغلاق العمود (ل) و العمود (ص) نبحث عن الصف الذى توجد به قيمة صفرية واحدة نجد أنه الصف (حـ) و القيمة الصفرية توجد عند تقاطعة مع العمود (س) إذن يتم تخصيص المقاول (حـ) لتنفيذ المشروع (س).
- بعد إغلاق الأعمدة (س،ص،ل) لم يعد لدينا الا عمود واحد هو عمود المشروع (ع) ولم يعد لدينا الا مقاول واحد هو المقاول (أ) وسنجد أن نقطة التقاطع بين الصف (أ) و العمود (ع) = صفر . إذن يتم تخصيص المقاول (أ) لتنفيذ المشروع (ع) .

∴ الحل الأمثل لتخصيص المقاولون على المشروعات هو:

يخصص المقاول (أ) لتنفيذ المشروع (ع) بتكلفة مقدارها ٣١ ألف جنيه
يخصص المقاول (ب) لتنفيذ المشروع (ص) بتكلفة مقدارها ٣٤ ألف جنيه
يخصص المقاول (حـ)لتنفيذ المشروع (س) بتكلفة مقدارها ٢٢ ألف جنيه
يخصص المقاول (د)لتنفيذ المشروع (ل) بتكلفة مقدارها ١٦ ألف جنيه

إجمالى تكلفة تنفيذ المشروعات الأربعة ١٠٣ ألف جنيه

وهى نفس النتيجه التى توصلنا اليها بإستخدام طريقة حصرالحلول البديلة.

تلخيص للطريقة المجرية لمشاكل التخصيص.

١ـ تعيين جدول تكلفة الفرص كالآتى:

أـ يتم إختيار أقل تكلفة فى كل صف ويتم طرحها من كل تكلفة فى ذلك الصف

ب ـ يتم إستخدام المصفوفة الناتجة من الخطوة (أ) وإختيار أقل تكلفة فى كل عمود ويتم طرحها من كل تكلفة فى ذلك العمود .

٢ـ يتم تحديد عما إذا قد وصلنا الى الحل الأمثل أم لا ويتم ذلك عن طريق رسم أقل عدد من الخطوط المستقيمه (الأفقية أو الرأسية) التى تغطى جميع القيم الصفرية بالمصفوفة، فإذا إتضح أن عدد تلك الخطوط أقل من عدد الأعمدة (أومن عدد الصفوف) فإن الحل الأمثل لم نصل اليه بعد ويلزم الأمر التحرك الى الخطوة التالية.

٣ـ إجراء تعديل على مصفوفة تكلفة الفرصة التى وصلنا اليها فى الخطوة الثانيه:

أـ إختيار أصغر رقم من مجموعة الأرقام التى لا تغطيها الخطوط المرسومة وطرح ذلك الرقم من كل رقم غير مغطى بالخطوط المرسومة.

ب ـ إضافة نفس ذلك الرقم الى أ ى رقم يقع فى تقاطع الخطوط المرسومة اما باقى القيم المغطاة وغير الواقعة على تقاطعات تستمر كما هى دون تعديل .

٤ـ يتم تكرار الخطوة الثانية حتى الوصول الى الحل الأمثل.

ثانياً: طريقة الفرع والحد
Branch and-Bound Method

إن الأمثلة التى أوردناها فى الجزء المتقدم وخاصة عند تطبيق طريقة حصر الحلول الممكنه كانت أمثلة صغيرة بمعنى أن كافه الحلول الممكنه لأى منها يمكن حصره و تحديده و التعامل معه بيسر وسهولة لانخفاض عددها. ولذلك كان من المناسب إستخدام تلك الطريقة لحل تلك الأمثلة الصغيرة و من ثم إنتقاء ذلك الحل (البديل) الأمثل (الأقل تكلفة مثلاً). ولقد نتج عن تطوير الحاسبات الآليه و ما لها من سرعة عالية فى إيجاد نتائج حل المشاكل الكبيرة ان أعتقد البعض أن تطبيق طريقة حصر الحلول الممكنه كطريقة لحل مشاكل التخصيص إنها عملية فى مثل تلك الحالات ،وا لحقيقة أن هذا إعتقاد خاطىء ويكفى أن نبرهن على خطأ ذلك الأعتقاد عندما نرى التضخم الرهيب لعدد الحلول الممكنه عندما تزيد حجم المشكله عندئذ سنتأكد أن تطبيق طريقه حصر الحلول الممكنه عمليه مستحيلة أو على الأقل غير عملية إقتصاديا" فعلى سبيل المثال اذا كانت المشكله تتضمن عشرة متغيرات وكل منها له عشرة قيم ممكنه فقط (مثلا" تخصيص عدد عشرة أفراد على عشرة أبحاث) ، ففى هذه الحالة سيوجد عدد من الحلول الممكنه يساوى ١٠!! أى ١٠ X٩X ٨X٧X٦X٥X٤X٣X٢X ١= ٣٦٢٨٨٠٠ حلا" ممكنا و بطبيعة الحال فإن إستخدام الحاسب الآلى فى إجراء العمليات الحسابية وحصر كل الحلول الممكنه لمشكلة فى مثل هذا الحجم عملية مكلفة و مستهلكة للوقت.

و نتيجة لما تقدم فقد ظهر تقدم كبير فى التعامل مع مشكله التخصيص فقد ظهرت طريقة أوأسلوب حديث فى هذا المجال أطلق علية طريقة الفرع و الحد Brache - and pound method وعلى الرغم من أن هذا الأسلوب يستخدم حصر الحلول الممكنه الا إنه فعال جدا" بسبب انه لا يتعامل مع كل تلك الحلول الممكنه ولكنه يختبر فقط جزء صغيرجدا" من العدد الكلى للحلول الممكنه و الحقيقة أن ما كتب فى ذلك

الموضوع مازال قليل نسبيا" وذلك على الرغم من الزيادة السريعه فى تطبيقاتة على مجالات متنوعه .و ليس المهم الآن أن نقوم بشرح كافة التعديلات الدقيقة لذلك الأسلوب ولكن سنكتفى بتوضيح كيفية تطبيقة لحل مشاكل التخصيص.

إن المفهوم الأساسى الذى يرتكز عليه هذا الإسلوب هو انه يعمل على تقسيم منطقة الحلول الممكنه الى أجزاء أصغر فأصغر الى أن نصل الى الحل الواحد (الأمثل) الذى يعمل على تخفيض (أو تعظيم) دالة الهدف الموضوعة (سبق أن تعرضنا لمفهوم منطقة الحلول الممكنه فى تناولنا للطريقة البيانية فى البرمجة الخطية).

ولتوضيح كيفية حل مشاكل التخصيص بإستخدام اسلوب الفرع والحد سنفترض المثال التالى.

بفرض أنه يراد تخصيص مجموعة من المهام على عدد من الآلات بحيث تصل تكلفة ذلك التخصيص الى حدها الأدنى (اقل تكلفة ممكنه) ، والجدول التالى يبين تكلفة أداء كل مهمة على كل الة:

تكلفة تنفيذ كل مهمة على كل آلة

الآلة / المهمه	١	٢	٣	٤
أ	٩٠	٥	٤٨	٧٣
ب	٦٩	١٤	٨٣	٨٦
ج	٥٧	٩٣	٢	٧٩
د	٧	٧٧	٧٥	٢٣

الحل

لحل هذه المشكلة بإستخدام طريقة الفرع و الحد سنسير فى الخطوات الأربع التالية.

الخطوة الأولى: برغم أن تلك المشكلة التى أمامنا لها ٢٤ حلاً ممكنا (٤!) الا أننا فى الخطوة الأولى سنوجد الحد الأدنى Alower Bound للتكلفة الأجمالية للتخصيص وبصرف النظر عن تلك الحلول الممكنة وعما اذاكان ذلك الحل ذات الحد الأدنى للتكلفه يقدم حلاً ممكناً أم لا ، إنما الشرط الوحيد المطلوب مراعاته فى تلك الخطوة ان نعين ذلك الحل ذات الحد الأدنى للتكلفة والذى لايمكن أن تهبط التكلفة عنه إطلاقا و مرة أخرى نقول ان التخصيص الذى يحقق هذا الحد الأدنى للتكلفة ليس من الضرورى أن يكون حلاً ممكنا Fesible solution اذ ربما يتضمن هذا الحل تخصيص أكثر من مهمة على آله واحدة.و الحقيقة إنه عند هذة النقطة قد يتساءل القارىء وما أهمية تعيين ذلك الحل طالما إنه قد يكون غير ممكن ؟ للإجابة على ذلك نقول إن الغرض الوحيد من حساب أقل حد ممكن هو مجرد إيجاد أدنى مستوى للتكلفة لا يمكن أن تنخفض بعدة.و هذا سيكون نقطة إنطلاق لخطوات تالية.

و أسرع وسيلة لايجاد أقل تكلفة ممكنه هى ببساطة جمع أقل تكلفة فى كل عمود من أعمدة المصفوفة و أيضاً بصرف النظر عن كون ذلك حل ممكن أم لا.

ففى العمود الأول نجد أن أقل تكلفه به هى ٧ (تخصيص د للآله ١)

وفى العمود الثانى نجد أن أقل تكلفه به هى ٥ (تخصيص أ للآله ٢)

وفى العمود الثالث نجد أن أقل تكلفه به هى ٢ (تخصيص جـ للآله ٣)

وفى العمود الرابع نجد أن أقل تكلفـه به هى ٢٣ (تخصيص د للآله ٤)

إذن أقل تكلفة ممكنه هى ٣٧

ومرة أخرى فإن الحد الأدنى للتكلفه ليس شرط أن ينتج عنه

دائما حل ممكن ، اذ يتبين ان أدنى تكلفه فى المثال السابق (٣٧) هو حل غير ممكن لأن المهمه (د) قد تم تخصيصها على آلتين (١ ، ٤) فى حين أن المهمه (ب) لم يتم تخصيصها ، و لذلك فإن الأمر يتطلب أن نواصل السير لنجد الحل الممكن ذات أقل تكلفه.

الخطوة الثانيه: وفى تلك الخطوة نقسم مراحل البحث عن الحلول ، ويتم ذلك على أساس أن نفترض أننا سنخصص كل قيمه على التوالى على الآله (١) ، و نحسب الحد الأدنى لتكلفة التخصيص فى كل حالة وعما اذا كان الحل ممكنا أم لا والجدول التالى يوضح نتيجة اجراء تلك الخطوة.

الحد الأدنى لتكلفة التخصيص عند تخصيص كل مهمة على التوالى على الآلة (١)

التخصيص	الحد الادنى للتكلفه	ملاحظات
المهمه (أ) تنفذ علي الاله ١	٩٠+١٤+٢+٢٣=١٢٩	الحل ممكن
المهمه (ب) تنفذ علي الاله ١	٦٩+٥+٢+٢٣=٩٩	الحل ممكن
المهمه (ج) تنفذ علي الاله ١	٥٧+٥+٤٨+٢٣=١٣٣	الحل غير ممكن
المهمه (د) تنفذ علي الاله ١	٧+٥+٢+٧٣=٨٧	الحل غير ممكن

وقد تم إعداد ذلك الجدول كالآتى:

١ـ حيث إننا إفترضنا فى الصف الأول ان المهمه (أ) سيتم تنفيذها على الآلة (١) ، لذلك نبحث عن تكلفة ذلك التخصيص فى المصفوفه الأصليه فنجدها ٩٠. وبما إننا إفترضنا تخصيص المهمه (أ) لتنفذ على الآله (١) ، أذن فهى لن تخصص على أى من الآلا ت الأخرى أى أن الصف الأول بالمصفوفة الأولى قد أغلق ، وكذلك

حيث أن الآله (١) هى التى ستنفذ المهمه (أ) إذن فهى لن تقوم بتنفيذ إى من المهام الأخرى (ب ،جـ ، د) أى أن العمود الأول من المصفوفه الأصليه أغلق هو الآخر.

٢ـ يتم البحث عن أقل تكلفه فى العمود الثانى بإستثناء الرقم الأول (لانه يقع فى الصف الأول الذى أغلق) و سنجد أن أقل تكلفه هى ١٤ (أى تنفيذ المهمه ب على الآله ٢) ، يتم أخذها فى الأعتبار وإضافة تلك التكلفه عند حساب تكلفه التخصيص.

٣ـ يتم البحث عن اقل تكلفه فى العمود الثالث بإستثناء الرقم الأول و سنجد أن أقل تكلفه هى (٢) وهى تمثل تخصيص المهمة (حـ) للتنفيذ على الآله (٣)

٤ـ يتم البحث عن أقل تكلفه فى العمود الرابع بإستثناء الرقم الأول نجد أن أقل تكلفة بذلك العمود هى (٢٣) والتى تمثل المهمه (د) للتنفيذ على الآله (٤) إذن بجمع الحدود الدنيا للتكلفه بكل عمود وذلك اذا ما تم تخصيص المهمه (أ) على الآله (١) يكون الحد الأدنى للتكلفه:

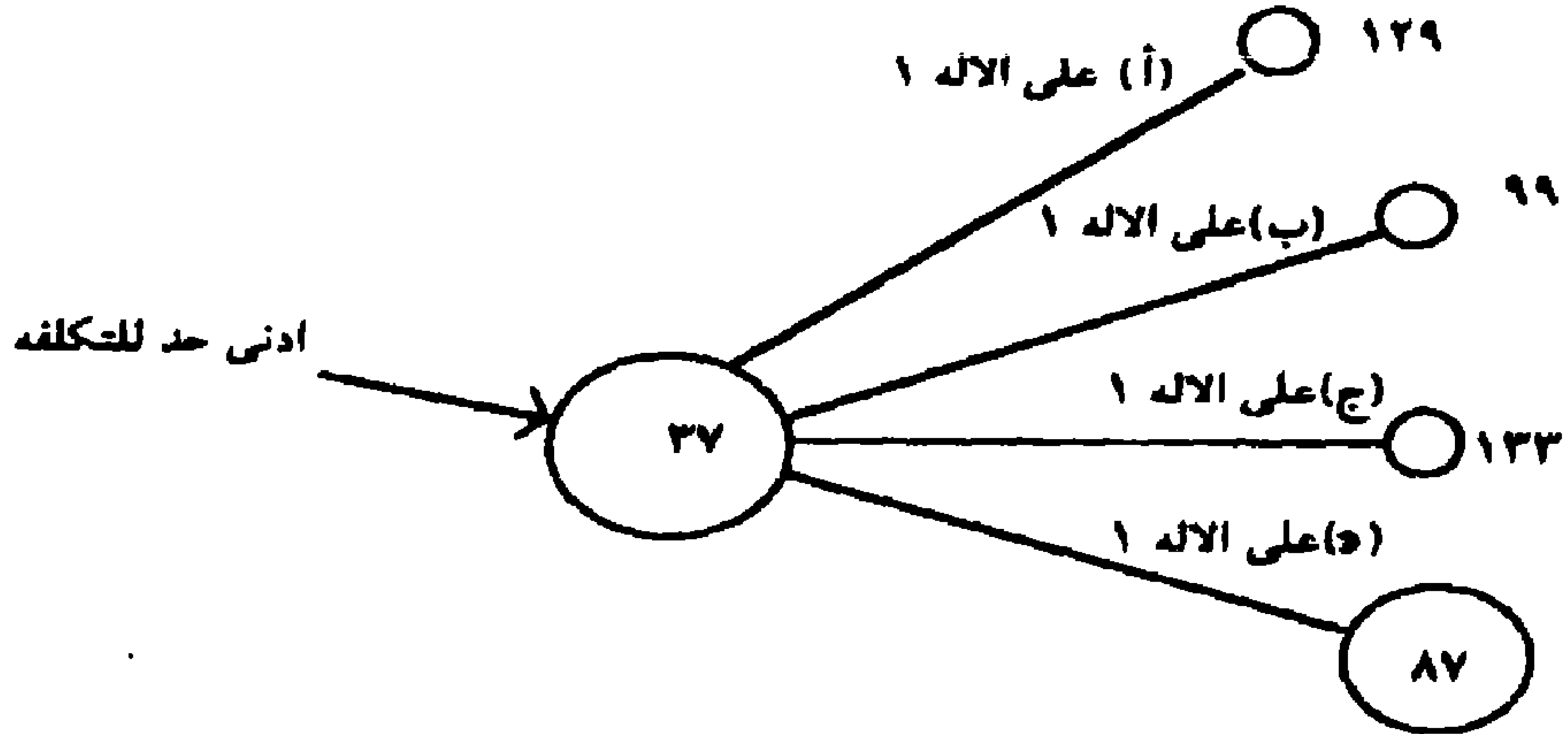
تخصيص المهمه(أ) على الآله (١)	٩٠
تخصيص المهمه(ب) على الآله(٢)	١٤
تخصيص المهمه (حـ) على الآله (٣)	٢
تخصيص المهمه(د) على الآله (٤)	٢٣

الحد الادنى للتكلفه ١٢٩

وهذا التخصيص لو دققنا وأمعنا النظر فيه سنجد أنه حل ممكن .و الحقيقه إننا ما قصدنا فى هذه المرحله ان نبحث عن حل ممكن ، و لكن كنا نبحث عن الحد الأدنى للتكلفه . كذلك الحال سنجد أن الحل الثانى بالمصادفه كان حلا ممكناً بخلاف الحال فى التخصيص الثالث و الرابع فهما حلان غير ممكنان.و مرة أخرى نقول إن محور تركيزنا هو تحديد الحد الدنى للتكلفه بصرف النظر عن كون الحل ممكن أو غير ممكن لأننا سنواصل السير بعد ذلك لتحديد الحل الممكن والأمثل

والذى يصل بالتكلفه الى حدها الأدنى .

و يمكن تمثيل الخطوتين الأولى و الثانية فى صورة فروع شجرة كالآتى:



و نلاحظ أن القيمه ٣٧ بالدائرة فى بداية الشجرة تمثل الحل الذى يصل بالتكلفه الى أدنى حد لها و الذى تم التوصل الية من الخطوة الأولى (يلاحظ أننا لم تأخذ به لانه حل غير ممكن) ، و كذلك فإن الحلول الأربعه التى تم التوصل اليها فى الخطوة الثانيه تم تمثيلها كفروع منبثقة من قيمه الحل بالخطوة الأولى مع ملاحظة أننا وضعنا أصغر قيمه من تلك الحلول الأربعة داخل دائرة.

الخطـوة الثالثـة:

بنفس المنطق الذى أخذنا به فى الخطوات السابقه فإن تركيزنا سينصب فقط على فرع الشجرة الأقل تكلفه و الناتج من الخطوة السابقة مباشرة (الخنطوة الثانيـه) والذى يتمثل فى تخصيص المهمه (د) على الاله (أ) و مع العلم ان هذا الفرع ذو أقل تكافه (٨٧) لا يمثل تخصيصاً ممكنا Feasible assignment إلا أن ذلك لا يمنعنا من البحث عن حلول أخرى أقل تكلفه تنبثق من ذلك الفرع وعلى أن تكون ممكنه فى الوقت نفسه.

تبدأ تلك الخطوة بالفرع الذى يعطى أقل تكلفة وهو (٨٧) و الذى يمثل تخصيص المهمه (د) على الآله (١) (من الخطوة الثانية) ،

و على ذلك ففى هذه الخطوة نقوم بتخصيص كلا من المهام الثلاثه الباقية (أ،ب،حـ) على الآله (٢) بالتناوب ثم نقوم بجمع أقل تكلفه فى كل من العمودين الآخرين بصرف النظر عما إذا كان التخصيص الناتج ممكن أم لا .و فيما يلى كيفيه إجراء العمليات الحسابية لتلك الخطوة.

الفـــــرع الأول:

	أقل تكلفة
من الخطوة الثانيه تم تخصيص المهمه (د) على الآله (١)	٧
يتم التخصيص فى الفرع الأول المــهمـــه(أ) على الآله (٢)	٥
تخصيص المهمه (حـ) على الآله (٣) فى العمود الثالث بعد إستبعاد صف (د) وصف (أ)	٢
تخصيص المهمه (حـ) على الآله (٤) فى العمود الرابع بعد إستبعاد صف (د)وصـف (أ)	٧٩
الحد الادنى للتكلفة =	٩٣

أى أن التخصيص فى هذا الفرع يكون:

المهمه (د) على الآله (١)

المهمه (أ) على الآله (٢)

المهمه (حـ) على الآله (٣)

المهمه (حـ) على الآله (٤)

و التكلفة فى هذه الحالة هى ٩٣ ولكن يلاحظ أنه حل غير ممكن .

الفرع الثانـــى:

		أقل تكلفـــه
من الخطوة الثانية يتم تخصيص المهمه (د) على الآله	(١)	٧
من الخطوة الثالثة يتم تخصيص المهمه (ب) على الآله	(٢)	١٤
يتم تخصيص المهمه (حـ) على الآلـه	(٣)	٢
يتم تخصيص المهمه (أ) على الآله	(٤)	٧٣
الحـــد الأدنـــى للتكلفـــه =		٩٦

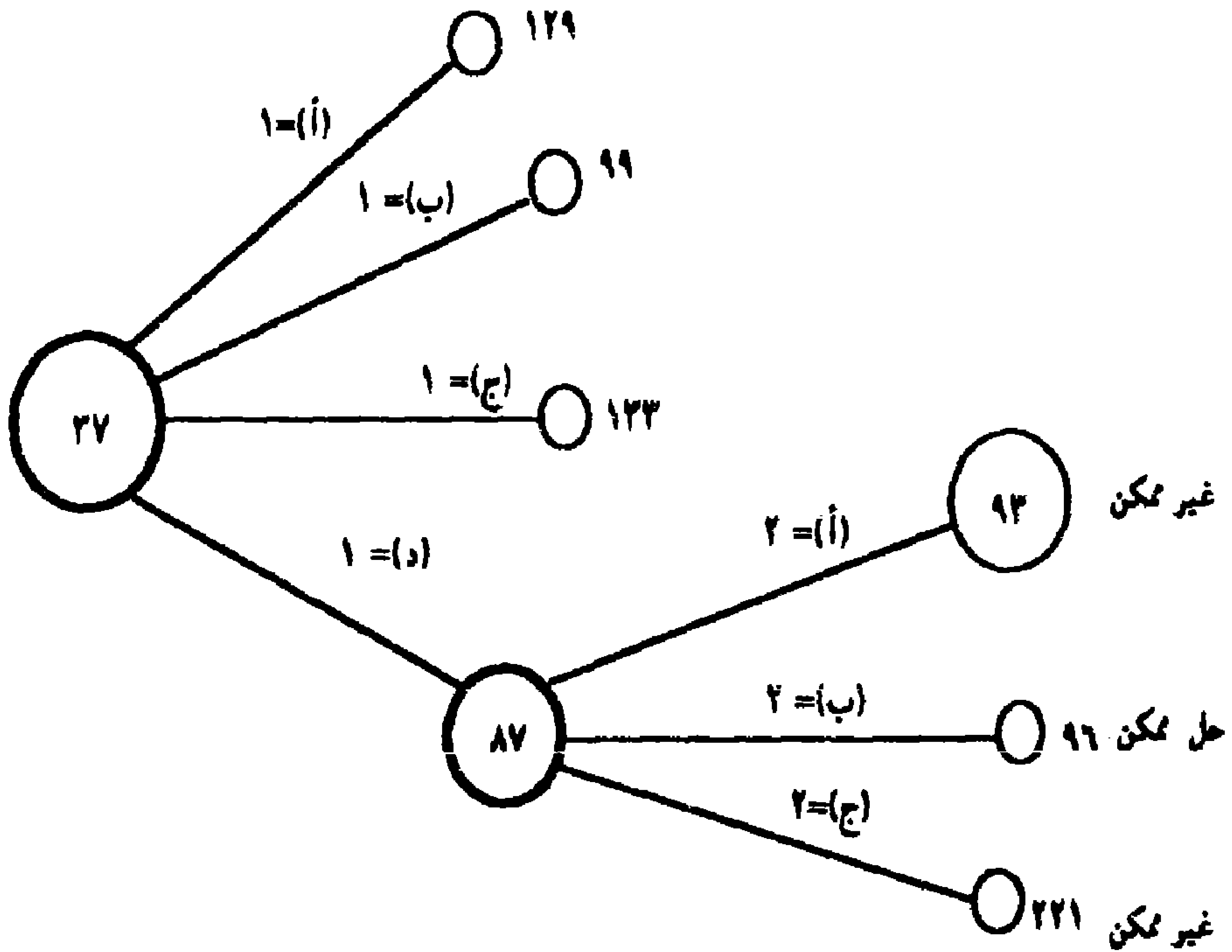
وهذا الفرع يمثل حلاً ممكنا.

الفرع الثالــــــث:

	أقل تكلفــه
من الخطوة الثانيه يتم تخصيص المهمه (د) على الآله (١)	٧
من الخطوة الثالثة يتم تخصيص المهمه (ج) على الآله (٢)	٩٣
يتم تخصيص المهمه (أ) على الآله (٣)	٤٨
يتم تخصيص المهمه (أ) على الآله (٤)	٧٣
الحد الأدنى للتكلفــــــه =	٢٢١

وهذا الفرع كما هو واضح حل غير ممكن .

و الشجرة التالية توضح نتيجة العمليات الحسابية فى الخطوات السابقة:



و يتضح من تكلفه الفروع الناتجة من الخطوة الثالثة و المنبثقة من الحد (٨٧) أن أقل تكلفة ممكنه هى ٩٣ ولذلك وضعناها فى دائرة

دائرة بإعتبارها الحد الجديد الذى سننطلق منه للخطوة الرابعة.

إلا أنه قد يكون من المفيد و قبل أن ننتقل الى الخطوة الرابعه أن نوضح و نؤكد على أمرهام ، و هو أننا وجدنا من الخطوة الثالثه ان الحد (٨٧) كان أقل تكلفه فإخترناة لننطلق منه برغم أنه حل غير ممكن ، و لكن لو نظرنا الى الفروع المنبثقة من ذلك الحد لوجدنا أن احداها يمثل حلاً ممكناً ، أى أنه أمكن إستخراج حل ممكن من حل غير ممكن وهذه ميزه هامه من مزايا طريقة الفرع و الحد.

الخطوة الـرابعـــه:

سنركز أيضاً اهتمامنا فى تلك الخطوة على ذلك الفرع الذى يمثل أقل تكلفه بالمقارنه بالفروع الأخرى التى نتجت من الخطوة الثالثة. فقد تبين من الخطوة الثالثة ان تخصيص المهمه (د) على الآله (١)، و تخصيص المهمه (أ) على الآله (٢) فإن أدنى تكلفه فى هذه الحاله و هى ٩٣ لا تقدم تخصيصا ممكنا، الا أن ذلك لايمنع من البحث عن حلول أخرى ممكنه أقل تكلفه وتنبثق فى ذات الوقت من هذا الحد .

ولذلك سنبدأ فى تلك الخطوة بالوقوف على الفروع التى تنبثق من الحد ٩٣. إن التخصيصين المحتملين عندما تكون المهمه (د) على الآله (١) ، و المهمه (أ) على الآله (٢) يمكن حسابهما كالآتى :

الفرع الأول:

(بعد تخصيص (د) على (١)،و تخصيص (أ) على (٢)) ١٢
تخصيص المهمه (ب) على (٣)،و المهمه (حـ) على (٤) ١٦٢

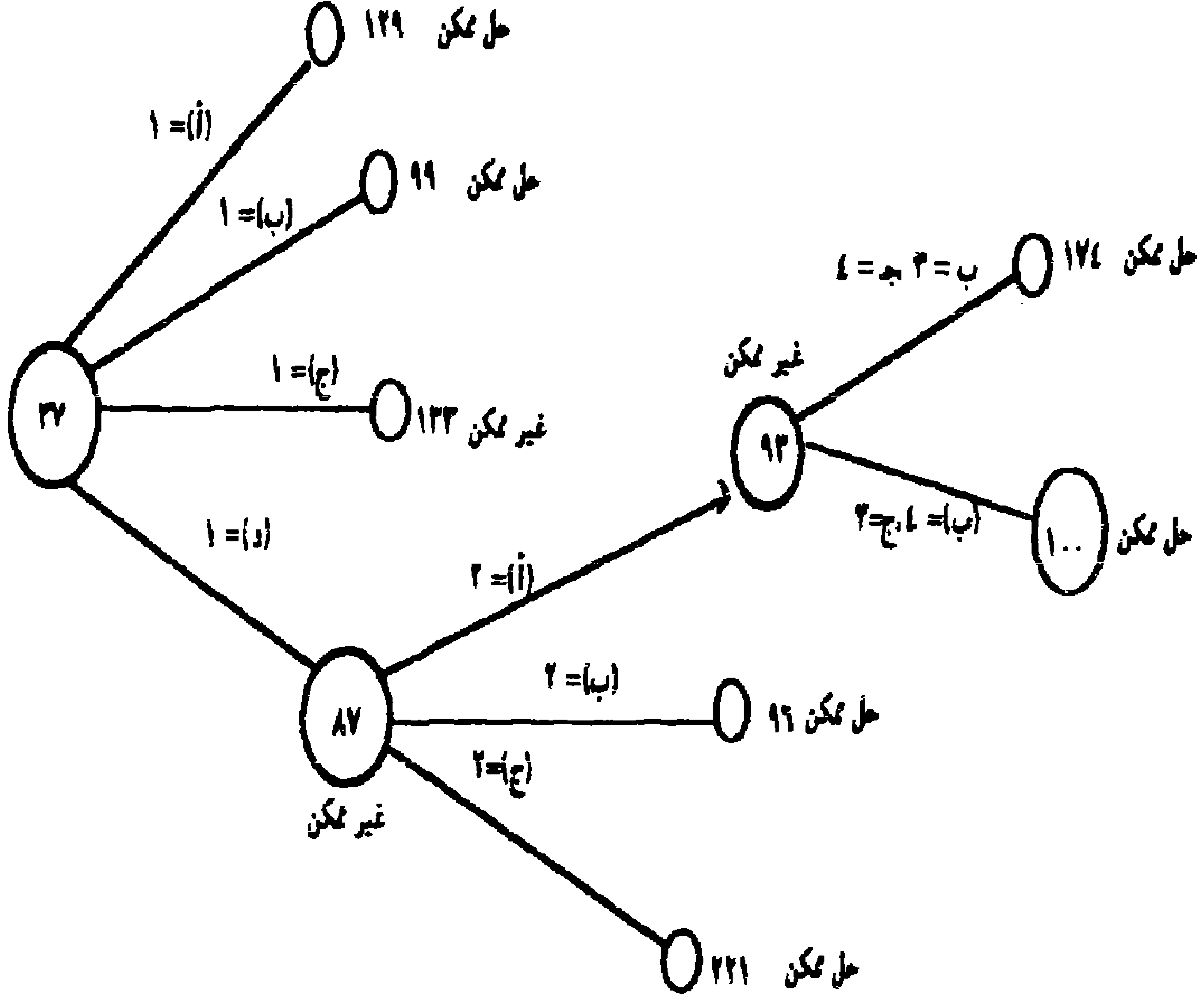
و هذا حـــل ممكن ١٧٤

الفرع الثانى:

(بعد تخصيص (د) على (١)،و تخصيص (أ) على (٢) ١٢
تخصيص المهمة (ب) على (٤) و تخصيص (حـ)على(٤) ٨٨

وهذاحـــل ممكن أيضـاً ١٠٠

و بإضافة هذين الفرعين الى فروع الشجرة السابقة تظهر خطوات الحل كالآتى:



و حيث أن التخصيصين البديلين اللذان أوجدتهما الخطوة الرابعة أعلى تكلفة من الفرع ٩٦ (تكلفة البديل الممكن فى الخطوة الثالثة)، فإننا نهملهما ونعود الى الحل الممكن الأقل تكلفه و بذلك يكون التخصيص الأمثل للمشكله هو الفرع ٩٦ وهذا الفرع يمثل التخصيص التالى .

تخصيص المهمه (د) على الآله (١) بتكلفه ٧

تخصيص المهمه (ب) على الآله (٢) بتكلفه ١٤

تخصيص المهمه (حـ) على الآله (٣) بتكلفه ٢

تخصيص المهمه(أ) علـى الآله (٤) بتكلفـه ٧٣

تكلفه الحل الأمثل ٩٦

ونقدم فيما يلى تلخيصا" بخطوات طريقة الفرع و الحد لحل مشاكل التخصيص:

الخطوة الأولى: تكوين أقل حد للتكلفه بصرف النظر عن أن الحل الذى يمثل أقل حد للتكلفه حل ممكن أم لا؟ اذ العبره إنه سيكون بمثابة حل مبدئى أو نقطة بدايةو إنطلاق،و يتم تكوين أقل حد للتكلفه من خلال أختيار أقل تكلفه فى كل عمود وذلك بالنسبه لكافة الأعمدة ،و يكون مجموع أقل تكلفه فى كل عمود للمصفوفة كلها بمثابة أقل حد للتكلفه.

الخطوة الثانيه: سنعتبر أقل حد للتكلفه الذى حصلنا عليه من الخطوة الأولى هى نقطة البداية،و يتم وضعها فى دائرة تشع منها عدد من الأسهم بعدد صفوف المصفوفة كل سهم يعبر عن تخصيص كل صف على العمود الأول ، أى السهم الأول يمثل تخصيص الصف الأول على العمود الأول ، والسهم الثانى يمثل تخصيص الصف الثانى على العمود الأول ...... وهكذا. ويتم حساب التكلفه لهذة الفروع والعبره أيضا" بأقل تكلفه بصرف النظر عن أنه حل ممكن أم لا، و أقل حد من التكاليف للاسهم المنبثقه من نقطه البداية يتم وضعها فى دائره و تكون هى نقطه الانطلاق الى الخطوة الثالثة.و نؤكد مرة أخرى ان إختيار الحد معياره انه أقل تكلفه وليس معياره إنه حل ممكن .

الخطوة الثالثة:نبدأ بالحد الذى انتهينا اليه فى الخطوة الثانيه ونرسم منه أسهم منبثقة بعدد الفروع التى يمكن ان تمثل حلولا" ونطبق عليها نفس العمليات الحسابية السابقة، و نستمر فى ذلك العمل الى أن نصل أن هناك حل ممكن وفى الوقت نفسه أقل تكلفه ممكنه عند ئذ نكون قد وصلنا الى الحل الأمثل.

و الحقيقة أن هناك كثيرا" من برامج الحاسب الألى تم إعدادها للاستخدام فى تطبيق طريقة الحد و الفرع و بكفاءة تامه ، و بإستخدام حاسب آلى ذات سعه كبيرة نسبيا" يكون فى الامكان تقييم المشاكل الكبيرة والمتعددة بإستخدام تلك البرامج وفى دقائق معدودة.

مثـــال محلول

قد يكون من المناسب هنا أن نتناول بالحل المثال الذى بدأنا به موضوع التخصيص وهو مشكلة مكتب الأستشارات الادارية و التى كانت مصفوفة المشكله على صورة الجدول التالى:

المستشار	الازمنه التقديريه للانتهاء من الدراسه (باليوم)		
	س	ص	ع
أ	٢٠	٣٠	١٨
ب	١٨	٣٦	١٠
ج	١٢	٢٨	١٢

وفيما يلى خطوات العمل وفقاً لطريقة الفرع و الحد:

الخطوة الأولى : الحد الأدنى للتكلفه الاجمالية للتخصيص و ذلك عن طريق جمع أقل تكلفه فى كل عمود من أعمدة المصفوفة بصرف النظر عن كون ذلك الحل أو ذلك التخصيص ممكنا أم لا.

أقل زمن بالعمود الاول ١٢ (تخصيص حـ للدراسة س)

أقل زمن بالعمود الثانى ٢٨ (تخصيص حـ للدراسة ص)

أقل زمن بالعمود الثالث ١٠ (تخصيص ب للدراسة ع)

الحد الأدنى للزمن ٥٠

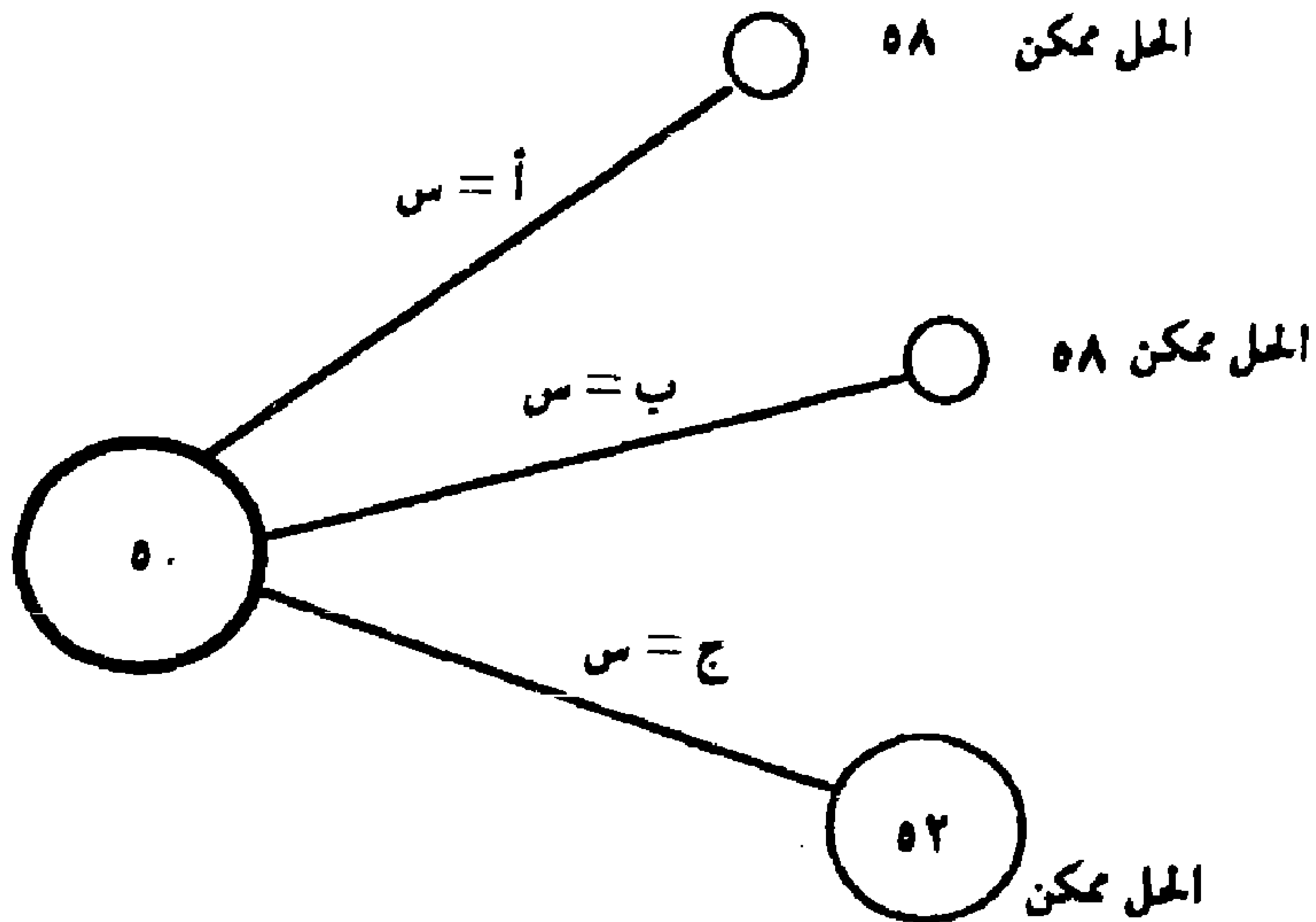
وواضح من هذا التخصيص انه حل غير ممكن لأنه يؤدى الى تخصيص المستشار (حـ) ليتولى كل من الدراسه (س) و الدراسه (ص) وهذا لا يجوز وفقاً لأساسيات طريقة التخصيص .الا اننا ووفقاً لطريقة الحد و الفرع سنعتبره الحد الذى سننطلق منه للوصول الى الحل الأمثل.

الخطوة الثانيه : و فى تلك الخطوة نقسم مراحل

البحث عن الحلول .و يتم ذلك على أساس أن نفترض أن يتم تخصيص كل مستشار على التوالى على الدراسه (س).و نحسب الحد الأدنى لزمن الأنتهاء فى كل حالة و عما اذا كان الحل ممكنا أم لا.و الجدول التالى يوضح نتيجة إجراءتلك الخطوة.

التخصيص (الفروع)	الحد الادنى للزمن	ملاحظات
المستشار (أ)للدراسة (س)	٢٠+٢٨+١٠=٥٨	الحل ممكن
المستشار (ب) للدراسة (س)	١٨+٢٨+١٢+=٥٨	الحل ممكن
المستشار (ج) للدراسة (س)	١٢+٣٠+١٠=٥٢	الحل ممكن

و حيث أن الحد الأدنى للزمن كان ٥٢ يوما" و هوحل ممكن اذا"هو الحل الأمثل ولاداعى للسير فى باقى إجراءات الحل .و الشكل التالى يوضح الخطوتين الأولى و الثانية :



وعلى ذلك يكون الحل الأمثل.

المستشار(حـ) للدراسة (س) ١٢ يوما"

المستشار(أ) للدراسة (ص) ٣٠ يوما"

المستشار(ب)للدراسة (ع) ١٠ يوما"

الحـــد الأدنى للزمن ٥٢ يوما"

وهى نفس النتيجة التى توصلنا اليها من حل ذات المشكله بطريقة التخصيص

مثــــال محلـــــــول

سنعيد هنا مرة أخرى حل مثال تخصيص المقاولون الأربعة على المشروعات الأربعه ليكون لدينا تصور كامل لكل من الطريقتين المستخدمتين فى حل مشاكل التخصيص.و فيما يلى الشكل الذى سبق أن أخذه مثال المقاولون الأربعة:

المقاولون	المشروعات وتكلفه تنفيذها بالالف جنيه			
	س	ص	ع	ل
أ	٢٠	٣٦	٣١	١٧
ب	٢٤	٣٤	٤٠	١٢
ج	٢٢	٤٠	٣٨	١٨
د	٣٦	٣٩	٣٥	١٦

و المطلوب تخصيص المشروعات الأربعة على المقاولون الاربعة بحيث تصل تكلفة التنفيذ الى أقل حد ممكن .

الحـل :

سيتم حل هذه المشكله بإستخدام طريقة الفرع والحد وفيما يلى خطوات الحل :

الخطوة الأولى: إيجاد الحد الأدنى للتكلفه الاجمالية للتخصيص وذلك عن طريق جمع أقل تكلفه فى كل عمود من أعمدة المصفوفه دون النظر الى ما اذا كان الحل ممكنا أم لا، و بإجراء هذه الخطوة سنجد الحد الأدنى للتكلفه كالآتى:

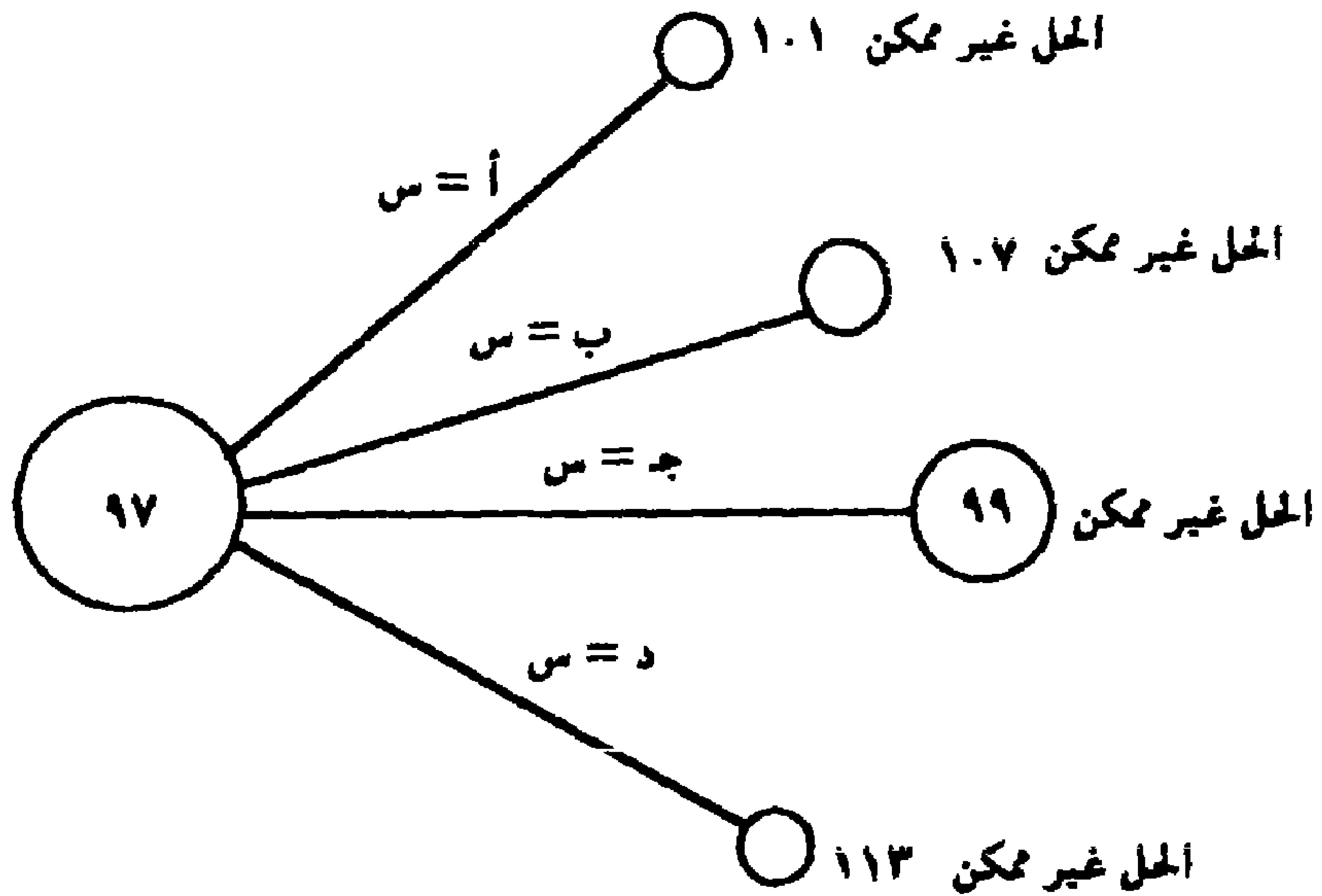
أقل تكلفه للعمود الأول (أ س)	٢٠	ألف جنيه
أقل تكلفه للعمود الثانى (ب ص)	٣٤	ألف جنيه
أقل تكلفه للعمود الثالث (أ ع)	٣١	ألف جنيه
أقل تكلفه للعمود الرابع (ب ل)	١٢	ألف جنيه
الحد الأدنى لتكلفه التخصيص	٩٧	ألف جنيه

و بالنظر الى الحل الذى يسعى الى الحد الأدنى لتكلفه التخصيص نجد أنه حل غير ممكن لانه يخصص المقاول (أ) للمشروعين (س،ع)،وكذلك يخصص المقاول (ب) لتنفيذ المشروعين (ص،ل).و لكن كما ذكرنا لا يهم أن يكون الحل ممكنا ولكنه كما سبق القول نقطة الانطلاق للحل.

الخطوة الثانية: وفى تلك الخطوة نقسم مراحل البحث عن الحلول ، فسنبدأ بالحد الأدنى للتكلفه التى توصلنا اليها من الخطوة الأولى ،ثم نحدد فروعا" من ذلك الحد ،و يتم ذلك على أساس أن يكون هناك أربعة فروع كل فرع يتم فيه تخصيص كل مقاول [أ، ب ، حـ ، د] على المشروع (س)، والعمليات الحسابيه لتلك الخطوة كالآتى:

ملاحظات	الحد الادنى للتكلفه	التخصيص (الفروع)
الحل غير ممكن	٢٠+٣٤+٣٥+١٢=١٠١	المقاول (أ) للمشروع(س)
الحل غير ممكن	٢٤+٣٦+٣١+١٦=١٠٧	المقاول (ب)للمشروع(س)
الحل غير ممكن	٢٢+٣٤+٣١+١٢=٩٩	المقاول (ج)للمشروع(س)
الحل غير ممكن	٣٦+٣٤+٣١+٢١=١١٣	المقاول (د) للمشروع(س)

و الشجرة التاليه توضح نتائج العمليات الحسابيةو الفروع التى تم التوصل اليها من الخطوة الثانيه .



الخطوة الثالثـــه: يتضح من شجرة الفرع و الحد التى توصلنا اليها من الخطوة الثانيه ان كل الحلول التى توصلنا اليها هى

حلول غير ممكنه،و أقل حد للتكلفه هو ٩٩ ، لذلك سنسير نحو تحسين الحل و تكون نقطه بدايتنا هو ذلك الحد الأقل تكلفه ،و سنقوم بإنشاء فروع من ذلك الحل و هذه الفروع تمثل تخصيصا" للمشروع (ص)، وعلية فإن الفروع ستكون:

الفرع الأول : تخصيص المقاول (أ) للمشروع (ص)

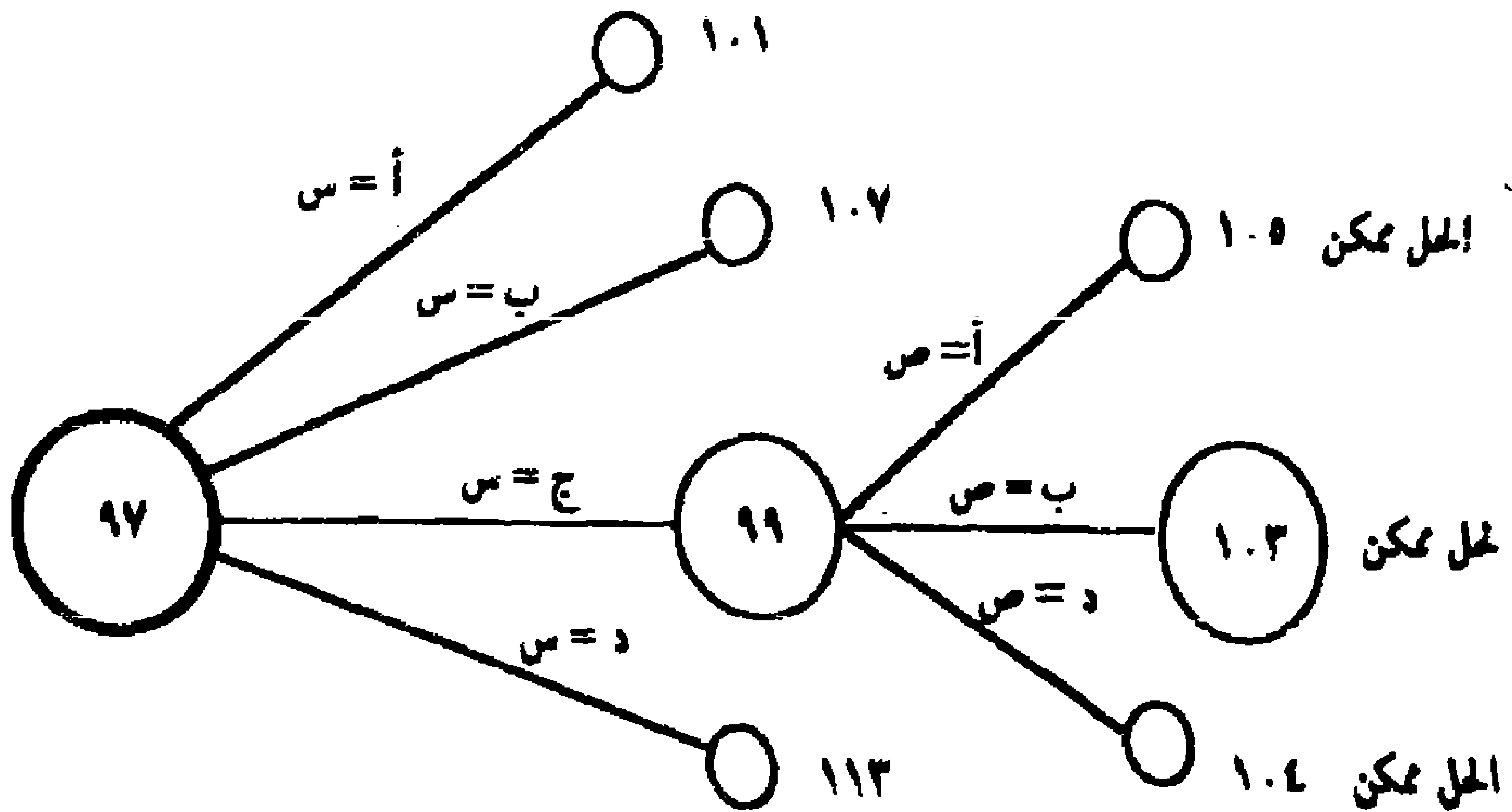
الفرع الثانى: تخصيص المقاول(ب)للمشروع (ص)

الفرع الثالث: تخصيص المقاول (د)للمشروع (ص)

وستكون العمليات الحسابيه المطلوبه لحساب تكلفة هذة الفروع كما هى فى الجدول التالى:

التخصيص (الفروع)	الحد الادنى للتكلفه	ملاحظات
ج س ،أص، ب ع، ب ل	٢٢+٣٦+٣٥+١٢=١٠٥	الحل ممكن
ج س،ب ص، أ ع، د ل	٢٢+٣٤+٣١+١٢=١٠٣	الحل ممكن
ج س ، د ص، أ ع، ب ل	٢٢+٣٩+٣١+١٢=١٠٤	الحل ممكن

وستظهر شجرة الحل حتى الخطوة الثالثه كالآتى :



الخطوة الرابعــــة: يمكن أن نقول ان الخطوة الثاله قد قادتنا بالفعل الى تعيين الحل الامثل لأن أقل تكلفه فى التخصيص كانت حلا ممكنا.و حيث أن هذا الحل جاء نتيجة تخصيص المقاول (حـ) على المشروع (س)،و المقاول (ب) على المشروع (ص).إذن الحل النهائى هو أحد حلين بديلين وهما:

حـ س ، ب ص ، أ ع ، د ل أو

حـ س ،ب ص ، أ ل ، د ع

و تكلفة الحل الأول = ٢٢ + ٣٤ + ٣١ + ١٦ = ١٠٣

و تكلفة الحل الثانى =٢٢ + ٣٤ + ١٧ + ٣٥ = ١٠٨

و على ذلك فإن التخصيص الأمثل كالآتى:

المقاول (أ) للمشروع (ع)

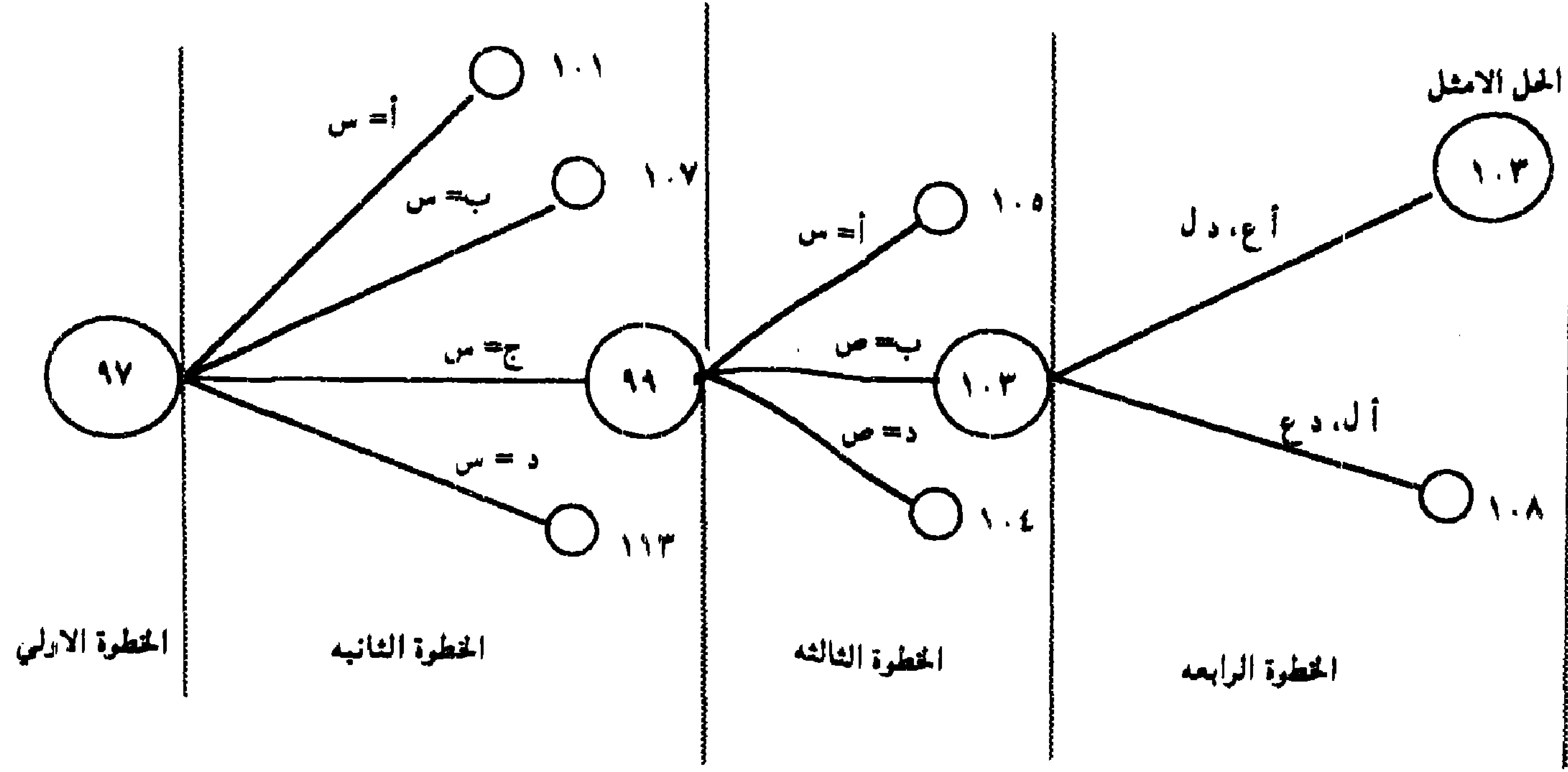
المقاول (ب) للمشروع (ص)

المقاول (حـ) للمشروع (س)

المقاول (د) للمشروع (ل)

و تكون التكلفه عند حدها الأدنى وتبلغ ١٠٣ ألف جنيه

و ستكون الشجرة الكاملة للخطوات الأربعة السابقة كالآتى:


٩٧
أ = س
١٠١
ب = س
١٠٧
ج = س
٩٩
د = س
١١٣
أ = س
١٠٥
ب = ص
١٠٣
د = ص
١٠٤
الحل الامثل
١٠٣
أ ع، د ل
أ ل، د ع
١٠٨
الخطوة الاولي
الخطوة الثانيه
الخطوة الثالثه
الخطوة الرابعه

معالجة بعض الحالات الخاصة لمشكلة التخصيص

رأينا في الجزء السابق الطرق الثلاثة التي يمكن استخدامها وتطبيقها في حل مشاكل التخصيص ، و الجزء التالي يتعرض لبعض التعقيدات التي تنشأ من بعض الحالات الخاصة التي تواجهنا في الحياة العملية عند القيام بعملية التخصيص ، أي أن بحث ودراسة هذه الحالات الخاصة هو من قبيل التجسيد لهذه الطريقة ، إذ أنه توجد في الواقع العملي بعض الظروف التي تحتاج الى إجراء بعض التحويرات حتى يمكن تطبيق الطرق السابقة في حلها .وهذة الحالات الخاصة هي :

أولاً : عدم تساوي عدد الأعمدة مع عدد الصفوف .

ثانيا : مشكله التخصيص ذات هدف التعظيـــــيم.

ثالثا : التعامل مع التخصيصات غير المقبـــــوله.

وفيما يلي نتناول كيفيه التعامل مع الحالات الخاصه:

أولاً: حاله عدم تساوي عدد الاعمده مع عدد الصفوف:

تبين لنا من خلال ما طرحناه من أمثلة محلوله عند شرح كيفيه السير في خطوات طريقه التخصيص أن المصفوفة التي كنا نتعامل معها كانت دائما متماثله في عدد الصفوف (افراد، مشروعات ، مقاولون ... الخ) مع عدد الاعمدة (مهام، عملاء ، خطوط انتاج، آلات، ... الخ) . أي أن الفرضية التي كانت ساريه هي أن عدد الصفوف متساوي مع عدد الاعمدة، الأأنه في الحياه العمليه نادراً ما تسري هذه الفرضية بمعنى ان الموضوع الغالب في الواقع العملي عدم حدوث ذلك التعادل . والحقيقه ان معالجه تلك النوعيه من المشاكل عمليه سهله ويسيرة ولا تمثل مشكله تحد من قيمه وفاعليه الطريقه المجريه للتخصيص.و سيظهر ذلك بوضوح من خلال حل المثال التالي:

مثال محلول

بفرض أن مكتب الاستشارات الاداريه الذي وردت مشكلته في مقدمة هذا الجزء كان لديه أربعة مستشارين علميين متاحين في حين أن عدد الابحاث التي وردت الي المكتب للدراسه كانت ثلاثة دراسات

فقط ، و المطلوب التخصيص على تلك الدراسات علماً بأن الزمن المتوقع لا تمام كل دراسه بالنسبه لكل مستشار كانت كما هو موضح فى الجدول التالى:

المستشار	الازمنه التقديريه (باليوم) للانتهاء من الدراسه		
	س	ص	ع
أ	٢٠	٣٠	١٨
ب	١٨	٣٦	١٠
ج	١٢	٢٨	٦
د	١٦	٣٢	١٢

الحـــــل:

حيث أن الطريقه المجريه للتخصيص تتطلب أن يكون هناك تساوى بين عدد أعمدةوصفوف المصفوفه ، لذلك فان أمامنا أحد حلين لايجاد هذا التساوى ، اما استبعاد الصف أوالعمود (أو الصفوف و الاعمدة) الزائده،و إما اضافه صف (او صفوف) أو عمود (أو أعمدة) الى الصفوف (أو الاعمدة) الناقصه.

أما الحل بمحاوله استبعاد الزيادة صفوفا كانت أم أعمدة فان ذلك شىءخطير وتدخل فى آلية ومنطقيه الحل، إذ أى الصفوف مثلاً من المثال السابق نستبعدها؟ ان ذلك يعتبر عمليه تحكميه لا يجب أن نتدخل فيها ولكن نترك عمليه الاستبعاد هذه لتقررها العمليات الحسابيه للحل، اذيتعين ان تتاح فرصه متكافئه لكل مستشار فى التخصيص على أى من هذه الدراسات الثلاثه ،و عمليه الاستبعاد هذه لا تحقق هذه الفرصه المتكافئه . إذن سنتجه الى الاسلوب الاخر و هو زياده عدد الاعمده (أو الصفوف) الناقصه بعمود (أو أعمده اضافيه) لإحداث هذا التعادل . و حيث أنه لا يوجد لدينا مشروع رابع حتى

نضيفه فاننا ببساطه نضيف عمود وهمى أو(تخيلى)DUMMY COLUMN و أو بمعنى أخر نضيف دراسه وهميه،و حيث أن هذه الدراسه الوهميه غير موجوده حقيقياً ، فان تخصيص مستشار عليها فى التخصيص الامثل هو فى الحقيقه يعنى عدم تخصيص مستشار من المستشارين الاربعه لان عدد المستشارين أربعه وعدد الدراسات ثلاثه فقط.

والتساؤل الان، اذا كنا سنضيف الى هذه المصفوفه عمود وهمى لتكون المصفوفه متعادلة فى عدد الصفوف و الاعمدة فما هى الازمنه المتوقعه لاتمام تلك الدراسه الوهميه التى ستمثل بالعمود الجديد الوهمى؟

الحقيقة أن أى قيمه جزافيه تكون مقبوله طالما تم معاملة كافة المستشارين على قدم المساواه بالنسبه لهذا العمود الجديد ، فطالما أن تخصيص الدراسه الوهميه ليس لها محل ولن تأخذ مكانا ،اذن يتعين أن نضع قيمه تسهل وتيسر العمليات الحسابيه اللازمه لاتمام عمليه التخصيص،و عليه فإن المنطق يفرض أن يكون وقت الانتهاء من تلك الدراسه ولكافة المستشارين هو قيمه صفريه ، و على ذلك تصبح المصفوفه مكونه من أربعة أعمدة و أربعة صفوف وتصبح مشكلة التخصيص بعد اجراء التعديلات السابقه عليها على صورة المصفوفه التاليه:

	(أ)	(ب)	(حـ)	(د) وهمى
(س)	٢٠	٣٠	١٨	صفر
(ص)	١٨	٣٦	١٠	صفر
(ع)	١٢	٢٨	٦	صفر
(ل)	١٦	٣٢	١٢	صفر

وبتطبيق خطوات الطريقه المجريه على المصفوفه السابقه سيظهر الحل على الوجه التالى:

الخطوه الاولى: طرح أقل قيمه فى كل صف من كافه ارقام الصف ،و حيث أن أصغر قيمه فى كل صف هى القيمه صفر (الخاصه بالعمود الوهمى)، فان هذه الخطوه لن تؤثر على القيم الاصليه للمصفوفه ، وستظهر المصفوفه بعد اجراء هذه الخطوه على نفس صورتها الاصليه.

الخطوه الثانيه: طرح أقل قيمه فى كل عمود من كافة أرقام العمود ،و باتمام تلك الخطوه نحصل على المصفوفه التاليه:

	(أ)	(ب)	(حـ)	(د) وهمى
(س)	٨	٢	١٢	صفر
(ص)	٦	٨	٤	صفر
(ع)	صفر	صفر	صفر	صفر
(ل)	٤	٤	٦	صفر

الخطوه الثالثه: تغطيه جميع القيم الصفريه بأقل عدد ممكن من الخطوط الافقيه أو الرأسيه أو كلاهما معاً و ذلك بالنسبه للمصفوفة الناتجه من الخطوه الثانيه ،و ستظهر المصفوفه بعد هذه الخطوه على الصورة التالية:

	(أ)	(ب)	(حـ)	(د) وهمى
(س)	٨	٢	١٢	صفر
(ص)	٦	٨	٤	صفر
(ع)	صفر	صفر	صفر	صفر
(ل)	٤	٤	٦	صفر

ويتضح من هذه المصفوفة أن أقل عدد من الخطوط المرسومة هو عدد اثنين فقط ، وحيث أن المصفوفة مكونه من أربعة صفوف واربعة

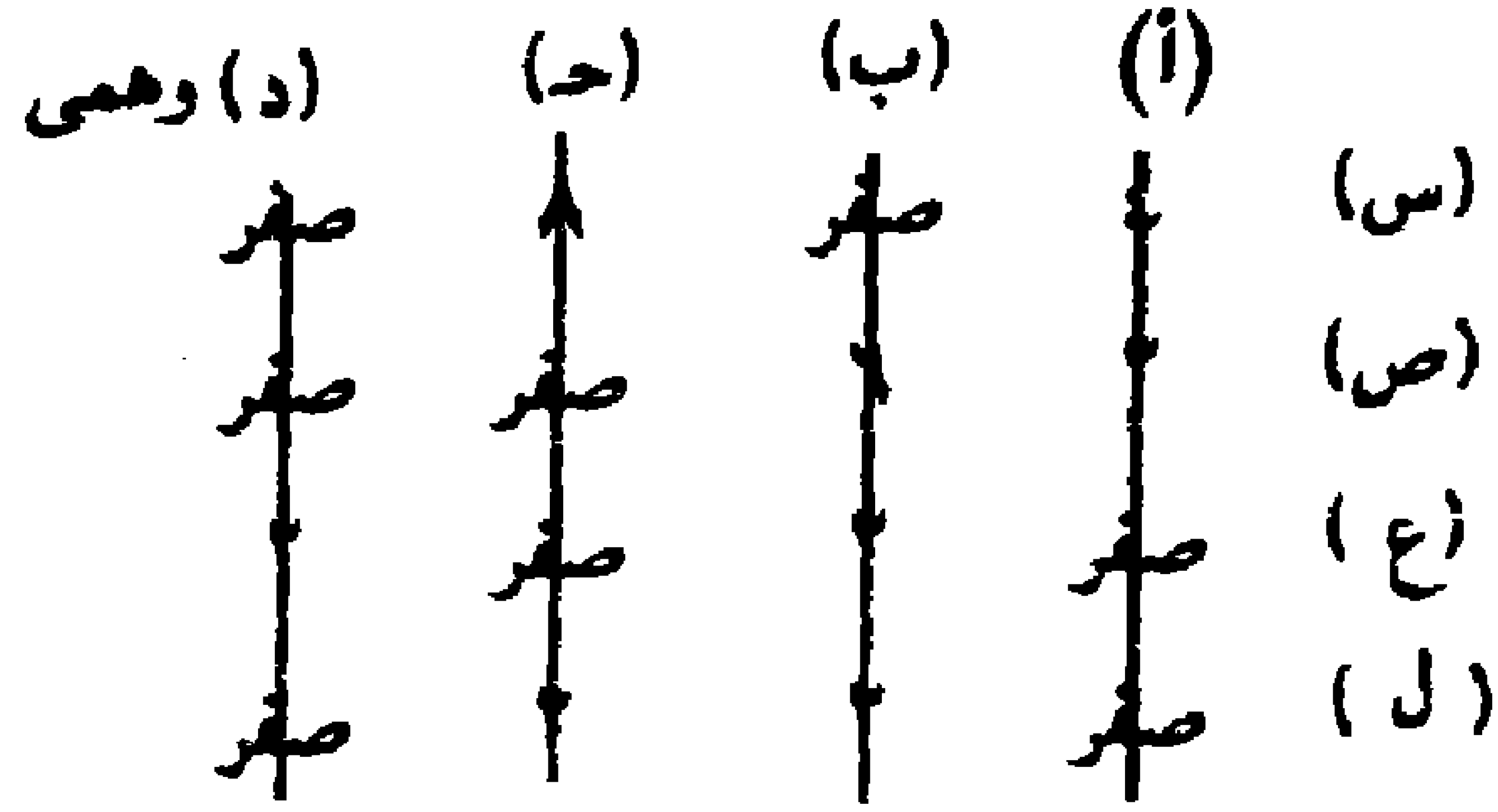
أعمدة اذن وفقا لقاعدة اختبار المثاليه يكون الحل غيرأمثل ويتعين العمل على تحسينه و لهذا سنواصل الحل الى الخطوه التاليه.

الخطوه الرابعه : ويتم فيها تعيين أقل قيمه غير مغطاه بالمصفوفه الناتجه من الخطوه الثالثة وهى القيمة (٤) ويتم طرح تلك القيمة من جميع القيم المغطاه ، و اضافة هذه القيمه الى القيم الموجوده عند تقاطعات الخطوط المرسومه ، وبإتمام تطبيق هذه العمليات الحسابيه ستظهر المصفوفه على الشكل التالـــى:

	(أ)	(ب)	(حـ)	(د) وهمى
(س)	٦	صفر	١٠	صفر
(ص)	٤	٦	٢	صفر
(ع)	صفر	صفر	صفر	٦
(ل)	٢	٢	٤	صفر

الخطوه الخامسه: ويتم فيها تكرار عمليه تغطية القيم الصفرية ،و قد قمنا بعمليه التغطيه عن المصفوفه السابقه تخفيضاللعمليات الحسابيه وللحد من كثره الجداول المستخدمه ، و يتضح من اختبار المثاليه ان الحل مازال غيراً مثل لان عدد الخطوطالمرسومه ثلاثة فقط .و على ذلك سنستمر فى تحسين الحـــــل.

الخطوه السادسه: اختيار أقل قيمه غير مغطاه وطرحها من جميع القيم غير المغطاه واضافتها الى القيم الواقعه عند تقاطعات الخطوط ،و بذلك ستظهر المصفوفه بعد هذه العمليات الحسابيه وبعد التغطيه على الوجه التالى :



وبالنظر الى المصفوفه السابقه يتبين انها تتضمن التخصيص الامثل و يتبقى تعيين ذلك الحل ،و لغرض ايجاد هذا التعيين يتم الاتى:

١- البحث عن صف به صفر واحد فقط ، سنجد انه لايوجد وأن كل صف به عدد (٢) صفر وهذا يعني انه سيحدث هناك تعدد فى التخصيصات المثلى بمعنى انه سيوجد أكثر من تخصيص أمثل واحد.

٢- البحث عن عمود به صفر واحد فقط ، سنجد أن العمود (ب) به صفر واحد وعلى ذلك يتم تخصيصه.

٣- ايجاد التخصيصات البديلة المثلى وسنجدها كالاتـــــى.

التخصيص الأول		التخصيص الثانى	
(س ب)	٣٠	(س ب)	٣٠
(ص جـ)	١٠	(ص د)	صفر
(ع أ)	١٢	(ع جـ)	٦
(ل د)	صفر	(ل أ)	١٦
	٥٢		٥٢

خلاصة

مما سبق يتضح أننا استطعنا معالجه مشكلة زيادة عدد الصفوف عن عدد الاعمدة وذلك باضافة عمود وهمى لتكون المصفوفه مكونه من

عدد متساوى من الصفوف والاعمده،وبطبيعه الحال يمكن اتباع هذا الاجراء نفسه اذا كانت عدد الاعمده اكثر من عدد الصفوف ،فى مثل هذه الحاله يتطلب الامر اضافه عدد من الصفوف الى المصفوفه الحاليه لايجاد التساوى بين الصفوف والاعمده ،والصفوف الجديده التى ستضاف ستكون و هميه كل قيمه بها متساويه و مقدارها صفر.

وهناك ملاحظه هامه يتعين ذكرها فى هذا المجال وهى أننا اما أن نضيف صف أو اكثر كصفوف وهميه ،أوأن نضيف عموداً أو اكثر كأعمده وهميه ولكن لايمكن اضافه كليهما فى آن واحد لأن ذلك غير مقبول منطقيا.

ثانيا : حالة مشكلة التخصيص ذات هدف التعظيم.

لقد كانت كل المشاكل والأمثلة التى تناولناها فى الاجزاء المتقدمه تتصف بأنها مشاكل تخصيص ذات هدف تخفيض مثل مشكلةالتخصيص ذات هدف تخفيض الازمنه الاجماليه للتنفيذ ، و كذلك مشكلة المقاولون التى كانت تهدف الى تخفيض اجمالى تكلفه تنفيذخطوط الانتاج،و كذلك تخفيض تكلفه تخصيص العمال على الالات،و هذا قد يوحى الى البعض أن طريقه التخصيص لاتتعامل الامع تلك النوعيه من المشاكل ، ولكن هذا على خلاف الحقيقه ، فان طريقه التخصيص تتناول أيضا التخصيص مع هدف تعظيم وان كان الامر يحتاج لبعض التحوير فى المصفوفه الاساسيه حتى يتم حلها بطرق التخصيص السابق تطبيقها (مثل مشكله النقل ذات هدف التعظيم) ، وفيما يلى أحد الأمثله التى نسوقها و نقوم بحلها لنرى كيف يمكن التعامل مع تلك النوعيه من المشاكل .

مثال محلول.

استأجر أحد محلات التجزئه الكبرى مركزا تجاريا جديداً، ويحاول هذا المتجر حاليا تحديد مواقع مختلف الاقسام داخل ذلك المركز التجارى،ومدير المركز لديه اربعة مواقع لم يتم تخصيصها بعد ومطلوب منه أن يستخدم تلك المواقع الاوليه لتخصيص أربعة من

الاقسام الخمسة التى يشتمل عليها المركز و هى قسم الاحذيه ،قسم لعب الاطفال،قسم قطع غيار السيارات ، قسم الادوات المنزليه ،قسم الاجهزه الكهربائيه ،وحيث أن مدير المركز يرغب فى التخصيص الامثل لهذه الاقسام لذلك قام بدراسه مستفيضه فى ضوء خبرته الطويله بمتاجر مشابهة . لذلك فإنة وضع تقديرا للارباح السنويه المتوقعه لتخصيص كل قسم على كل موقع ،و فيما يلى جدولا يقدم ملخصا لما تم الوصل اليه من تقديرات تلك الارباح:

الارباح السنويه المتوقعه لتخصيص كل قسم على كل موقع (بالالف جنيه)

الأقسام \ المواقع	أ	ب	حـ	د
قسم الأحذية	١٠	٦	١٢	٨
قسم لعب الأطفال	١٥	١٨	٥	١١
قسم قطع غيار السيارات	١٧	١٠	١٣	١٦
قسم الأدوات المنزلية	١٤	١٢	١٣	١٠
قسم الأجهزة الكهربائية	١٤	١٦	٦	١٢

والمطلوب أن تقدم مشورتك بتخصيص الاقسام على المواقع بهدف تعظيم الارباح السنويه لهذا التخصيص.

الحـــــــــل:

إن المشكله كما تم صياغتها بالشكل السابق لها سمه خصائص مشكلة التخصيص ولكن ذات هدف تعظيم .

وفى البدايه فانه بالنظر الى مصفوفة المشكله نجد أنها تتضمن عدد من الصفوف يزيد عن عدد الاعمده ،لذلك ينبغى أولاً علاج هذا الوضع وذلك بأن نضيف عموداً وهميا لايجاد التساوى بين عدد الصفوف و عدد الاعمده كما تم شرحه فى الحاله الأولى من الحالات

الخاصه فى مشاكل التخصيص .وبإضافة عمود وهمى الى المشكله الأصليه لمتجر التجزئه تصبح مصفوفه المشكله مكونه من خمس صفوف وخمسة أعمدةوستظهر على الصورة التاليه:

	(أ)	(ب)	(حـ)	(د)	(هـ) وهمي
قسم الأحذية	١٠	٦	١٢	٨	صفر
قسم لعب الأطفال	١٥	١٨	٥	١١	صفر
قسم قطع غيار السيارات	١٧	١٠	١٣	١٦	صفر
قسم الأدوات المنزلية	١٤	١٢	١٣	١٠	صفر
قسم الأجهزة الكهربائية	١٤	١٦	٦	١٢	صفر

وأحسن وأسرع طريقه للتعامل مع التخصيص ذات هدف التعظيم أن نقوم بتحويلها الى مشكله تخصيص ذات هدف تخفيض حتى نقوم بنفس الخطوات التى اتبعناها فى الطريقه المجريه للتخصيص.و لكن ما هو الاسلوب الذى يمكن اتباعه لتحويل تلك المشكله الى الصوره الأخرى التى يسهل التعامل معها؟

للاجابه على هذا التساؤل نقول أنه يمكننا أن نحصل من تلك المصفوفه على مصفوفه مقابله معادله تماماً(Equivalent) تمثل مشكلة تخصيص مع هدف تخفيض وذلك عن طريق تحويل جميع القيم الموجودة بالمصفوفه الى قيم أخرى تمثل فرصاً ضائعه (Opportunity losses) و هذا التحويل يتم عن طريق طرح كل قيمه فى كل عمود من أكبر قيمه فى ذلك العمود .و على ذلك فان المصفوفه الناتجه سيكون التخصيص الأمثل لها هو ذلك الذى يعمل على تخفيض تلك الفرص الضائعه (أى أنها أصبحت ذات هدف تخفيض).

وعلى ذلك يمكن القول بانه : يمكن تحويل مشكله التخصيص ذات هدف التعظيم الى مشكله تخصيص ذات هدف تخفيض عن طريق تحويل مصفوفة التخصيص الى الشكل الذى تكون فيه جميع قيم المصفوفه تمثل فرصا

ضائعه.

وبهذا المفهوم نواصل حل مشكلة متجر التجزئه وذلك بأن نقوم بتحويل مصفوفه التخصيص الأصليه (ذات هدف التعظيم) الى مصفوفه تخصيص تمثل كل قيمه فيها فرصه ضائعه ، و بعد هذا الاجراء ستظهر مصفوفة الفرص الضائعه على الشكل التالـــــــــــــــي:

	(أ)	(ب)	(حـ)	(د)	(هـ) (وهمي)
قسم الأحذية	٧	١٢	١	٨	صفر
قسم لعب الأطفال	٢	صفر	٨	٥	صفر
قسم قطع غيار السيارات	صفر	٨	صفر	صفر	صفر
قسم الأدوات المنزلية	٣	٦	صفر	٦	صفر
قسم الأجهزة الكهربائية	٣	٢	٧	٤	صفر

وبعد أن توصلنا الى مصفوفة الفرص الضائعه كما يوضحها الجدول السابق ،يمكن أن نسير فى الخطوات المعتاده للتخصيص حتى نصل الى التخصيص الأمثل الذى يعظم الارباح.

الخطوة الأولى: طرح أقل رقم فى كل صف من أرقام الصف ، الا أننا لن نقوم باداء هذه الخطوه حيث أن اضافه عمود وهمى بقيم مقدارها صفر سيجعل اصغر قيمة فى كل صف هى صفر و من ثم فلن تتغير القيم الحاليه ، لذلك لا داعى لاتمام هذه الخطوه.

الخطوه الثانيه: طرح أقل رقم فى كل عمود من أرقام العمود ،و أيضا لن نقوم بأداء هذه الخطوة حيث أن الأجراء الذى اتبعناه لتحويل المشكله الى فرص ضائعه جعلت أصغر قيمه فى كل عمود هى صفر لذلك فإن عملية الطرح لن تغير من قيم المصفوفة الأصلية.

الخطوه الثالثة: وفيها يتم تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط المرسومه أفقية كانت أم رأسيه ،و الجدول التالى يمثل عمليه التغطيه المشار اليها فى هذه الخطوة.

	(أ)	(ب)	(حـ)	(د)	(هـ) وهمي
قسم الأحذية	٧	١٢	١	٨	صفر
قسم لعب الأطفال	٢	صفر	٨	٥	صفر
قسم قطع غيار السيارات	صفر	٨	صفر	صفر	صفر
قسم الأدوات المنزلية	٣	٦	صفر	٦	صفر
قسم الأجهزة الكهربائية	٣	٢	٧	٤	صفر

و حيث أن أقل عدد من الخطوط أمكن رسمها لتغطيه جميع القيم الصفريه (٤) يقل عددها عن أى من الصفوف أو الأعمده (٥) ،لذلك نتجه الى الخطوةالرابعه من خطوات منهج الطريقه المجريه للتخصيص.

الخطوة الرابعة: تحسين الحل ويتم على المراحل التاليه.

١- تعيين أقل قيمه من القيم غير المغطاة (١)

٢- طرح تلك القيمه (١) من جميع القيم المغطاة واضافتها الى القيم الواقعه عند تقاطعات الخطوط المرسومه.

٣- باقى القيم المغطاةوغير الواقعه على الخطوط المرسومه يتم وضعها كما هى دون تعديل ،وبعد القيام بالعمليات الحسابيه فى تلك الخطوه ستظهر المصفوفه كالآتى ، علماً بأنه قد تم أيضا إختبارمثاليتها برسم الخطوط التى تغطى القيم الصفريه اختصاراً لتكرار كتابه المصفوفه .

	(أ)	(ب)	(حـ)	(د)	(هـ)وهمي
قسم الأحذية	٦	١١	صفر	٧	صفر
قسم لعب الأطفال	٢	صفر	٨	٥	١
قسم قطع غيار السيارات	صفر	٨	صفر	صفر	١
قسم الأدوات المنزلية	٣	٦	صفر	٦	١
قسم الأجهزة الكهربائية	٢	١	٦	٣	صفر

وسنجد أيضا من هذه المصفوفه أن أقل عدد من الخطوط التى تغطى كل القيم الصفريه بتلك المصفوفه مازال عددهايقل عن عدد أى من الصفوف أو الأعمده الأمر الذى يتطلب تكرار الخطوه السابقه ،ثم تغطيه القيم الصفرية،و بإجراء تلك العمليات الحسابيه سنحصل على المصفوفه التاليه:

	(أ)	(ب)	(حـ)	(د)	(هـ)وهمي
قسم الأحذية	٥	١٠	صفر	٦	صفر
قسم لعب الأطفال	٢	صفر	٩	٥	٧
قسم قطع غيار السيارات	صفر	٩	١	صفر	٢
قسم الأدوات المنزلية	٢	٥	صفر	٥	١
قسم الأجهزة الكهربائية	١	صفر	٦	٢	صفر

وبتفحص المصفوفه السابقه نجد أنه مازال الحل غيرأمثل ويحتاج الى تحسين ومن ثم نكرر خطوة تجسين الحل ،ثم تغطيه القيم الصفريه ،و ستظهر المصفوفه بعد ذلك كالآتى :

	(أ)	(ب)	(جـ)	(د)	(هـ) (وهمي)
قسم الأحذية	٤	١٠	صفر	٥	صفر
قسم لعب الأطفال	١	صفر	٨	٤	٢
قسم قطع غيار السيارات	صفر	[illegible]	٢	صفر	٣
قسم الأدوات المنزلية	١	[illegible]	صفر	٤	[illegible]
قسم الأجهزة الكهربائية	صفر	صفر	٩	١	صفر

ومن هذه المصفوفه يتضح أننا وصلنا الى الحل الأمثل لان عدد الخطوط المرسومه خمسة خطوط وهى تعادل عدد الصفوف أو الأعمدة ،و لم يتبق سوى تعيين و تحديد هذا التخصيص الأمثل ، و بتطبيق الطريقه المتبعه فى تعيين التخصيص يظهر ذلك التخصيص الأمثل فى الدوائر المرسومه حول بعض القيم الصفريه بالمصفوفه .

الجدول التالى يوضح الحل الأمثل و مقدار الأرباح المتوقعة لذلك التخصيص . علماً بأن الأرباح المتوقعة تم الحصول عليها من المصفوفه الاصليه.

القسم	الموقع المخصص	الأرباح المقدرة بالالف جنية
قسم الأحذية	الموقع الوهمى	صفر
قسم لعب الأطفال	(ب)	١٨
قسم قطع غيار السيارات	(د)	١٦
قسم الأدوات المنزلية	(جـ)	١٣
قسم الأدوات الكهربائية	(أ)	١٤
الارباح المتوقعة		٦١

ونلاحظ من هذا الجدول انه قد تم تخصيص قسم الأحذيه ليحتل

الموقع الوهمى (هـ) وهذا يعنى أن هذا القسم لن يدخل ضمن تخطيط المتجر.

الحل بطريقة الفرع و الحـــــــد

سبق فى بداية هذا الجزء أن قمنا بشرح وتطبيق طريقه الفرع والحد للتوصل الى الحل الأمثل لمشاكل التخصيص ، الأن المشاكل التى كانت كأمثله للحل كانت كلها ذات هدف تخفيض، لذلك قديكون من المناسب هنا أن نتعرض لتطبيق طريقة الفرع والحد لمشكله تخصيص ذات هدف تعظيم وفى ذات الوقت لا تتساوى فيها عدد الأعمده مع عدد الصفوف .

إن الخطوات التى تشتمل عليها طريقة الفرع والحد هى ذاتها التى ستطبق على هذا المثال مع اختلاف بسيط مرجعه طبيعة هدف المشكله ، اذ كانت الخطوه الأولى هى إيجاد الحد الأدنى للتكلفة الاجماليه للتخصيص ويكون ذلك هو الحد الذى سننطلق منه الى إيجاد التخصيص الأمثل ، وفيما يلى تطبيق خطوات طريقه الفرع و الحد على مثال تخصيص ذات هدف تعظيم.

الخطوه الأولى : إيجاد الحد الأعلى للأرباح الاجماليه للتخصيص وبصرف النظر عن كون ذلك الحد ممكن أو غير ممكن ،و يتم ذلك عن طريق جمع أعلى ربح فى كل عمود من أعمده المصفوفه (سنستخدم الرموزس ،ص ، ع ، ل ، و على التوالى لترمز لأقسام المتجر).

ففى العمود الأول أعلى ربح هو ١٧ (تخصيص ع على أ)

وفى العمود الثانى أعلى ربح هو ١٨ (تخصيص ص على ب)

وفى العمود الثالث أعلى ربح هو ١٣ (تخصيص ل على ج)

وفى العمود الرابع أعلى ربح هو ١٦ (تخصيص ع على د)

وفى العمود الخامس أعلى ربح هو صفر(تخصيص و على هـ)

إذن أقصى أرباح ممكنه ٦٤ ألف جنيه.

ولكن يلاحظ أن هذه الأرباح تمثل حلاً غير ممكن حيث يتم تخصيص القسم (ع)، على الموقع (أ) و الموقع (د) وهذا غير صحيح.

الخطوة الثانية: و في تلك الخطوة نقسم مراحل البحث عن الحلول ،و يتم ذلك على أساس أن نفترض أننا سنخصص كل قسم على التوالى على الموقع (أ)، ونحسب الحد الاقصى لارباح التخصيص فى كل حالة وعما اذا كان الحل ممكنا أم لا، والجدول التالى يوضح نتيجة إجراء تلك الخطوة.

التخصيص	الحد الأقصى للأرباح	ملاحظات
القسم (س) على الموقع (أ)	١٠+١٨+١٣+١٦+صفر = ٥٧	الحل غير ممكن
القسم (ص) على الموقع (أ)	١٥+١٦+١٣+١٦+صفر = ٦٠	الحل ممكن
القسم (ع) على الموقع (أ)	١٧+١٨+١٣+١٢+صفر=٦٠	الحل ممكن
القسم (ل) على الموقع (أ)	١٤+١٨+١٣+١٦+صفر=٦١	الحل غير ممكن
القسم (و) على الموقع (أ)	١٤+١٨+١٣+١٦+صفر=٦١	الحل ممكن

ويتبين من هذا الجدول أن أعلى ربح قد تحقق ومن خلال حل ممكن إذن هو التخصيص الأمثل وهو:

قسم الأحذية على الموقع الوهمى صفر

قسم لعب الأطفال على الموقع(ب) ١٨ ألف جنيه

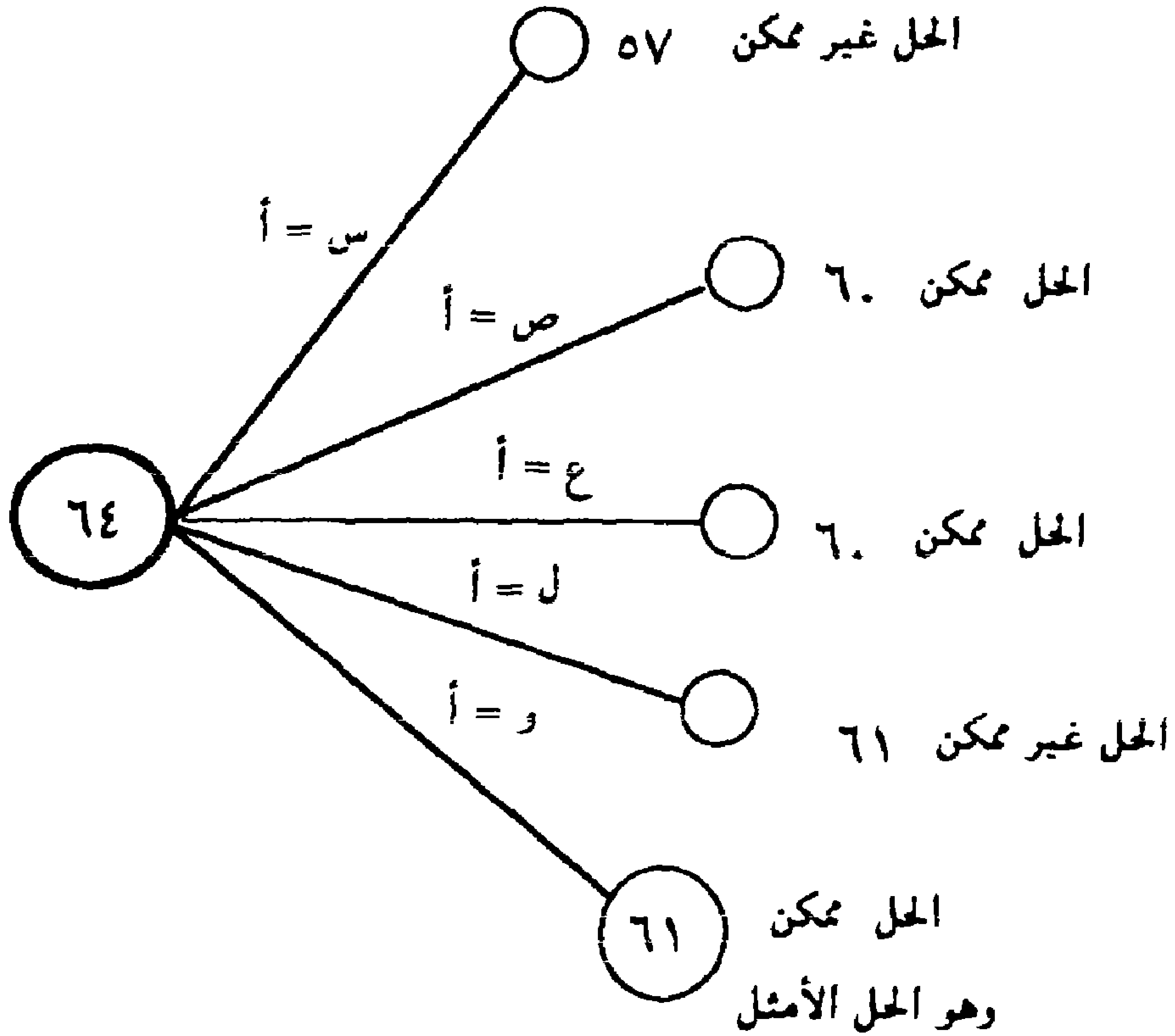
قسم قطع الغيار على الموقع (د) ١٦ ألف جنيه

قسم الأدوات المنزليه على الموقع(حـ)١٣ ألف جنيه

قسم الأدوات الكهربائية على الموقع (أ)١٤ ألف جنيه

أقصى الأرباح ٦١ ألف جنيه

وهى نفس النتيجة التى وصلنا اليها من الطريقة المجرية ، وستظهر شجرة الفرع و الحد على الشكل التالى :



ثالـــثـا: حالة التخصيصات غير المقبولة:

كما هو الحال فى مشكلة النقل عندما تعرضنا للحالة الخاصة بالطرق الممنوعة أو الطرق غير المرغوب النقل عليها لأى سبب ولأى اعتبار،فكذلك الحال بالنسبه لمشكلة التخصيص فقد تكون وجهة نظر الادارة أن هناك تخصيص أو تخصيصات معينة غير مرغوب فيها لاسباب موضوعية ولمبررات لديها قناعة بها ، ومعنى ذلك أنه اذا تركت العمليات الحسابيه تجرى بطريقه آليامن خطوة لأخرى حسب خطوات الطريقة المجرية للتخصيص فقد نفاجىء بأن التخصيص غير المرغوب فيه قد ظهر كتخصيص حقيقى فى جدول الحل الأمثل وأصبح التخصيص الأمثل يتضمن هذا التخصيص غير المرغوب فيه ، اذ أن ميكانيكية خطوات الحل المعتادة لم تملك السيطرة أو لم يتم تحويرها لتواجه مثل هذا الموقف المطلوب . فمثلاً قد يكون من غير المرغوب

فيه أن يتولى أحد المستشارين القيام بدراسة معينه من الدراسات التى تعاقد عليها مكتب الاستشارات الاداريه لاعتبارات شخصية أو عائلية أو أكاديميه ، أو قد يكون من غير المرغوب فيه تخصيص عامل معين بالذات للعمل على آله معينه بالذات لظروف تتعلق بالخبرة والتدريب و الأمن ، أو قد يكون من غير المرغوب فيه أن يخصص الموقع المعين لقسم الأطفال لعدم تلاؤمهما . خلاصة القول أنه قد يكون هناك من الاعتبارات التى تفرض عدم الموافقه أو عدم قبول تخصيص مورد معين على إستخدام معين .

إن التصرف حيال هذا النوع من الحالات الخاصة التى قد تواجهنا عند التعامل مع مشاكل التخصيص تفرض علينا التصرف بداية بالتحوير أو بإتخاذ الأجراء الكفيل بإحترام هذا الشرط قبل السير فى خطوات الحل وترك الأمر يخرج من أيدينا لتتحكم فيه آلية الحل وفق الطريقة المستخدمة ، إن الأمر يستلزم إتباع إجراء ما قبل تطبيق خطوات الحل.

إن الإجراء الذى يضمن لنا إحترام هذا الشرط وتخليص الحل الامثل من هذا التخصيص غير المرغوب فيه هو أن نجعل هذا التخصيص سيىءجدا الى الحد الذى تلفظه ميكانيكية خطوات الحل عندئذ نجد أن الحل الامثل يبتعد عن هذا التخصيص السيئ ونضمن بذلك ان التخصيص الامثل سيخلوا تماما من أى تخصيصات غير مرغوب فيها .

ولكن مازال السؤال مطروحا ، وهو كيف نجعل هذا التخصيص سيىء جدا ؟ للاجابه على هذا التساؤل يتطلب الأمر أن نذكر القارىء بموضوع سبق أن ناقشناه فى الجزء الخاص بالبرامج الخطية وهو موضوع المتغيرات الصناعيه Artificial variables وبصفة خاصة عندما كنا نتناول طريقة (م) الكبرى Big-M Method ، فقد كنا نحاول أن نضمن أن تلك المتغيرات لن تظهر فى الحل الامثل ، وكان أسلوبنا فى ذلك هو أن نعطى لتلك المتغيرات أعلى تكاليف على الإطلاق فى

مشاكل التخفيض ، وأدنى أرباح على الإطلاق فى مشاكل التعظيم (راجع أيضاً ما ناقشناه عن الطرق الممنوعه فى طريقة النقل) .
ويمكننا إستخدام نفس هذا المدخل لمعالجة التخصيصات غير المقبوله ، أى أنه لكى نجعل التخصيص المعين لايتم ولايظهر فى الحل الأمثل لانه تخصيص غير مقبول، أن نجعل قيمة هذا التخصيص عكس إتجاه الهدف و بقيمة مرتفعة جداً كالاتى:

١- اذاكانت المشكله تخصيص ذات هدف تخفيض إذن يتعين أن نضع للتخصيص غير المرغوب فيه قيمه تمثل تكلفة عاليه جداً بالمقارنه بقيم المصفوفة. هنا سنجد أن هذا التخصيص سيكون سيئ ولن يدخل فى الحل الأمثل حيث أن خطوات طريقة التخصيص ستلفظ من تلقاء نفسها هذا التخصيص غير المرغوب فيه ، الا أنه بدلا من إستخدام قيمة رقمية توضع عند هذا التخصيص غير المرغوب فيه فإنه يمكن إستبدالها بإستخدام الرمز (م) حيث أن (م) قيمة مرتفعة جداً بالمقارنة بباقى قيم المصفوفة ولا تتأثر بإضافة أو خصم أى قيم منها ، عندئذ لايمكن أن تتحول هذه القيمه (م) الى صفر وطالما أنها لن تتحول الى صفر اذاً لايمكن أن يتم اختيارها كتخصيص يقع مع الحل الأمثل وستظل محتفظة بقيمتها (م) ولاتخصص إطلاقاً .و هذا هو المنطق الذى يمكن به معالجة التخصيصات غير المقبولة.

٢- أما اذا كانت المشكلة تخصيص ذات هدف تعظيم ، فإن المنطق نفسة يسرى هنا أيضا ، نريد أن نجعل قيمة هذا التخصيص غيرالمرغوب فيه لا تصل الى القيمة (صفر) إطلاقاً ، فإذا كنا جعلنا قيمة(م) قيمة كبرى فى مشكله التخصيص لتعبر عن أن هذا التخصيص مرتفع جداً فى التكلفه وسىء فى التخصيص ، فإن إستخدام (م) نفسها وباشارتها لا يصلح هنا ، لأنها لو كانت فى مشاكل التعظيم قيمه كبرى موجبة الاتجاه فهذا معناه أنها تخصيص ممتاز لان أرباحها مرتفعه وهذا عكس مانريد ،إذن يتبين عكس إتجاهها أى

تكون قيمة كبرى سالبه أى هى غير مربحة بل هى خسارة يتعين البعد عنها ، لذلك نضع فى التخصيصات غير المقبوله فى مشاكل التعظيم الرمز (– م) بحيث لوطرح منه أو أضيف اليه رقم لايتأثر.

مثـــــال:

فى المثال السابق الخاص بمتجر التجزئة الكبرى بفرض أن مدير هذا المتجر يرى أن قسم لعب الأطفال غير متلائم مع الموقع (ب) ،و أن قسم قطع غيار السيارات غير متلائم مع طبيعه الموقع (د) وذلك إستنادا" الى عدد من الاعتبارات منها مثلا" مساحة الموقع ، تجاور الأقسام ،و إعتبارات أخرى خاصة بسلوك المستهلك ،و من ثم نريد أن نحصل على التخصيص الأمثل للمشكلة فى ضوء هذه الإشتراطات أو التخصيصات غير المقبولة.

الحـــــــل:

قبل تطبيق خطوات الحل بالطريقة المجريه يتعين أن نجرى على المصفوفه الأصلية بعض التعديلات التى تفرضها هذه الاشتراطات أو التخصيصات غير المقبولة ،و حيث أن هذه هى تخصيصات ذات هدف تعظيم ، إذن يتم وضع الرمز (– م) بالمصفوفة محل القيم الأصلية بالمصفوفة الأصلية عند التخصيصات غير المقبولة ،و بذلك تظهر المصفوفه الأصلية بعد إجراء التعديل عليها كالأتى :

	(أ)	(ب)	(حـ)	(د)	(هـ) وهمي
قسم الأحذية	١٠	٦	١٢	٨	صفر
قسم لعب الأطفال	١٥	– م	٥	١١	صفر
قسم قطع غيار السيارات	١٧	١٠	١٣	– م	صفر
قسم الأدوات المنزلية	١٤	١٢	١٣	١٠	صفر
قسم الأدوات الكهربائية	١٤	١٦	٦	١٢	صفر

ويتم بعد ذلك إجراء الخطوات المعتادة للطريقةالمجرية للتخصيص وسنصل الى الحل الأمثل دون أن يتضمن أى تخصيصات غير مقبولة ،و فيما يلى نواصل الحل لنقف على شكل المصفوفة خطوة بعد أخرى وما هي الاختلافات التى يمكن أن تحدث اذا وجدت.

الخطـــوة الأولـــى : تحويل المشكلة الى مشكلة تخصيص ذات هدف تخفيض.

حيث أن المشكلة التى نتناولها الأن هى مشكله تخصيص ذات هدف تعظيم ، إذن يتطلب الأمر أولا" تحويلها الى مشكلة تخصيص ذات هدف تخفيض ليسهل التعامل معها ، وسبق القول أن طريقة تحويلها يتم عن طريق إيجاد مصفوفة الفرصة الضائعة وذلك بطرح كل قيم العمود من أكبر قيمه فيه ،وباجراء تلك الخطوة ستظهر مصفوفة الفرصة الضائعة على الصورة التالية:

	(أ)	(ب)	(حـ)	(د)	(هـ) وهمي
قسم الأحذية		١٠		٤	صفر
قسم لعب الأطفال		م		١	صفر
قسم قطع غيار السيارات	صفر	٦	صفر	م	صفر
قسم الأدوات المنزلية		٤	صفر	٢	صفر
قسم الأدوات الكهربائية		صفر		صفر	صفر

من هذا الجدول يتبين أن تكلفه الفرصة الضائعة للخلايا غير المرغوب فيها أصبحت (م) فى حين أن كانت أرباحها فى المصفوفة الأصلية (ـ م) ، فمن أين حدث هذا التغيير .لقد سبق القول أنه لتحويل مشكلة التخصيص من مشكلة ذات هدف تعظيم الى مشكلة ذات هدف تخفيض هو طرح كل قيم العمود من أكبر قيمه فيه ،وعند تطبيق هذه الخطوة ستنقلب (ـ م) الى (م) كالاتى:

الفرصة الضائعة بالخليه غيرالمرغوب فيها = أكبر قيمة بالعمود - (- م) ، ومن ثم تتحول الى قيمة موجبه ،و عندما تكون موجبة فإنها تصبح من أكبر قيم مصفوفة الفرصة الضائعة الأمر الذى يجعلها تستبعد من التخصيص ولايتم التخصيص عليها وهو المطلوب.

كذلك يتضح أنه بتغطية جمبيع القيم الصفرية بالخطوط المستقيمة لم يتم بعد الوصول الى الحل الأمثل لان عدد الخطوط المرسومة أربعة فقط وهذا يقل عن عدد الصفوف (أو الأعمدة) ويتطلب الا مر تحسين الحل بشكل عادى متناسين تماما" ماأحدثناه من تحوير ، و نستمر فى الحل وصولا للحل الأمثل الذى سيظهر على الشكل التالى:

	(أ)	(ب)	(حـ)	(د)	(هـ) وهمي
قسم الأحذية	٧	٩	١	٣	صفر
قسم لعب الأطفال	٢	م	٨	صفر	صفر
قسم قطع غيار السيارات	صفر	٥	صفر	م	صفر
قسم الأدوات المنزلية	٣	٣	صفر	١	صفر
قسم الأدوات الكهربائية	٤	صفر	٨	صفر	١

و نتيجة الحل الأمثل تظهر فى الجدول التالى مقارنة بالتخصيص القديم و الفروق بينهما :

القســـم	التخصيص القديم		التخصيص الجديد		التغير فى الأرباح
	الموقع	الأرباح	الموقع	الأرباح	
قسم الأحذية	هـ	صفر	هـ	صفر	صفر
قسم لعب الأطفال	ب	١٨	د	١١	-٧
قسم قطع غيار السيارات	د	١٦	أ	١٧	+١
قسم الأدوات المنزلية	جـ	١٣	جـ	١٣	صفر
قسم الأدوات الكهربائية	أ	١٤	ب	١٦	+٢
المجموع		٦١		٥٧	- ٤

اذن كان من نتيجة الاشتراطات التى وضعها مدير المتجر فى عدم تخصيص بعض الاقسام فى الأماكن التى ظهرت بالتخصيص القديم أن انخفضت الأرباح من ٦١ ألف جنيه الى ٥٧ ألف جنيه بإنخفاض مقداره أربعة الاف جنيه ،و لكن يرى أن التضحية بهذا الرقم أخفف ضررا" من تخصيص بعض الأقسام على أماكن ومواقع غير مرغوب فيها.

أسئلة وتطبيقات:

١- يوجد بأحد المؤسسات ثلاثة مهام غير مخصصة، وفى الوقت نفسه يوجد ثلاثة من الموظفين متاحين حاليا للتخصيص على تلك المهام، والجدول التالى يوضح الأزمنه المقدرة بالساعات للإنتهاء من كل مهمة بواسطة كل موظف.

المهمة / الموظف	أ	ب	ج
س	١١	١٢	١٧
ص	٧	١١	٢٠
ع	٥	٨	١٦

والمطلوب: إيجاد التخصيص الأمثل للموظفين الثلاثة والذى يعمل على تدنيه اجمالى الزمن المستغرق فى انجاز المهام الثلاثة.

٢- بافتراض فى الحالة السابقة أنه قد انضم موظف رابع (ل) وقدرت الازمنة الخاصة بمقدرته على الانتهاء من كل وظيفة كالآتى (٨، ١٠، ١٩) على التوالى إلا انه يفضل ألا يتولى الموظف الجديد مهام الوظيفة (حـ) لقلة خبرته بها.

والمطلوب:

أ- ما هو التخصيص الامثل؟ وهل يوجد تعدد فى الحلول المثلى؟

ب- هل اضافة الموظف الرابع غيّر من الحل الأصلى ؟ وماذا عن قيمة التخصيص فى الحالتين؟

جـ- من هو الموظف الذى سيظل دون تخصيص فى الحل الأمثل وبماذا تفسر ذلك؟

٣- مع بداية العام الدراسى اجتمع رئيس قسم إدارة الأعمال مع خمسة من المعيدين والمدرسين المساعدين بالقسم بغرض توزيع خمس مواد دراسية عليهم، بحيث يقوم كل منهم بتدريس مادة واحدة، ولايقوم بتدريس المادة إلا

شخص واحد، وطلب رئيس القسم من كل منهم تسجيل رغبته في المادة التى يرغب فى تدريسها بشرط ان يرتب كل منهم المواد الخمسة كلها وفقا لرغبته، فالمادة التى تمثل الرغبة الأولى تأخذ رقم (١) والمادة التى تمثل الرغبة الثانية تأخذ رقم (٢) ... وهكذا، وفعلا قام كل منهم بترتيب تلك المواد وفق رغبته، وبتفريغ تلك الرعبات تم الوصل الى جدول الرغبات التالى:

المواد الدراسية / المحاضر	بحوث عمليات	بحوث تسويق	إدارة عامة	تخطيط ومراقبة إنتاج	إعلان وعلاقات عامة
س	٣	٢	١	٤	٥
ص	٤	٣	٥	١	٢
ع	٥	٢	٣	١	٤
ل	٤	٢	٥	١	٣
م	٥	٢	٤	١	٣

ولقد كلفك رئيس القسم بتقديم حلا رياضيا فى شكل تخصيصات مثلى بديلة للمعيدون والمدرسون المساعدون الخمسه على المواد الدراسية شريطة ان تحقق تلك الحلول المثلى أدنى اختلافات ممكنه مع رغبات المحاضرين علما بان كل المحاضرون يتمتعون بنفس الكفاءة العلمية فى تدريس أى من تلك المواد الدراسية، وأن هذا التخصيص يهدف بالدرجة الأولى الى تحقيق عنصرى الكفاءة والرغبة فى آن واحد كهدف يسير عليه قسم إدارة الأعمال.

٤- يواجه مدرب المنتخب القومى لكرة القدم بمشكلة الاعداد النهائى لتشكيل الفريق الذى سيمثل مصر فى تصفيات كأس العالم، ولهذا الغرض تم إعداد لجنه فنية رياضية للاشتراك فى اعداد هذا التشكيل وقد تم استعراض جميع اللاعبين المرشحين للاشتراك فى المنتخب، وتم تقييم كفاءة كل منهم على مختلف مراكز اللعب، وفيما يلى الجدول الذى يمثل نتيجة هذا التقويم:

رقم اللاعب / المراكز	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
حارس مرمى	١٠	٣	٤	٣	٥	٣	٩	٦	٣	٤	٣	٢	٥	٣
دفاع أيمن متأخر	٧	٩	١٠	٧	٨	١٠	٥	٤	٥	٥	٦	٨	٧	٦
دفاع وسط	٨	١٠	٩	٨	٨	٧	٣	٥	١٠	٦	٧	٨	١٠	٧
دفاع أيسر متأخر	٧	٩	٨	٩	٩	٨	٢	١٠	٧	٦	٧	٨	٦	٨
قلب دفاع	٧	١٠	٧	٧	٩	٨	٣	٦	١٠	٨	٨	٨	٦	٧
دفاع أيمن متقدم	٣	٨	٨	١٠	٩	٩	٣	١٠	٨	٩	٨	٨	١٠	٨
خط الوسط	٤	٦	٧	٨	٨	٩	٣	٨	٨	١٠	٩	٩	٩	٨
دفاع أيسر متقدم	٥	٧	١٠	٧	٨	٩	٤	٨	١٠	٨	٩	٩	١٠	٩
جناح أيمن	٣	٤	٥	٨	٨	٩	٤	٩	٧	٨	١٠	١٠	٩	٩
جناح أيسر	٢	٥	٦	٧	٧	١٠	٣	٧	٨	٧	١٠	١٠	٩	١٠
قلب هجوم	٢	٦	١٠	٧	٧	١٠	٣	٦	٥	٧	١٠	١٠	٩	١٠

وقد وضعت اللجنة القيود التالية على التشكيل المقترح:

أ- لاينبغى أن يشغل اللاعب رقم (٩) مهمة دفاع أيسر متقدم.

ب- يلتزم التشكيل بأن يتولى اللاعب رقم (١) حراسة المرمى، وأن يكون اللاعب رقم (٧) احتياطيا له.

جـ- نظراً لشعبية كل من اللاعبين (٣)، (١١)، و(١٢) فيتعين تسكينهم على الترتيب قلب هجوم، جناح أيمن، جناح أيسر.

والمطلوب: أن تقدم للمدرب التشكيل النهائى المقترح والتشكيلات البديله إن وجدت واللاعبون الاحتياطيون للفريق مستخدما فى ذلك أسلوب التخصيص.

٥- يلزم لاحدى الشركات تعيين خمسة كتبة لشغل خمس وظائف متاحة هى أمين صندوق، كاتب فواتير، كاتب رواتب، كاتب تكاليف، كاتب أرشيف، وقد أعلنت الشركة عن هذه الوظائف الشاغرة، فتقدم لها سبعة ممن تتوافر فيهم الشروط وعقدت لهم اختبارات تتعلق بأنشطة ومهام الوظائف الشاغرة الخمس وذلك بغرض الاختيار من بينهم من ناحية وتحديد أنسبهم لكل وظيفة من ناحية أخرى للتخصيص عليها والجدول التالى يعطى الدرجات التى حصل كل منهم عليها فى الاختبار (كل جزء من الاختبار من عشرة درجات).

الوظائف / المتقدمون	أمين الصندوق	كاتب فواتير	كاتب رواتب	كاتب تكاليف	كاتب أرشيف
أ	٣	٣	١	٣	٥
ب	٥	٨	٩	٤	٤
جـ	١	٧	١٠	٢	٧
د	٥	٩	٨	٦	٧
هـ	٤	٥	٩	٥	٦
و	٥	٤	١٠	٤	٨
ز	٥	٥	٤	٦	٦

والمطلوب: تقرير من سيتم قبولهم للالتحاق بالعمل ومن سترفض طلباتهم وأى الأعمال ستسند إلى المقبولين.

٦- تعتزم محافظة الشرقية القيام بعدد من المشروعات فى مدن وقرى المحافظة وهذه المشروعات هى:

إنشاء مدرسة ثانوية، مستشفى عام، حضانة أطفال، جمعية تعاونية استهلاكية، وأعمال رصف.

وقد تبين للمسئولين أن هناك ٦ مدن وقرى فى المحافظة كلها فى حاجة الى كل تلك المشروعات إلا أن المحافظة تنوى توزيع تلك المشروعات بحيث يكون نصيب المدينة أو القرية مشروع واحد فقط، بهدف إيجاد توازن فى التنمية الاجتماعية لكافة مدن وقرى المحافظة. إلا أن المشكلة هى كيفية توزيع هذه المشروعات على تلك المدن والقرى، ولهذا الغرض شكلت لجنة من المسئولين عن هذه القطاعات لتحديد درجة إلحاح الحاجة الى كل مشروع من تلك المشروعات فى المدن والقرى المعنية. وبعد الدراسة تم إعداد جدول إلحاح الحاجة (الحد الاقصى ١٠)، كما يظهر فى الشكل التالى:

المدينة أو القرية / المشروعات	الزقازيق	أبو كبير	منيا القمح	فرسيس	العباسة	التل الكبير
مدرسة ثانوية	٩	٧	٥	٨	٨	٦
مستشفى عام	٩	٥	٧	١٠	٨	٧
حضانة أطفال	٩	٥	٨	٢	٥	٦
جمعية تعاونية استهلاكية	٧	٦	٦	٣	٧	٨
أعمال رصف	٩	٨	٨	٤	٦	٩

والمطلوب: أن تقدم للمسئولين عن المحافظة أسلوباً علمياً رياضيا يسترشدون به لايجاد التخصيص الأمثل لتلك المشروعات على مدن وقرى المحافظة.

٧- يقوم مخططو البرامج بالقناة الأولى بتليفزيون جمهورية مصر العربية بجدولة السهرات الأسبوعية لدورته الجديدة، ولقد استقر الرأى على بعض تلك السهرات، إلا أنه مازالت لديهم مشكلة هى توزيع ثلاثة برامج يراد توزيعها على سهرات ثلاث ليالى، ومن أجل ذلك تم تقدير عدد المشاهدين المتوقعين لكل برنامج اذا تم اذاعته فى كل ليلة، والجدول التالى يوضح هذه التقديرات (الأرقام بالمليون مشاهد):

البرنامج / اليوم	الفيلم العربى	المسرحية	المصارعة الحرة
الاربعاء	٥	٧	٢
الخميس	٩	٩	٤
الجمعة	٧	٨	٣

وقد تبين من الدراسات السلوكية أنه يتعين عدم عرض برنامج المصارعة الحرة فى سهرة يوم الخميس لأن بها من العنف ما يخشى من تأثيره على سلوك الاطفال فى السن الصغيرة والذين يجلسون الى التليفزيون لساعة متأخرة فى مساء تلك الليلة، حيث العطلة الاسبوعية فى اليوم التالى.

والمطلوب: إيجاد التخصيص الأمثل لهذه البرامج على سهرات أيام الاسبوع المتاحة والذى يعمل على ارضاء الغالبية العظمى من المشاهدين وفى نفس الوقت أن يكون رأى العلماء السلوكيين محل تقدير واهتمام.

المراجع

أولا : المراجع العربيه:

١ـ د. أحمد سرور محمد ، بحوث العمليات في ميدان الإنتاج. مكتبة عين شمس ،القاهرة ،١٩٦٤.

٢ـ د. حازم أحمديسن ود.محمد سميركامل ،بحوث العمليات، الزقازيق،١٩٨١.

٣ـ د. حمدى مصطفى المعاز، إدارة الإنتاج ، دار النهضة العربيه ، القاهرة ،١٩٨٧.

٤ـ د. حسن عبد الله أبو ركبه، بحوث العمليات و تطبيقاتها في مجال الأدارة، الطبعه الرابعة ، دار البيلاد، جدة ،١٩٨٦.

٥ـ د. حنفي محمود سليمان ، الإدارة ـ منهج تحليلي ذاتي، دار الجامعات المصرية، الأسكندرية،١٩٧٦.

٦ـ د. حنفي محمود سليمان ، المنهج المتكامل في الادارة ، دار الجامعات المصرية ، الأسكندرية ، ١٩٧٩.

٧ـ د. عبد الهادى قريطم و د. بدر الدين المصرى ،بحوث العمليات في تخطيط و مراقبة الإنتاج ، دار الجامعات المصرية ،الأسكندرية ،١٩٦٨.

٨ـ د. على السلمى ،بحوث العمليات و إتخاذ القرارات الاداريه ،دار المعارف المصرية، القاهرة،،١٩٧٠.

٩ـ د. على السلمى ، الأساليب الكمية في الادارة ،دار المعارف المصرية،١٩٧٣.

١٠ـ د. على عبد السلام المعزاوى ،بحوث العمليات فى مجال الانتاج و التخزين و النقل ، دار النهضة العربية ، القاهرة ١٩٧٧.

١١ـ د. لطفى لويز سيفين ، بحوث العمليات و المنهج الكمى لاتخاذ القرارات ، دار الجامعات المصرية، الأسكندرية ، ١٩٧٧.

١٢ـ د. محمد الحناوى ، بحوث العمليات فى مجال الإدارة دار الجامعات المصريه ،الأسكندرية ، ١٩٨٦.

١٣ـ د. محمد توفيق ماضى ، الأساليب الكميه فى مجال إدارة الإنتاج و العمليات ، المكتب العربى الحديث، الأسكندرية ، ١٩٨٦.

١٤ـ د. محمد سالم الصفدى ، البرمجة الخطيه وبحوث العمليات ، و كاله المطبوعات ، الكويت ، ١٩٨٦.

١٥ـ د. محمد صبرى العطار، بحوث العمليات فى المحاسبة ، القاهرة،١٩٨٧.

١٦ـ د. سمير بيباوى فهمى ود. محمد صبرى العطار ، بحوث العمليات فى المحاسبة ، مكتبة الأنجلو المصرية ، القاهرة ،١٩٧٩.

١٧ـ د. فريد زين الدين بحوث العمليات - النظريه والتطبيق، الطبعه الأولى ،مكتبه المدينه، الزقازيق،١٩٨٤.

ثانيا : المراجع الاجنبية

1- Ackoff, R. L., and M. W. Sasieni, ***Fundamentals of operations Research***, John wiley and Sons, New Yourk, 1968.

2- Beale, E. M. L., ***"Cycling in the Dual simplex Algorithm"***, Naval Research and Management, 1955.

3- Carlson, P. G., ***Quantitative Methods for Mangers,*** Harper and Row, Publshers, New York, 1967.

4- Churchman, C. W., & otheres, ***Introduction to Operations Research,*** John Wiley and Sons, New York. 1957.

5- Harper, W. M., ***Operational Research,*** Mac Donald & Evans, London, 1975.

6- Herrman, G. G., & Magee, J. F., ***Operations Research for Management***, The New English Library LTD. London, 1969.

7- Hoffman, A. J., ***"Cycling in the simplex Algorithm"***, National Bureau of standards, report No. 2974, Dec. 1983.

8- Kornblnth. J., ***"A survey of Goal Programming,"*** OMEGA, Vol. 1. No. 2, 1973.

9- Lee, S. M., ***Goal programming for Decision Analysis,*** Philadephia Publishers Inc., 1972.

10- Makower, M. S., ***Operational Research,*** Stagton, London, 1977.

11- Swanson, L. W., ***Linear Programming,*** McGraw -Hill., Inc., New York, 1980.

رقم الإيداع بدار الكتب : ١٩٩٦/٧٤١٢

الترقيم الدولى .I.S.B.N. :7 - 1715 - o4 - 977

هذا الكتاب

لاشك أن الثورة الإدارية هى السمه الظاهرة لهذا العصر الذى نعيش فيه، ومن معالم الثورة الإداريه هذه أساليب بحوث العمليات، بإعتبارها مدخل العلم المستخدم فى حل المشكلات التى تصادف الإدارة العليا للمنظمات، ووسيلتها فى إتخاذ القرارات السليمة فيما يعترضها من مشكلات .

ويهدف هذا الكتاب إلى دارسة وتحليل وتوضيح كيفية تطبيق الأساليب الرئيسيه التى تحويها بحوث العمليات وذلك بشكل مركز يؤدى الى الهدف، ويناقش بشكل تفصيلى وتطبيقى أسلوب البرمجة الخطية بإعتبارها من أهم الأساليب التى تساعد الإدارة فى حل مشاكل التخصيص للموارد المتاحة ولكونها نقطة الإرتكاز الأساسية التى يدور حولها العمل الإدارى المعاصر فى المنظمات الحديثة سواء كانت إنتاجيه أو خدميه وفى مختلف بلدان العالم .